Բնական գիտություններ 1, 2006 Естественные науки

Механика

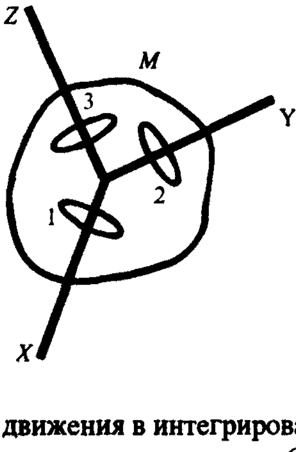
УДК 517.934

В. Н. ГРИШКЯН

О СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЕНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной работе решаются задачи оптимальной стабилизации и оптимального управления движением твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, с помощью маховиков. Показано, что эта система не вполне управляема только гироскопическими силами. К системе прибавлены диссипативные силы, возникающие при вращательном движении маховиков. Рассматриваются линейные системы и для них найдены оптимально стабилизирующие и управляющие воздействия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело с неподвижной точкой O в центре масс, по главным осям инерции которого расположены оси трех однородных симметричных маховиков, приводящихся во вращение специальными двигателями. Предположим, что внешних сил, действующих на тело, нет и все главные моменты инерции тела известны. Введем следующие обозначения: $Oxyz$ – подвижная система осей координат, жестко связанная с телом и совмещенная с его главными осями инерции; p, q, r – проекции абсолютной мгновенной угловой скорости вращения тела на x, y, z соответственно; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – относительные угловые скорости вращения маховиков. Попробуем с помощью маховиков стабилизировать вращательное движение тела вокруг центра масс и управлять им.



Теорема об изменении момента количества движения в интегрированном виде будет следующая:

$$\begin{cases} G_x = I_{xx}p + I_{1xx}(\omega_1 + p) = D_1 = const, \\ G_y = I_{yy}q + I_{2yy}(\omega_2 + q) = D_2 = const, \\ G_z = I_{zz}r + I_{3zz}(\omega_3 + r) = D_3 = const, \end{cases} \qquad (1)$$

где $I_{1xx}, I_{2yy}, I_{3zz}$ – моменты инерций маховиков, а I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерций тела. Так как величины $I_{1xx}, I_{2yy}, I_{3zz}$ считаются малыми по сравнению с I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} соответственно, то можно принять $I_{xx} \pm I_{1xx} \approx I_{xx}$,

$I_{yy} \pm \dot{I}_{2yy} \approx I_{yy}$, $I_{zz} \pm I_{3zz} \approx I_{zz}$,. Тогда динамические уравнения Эйлера [1] примут следующий вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = br\omega_2 - cq\omega_3, \\ B\dot{q} + (A - C)pr = cp\omega_3 - ar\omega_1, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = aq\omega_1 - bp\omega_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $A = I_{xx}$, $B = I_{yy}$, $C = I_{zz}$, $a = I_{1xx}$, $b = I_{2yy}$, $c = I_{3zz}$. Умножив уравнения системы (2) на p, q, r соответственно и просуммировав их, получим уравнение

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = const, \tag{3}$$

которое является интегралом энергии.

Известно, что если система допускает первый интеграл независимо от управляющих воздействий, то она не вполне управляема [2].

2. Стабилизация движения. Добавим к системе компоненты диссипативных сил, возникающих при вращательном движении маховиков: $-k_1 p$, $-k_2 q$, $-k_3 r$ (где $-k_i$, $i = 1,2,3$, – коэффициенты диссипации). Составим уравнения возмущенного движения, которые после линеаризации будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S_0 x_1 + S_1 x_2 + S_2 x_3 + S_4 \omega_2 + S_5 \omega_3, \\ \dot{x}_2 = L_0 x_2 + L_1 x_1 + L_2 x_3 + L_4 \omega_3 + L_5 \omega_1, \\ \dot{x}_3 = H_0 x_3 + H_1 x_1 + H_2 x_2 + H_4 \omega_1 + H_5 \omega_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $\dot{x}_1 = p - \alpha$, $\dot{x}_2 = q - \beta$, $\dot{x}_3 = r - \gamma$; $S_0 = -k_1 / A$, $S_1 = (B - C)\gamma / A$, $S_2 = (B - C)\beta / A$, $S_4 = \gamma b / A$, $S_5 = -c\beta / A$; $L_0 = -k_2 / B$, $L_1 = (C - A)\gamma / B$, $L_2 = (C - A)\alpha / B$, $L_4 = c\alpha / B$, $L_5 = -a\gamma / B$; $H_0 = -k_3 / C$, $H_1 = (A - B)\beta / C$, $H_2 = (A - B)\alpha / C$, $H_4 = a\beta / C$, $H_5 = -b\alpha / C$, а α, β, γ являются отклонениями от p, q, r соответственно.

Для системы (4) матрица управляемости K_u будет [3]:

$$K_u = \begin{bmatrix} 0 & S_4 & S_5 & L_5 S_1 + H_4 S_2 & H_5 S_2 + S_4 S_0 & L_4 S_1 + S_5 S_0 \\ L_5 & 0 & L_4 & H_4 L_2 + L_5 L_0 & S_4 L_1 + H_5 L_2 & S_5 L_1 + L_4 L_0 \\ H_4 & H_5 & 0 & H_4 H_0 + L_5 H_2 & H_5 H_0 + H_1 S_4 & L_4 H_2 + S_5 H_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_5 S_1 S_1 + H_4 S_2 S_2 & H_5 S_2 S_2 + S_4 S_0 S_0 & L_4 S_1 S_1 + S_5 S_0 S_0 \\ H_4 L_2 L_2 + L_5 L_0 L_0 & S_4 L_1 L_1 + H_5 L_2 L_2 & S_5 L_1 L_1 + L_4 L_0 L_0 \\ H_4 H_0 H_0 + L_5 H_2 H_2 & H_5 H_0 H_0 + S_4 H_1 H_1 & L_4 H_2 H_2 + S_5 H_1 H_1 \end{matrix} \Bigg].$$

Так как $rank[K_u] = 3$, то система (4) становится вполне управляемой величинами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ [3].

Поставим следующую задачу оптимальной стабилизации: требуется найти оптимально управляющие воздействия $\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0$ такие, чтобы для решения $x = x(t)$ системы (4) выполнялось $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ и минимизировался функционал $I[\omega]=\int\limits_0^\infty (x_1^2+x_2^2+x_3^2+\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)dt$, который имеет значение полной энергии.

Функцию Ляпунова целесообразно искать в следующем виде:

$$V=\frac{1}{2}(c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+2c_{13}x_1x_3+2c_{23}x_2x_3+c_{22}x_2^2+c_{33}x_3^2).$$

Тогда уравнение Белмана [4] будет:

$$\begin{gathered}B[x,\omega]=\left(c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3\right)\left(s_0x_1+s_1x_2+s_2x_3+s_4\omega_2+s_5\omega_3\right)+\\+\left(c_{22}x_2+c_{12}x_1+c_{23}x_3\right)\left(l_0x_2+l_1x_1+l_2x_3+l_4\omega_2+l_5\omega_1\right)+\left(c_{33}x_3+c_{13}x_1+c_{23}x_2\right)\times\\\times\left(h_0x_3+h_1x_1+h_2x_2+h_4\omega_1+h_5\omega_2\right)+x_1^2+x_2^2+x_3^2+\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Кроме этого, оптимально управляющие воздействия $\omega_1^0,\omega_2^0,\omega_3^0$ должны удовлетворять соотношению [4]

$$\frac{\partial B[x,\omega]}{\partial\omega_i^0}=0,\qquad i=1,2,3.\tag{6}$$

Из уравнения (6) следует, что

$$\begin{aligned}\omega_1^0&=T_1(c_{22}x_2+c_{12}x_1+c_{23}x_3)+T_2(c_{33}x_3+c_{13}x_1+c_{23}x_2),\\\omega_2^0&=T_3(c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3)+T_4(c_{33}x_3+c_{13}x_1+c_{23}x_2),\\\omega_3^0&=T_5(c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3)+T_6(c_{22}x_2+c_{12}x_1+c_{23}x_3),\end{aligned}\tag{7}$$

где $T_1=-L_5/2,\ T_2=-H_4/2,\ T_3=-S_4/2,\ T_4=-H_5/2,\ T_5=-S_5/2,\ T_6=-L_4/2.$ Подставляя уравнения (7) в (5), определяем коэффициенты c_{ij}.

3. Управление движением. Кинематические уравнение Эйлера [1] запишем в виде:

$$\begin{cases}p=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\q=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\r=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi,\end{cases}\tag{8}$$

где φ, ψ, θ – углы Эйлера. Для задачи управления в уравнениях (1) возьмем $\omega_2=\omega_3=0$. Подставляя уравнения (8) в (1), решаем полученную систему относительно $\dot\varphi$, $\dot\psi$, $\dot\theta$. Затем, разлагая в ряд Тейлора в окрестности точки $(\varphi_0,\psi_0,\theta_0)$ и линеаризовав ее, получим:

$$\begin{cases}\dot\varphi=R_1\varphi+R_2\theta+R_3\omega_1+R_4,\\\dot\psi=R_5\varphi+R_6\theta+R_7\omega_1+R_8,\\\dot\theta=R_9\varphi+R_{10}\omega_1+R_{11},\end{cases}\tag{9}$$

где $R_1=-\dfrac{D_1}{A+a}\left(\dfrac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\dfrac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\dfrac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}\right)-$

$$-\frac{D_2}{B+b}\left(-\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}\right),$$

$$R_2=-\frac{D_1}{A+a}\left(-\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}+\varphi_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}+2\theta_0\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\right)-$$

$$-\frac{D_2}{B+b}\left(-\frac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}+\varphi_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}+2\theta_0\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\right),$$

$$R_3=-\frac{a}{A+a}\left(\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}\right)-\frac{a}{A+a}\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\theta_0^2,$$

$$R_4=-\frac{D_1}{A+a}\left(\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}\right)-\frac{D_1}{A+a}\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\theta_0^2-$$

$$-\frac{D_2}{B+b}\left(\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\frac{\sin\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin^2\theta_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin^2\theta_0}\right)-\frac{D_2}{B+b}\frac{\cos\varphi_0\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}\theta_0^2+\frac{D_3}{C+c},$$

$$R_5=\frac{D_1}{A+a}\left(\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}-\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}\right)+\frac{D_2}{B+b}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}+\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}\right),$$

$$R_6=\frac{D_1}{A+a}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}-\varphi_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}+\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}\right)+\frac{D_2}{B+b}\left(\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}+\varphi_0\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}+\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\right),$$

$$R_7=-\frac{a}{A+a}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}-\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\theta_0^2\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}\right),$$

$$R_8=-\frac{D_1}{A+a}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}-\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\theta_0^2\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}\right)+$$

$$+\frac{D_2}{B+b}\left(\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}+\varphi_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin\theta_0}-\theta_0\frac{\cos\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\varphi_0^2\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}-\varphi_0\theta_0\frac{\sin\varphi_0}{\cos\theta_0}-\frac{1}{2}\theta_0^2\frac{\cos\varphi_0}{\sin\theta_0}\right),$$

$$R_9=\frac{D_1}{A+a}(-\sin\varphi_0+\varphi_0\cos\varphi_0)-\frac{D_2}{B+b}(\cos\varphi_0+\varphi_0\sin\varphi_0),$$

$$R_{10}=-\frac{a}{A+a}\left(\cos\varphi_0+\varphi_0\sin\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_0^2\cos\varphi_0\right),$$

$$R_{11}=\frac{D_1}{A+a}\left(\cos\varphi_0+\varphi_0\sin\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_0^2\cos\varphi_0\right)-\frac{D_2}{B+b}\left(\sin\varphi_0-\varphi_0\cos\varphi_0-\frac{1}{2}\varphi_0^2\sin\varphi_0\right).$$

Для системы (9) матрица управляемости K_u будет [3]:

$$K_u=\begin{bmatrix} R_3 & R_1R_3+R_2R_{10} & R_1^2R_3+R_2^2R_{10} \\ R_7 & R_3R_5+R_6R_{10} & R_5^2R_3+R_6^2R_{10} \\ R_{10} & R_3R_9 & R_9^2R_3 \end{bmatrix}.$$

Так как $rank[K_u]=3$, то система (9) будет вполне управляемой с помощью ω_1 [3].

Сформулируем следующую задачу: найти оптимальное управляющее воздействие ω_1^0, которое приведет систему (9) от начальной позиции (φ_0, ψ_0, θ_0) к позиции (φ_1, ψ_1, θ_1), минимизируя функционал

$$\chi[\omega_1]=\int_{t_0}^{t_1}\omega_1^2d\tau .$$

Этот функционал имеет своеобразное значение энергии.

Задачу решаем по методу проблемы моментов [5]. Из формулы Коши получаются следующие три интегральных условия:

$$\int_{t_0}^{t_1}h_1(\tau)\omega_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}\left(a_1e^{\alpha(t_1-\tau)}+a_2e^{\beta(t_1-\tau)}\right)\omega_1(\tau)d\tau=C_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}h_1(\tau)\omega_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}\left(a_3e^{\alpha(t_1-\tau)}+a_4e^{\beta(t_1-\tau)}+a_5\right)\omega_1(\tau)d\tau=C_2,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}h_1(\tau)\omega_1(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t_1}\left(a_6e^{\alpha(t_1-\tau)}+a_7e^{\beta(t_1-\tau)}\right)\omega_1(\tau)d\tau=C_2,$$

где $\alpha=\dfrac{R_1+\sqrt{R_1^2+4R_2R_9}}{2}$, $\beta=\dfrac{R_1-\sqrt{R_1^2+4R_2R_9}}{2}$,

$$a_1=\frac{(-\beta+R_1)R_3+R_2R_{10}}{\alpha-\beta},\qquad a_2=\frac{(\alpha-R_1)R_3-R_2R_{10}}{\alpha-\beta},$$

$$a_3=\frac{(R_2R_5+(\alpha-R_1)R_6)((-\beta+R_1)R_3+R_2R_{10})}{\alpha(\alpha-\beta)R_2},$$

$$a_4=-\frac{(R_2R_5+(\beta-R_1)R_6)((-\alpha+R_1)R_3+R_2R_{10})}{\beta(\alpha-\beta)R_2},$$

$$a_5=\frac{1}{\alpha\beta R_2}((\alpha-R_1)(-\beta+R_1)R_3R_6+R_2^2R_5R_{10}-$$
$$-R_7((\alpha+\beta-R_1)R_3R_5-\alpha\beta R_7+R_1R_6R_{10})),$$

$$a_6=\frac{(\alpha-R_1)((-\beta+R_1)R_3+R_2R_{10})}{(\alpha-\beta)R_2},\quad a_7=-\frac{(\beta-R_1)((-\alpha+R_1)R_3+R_2R_{10})}{(\alpha-\beta)R_2}.$$

Затем, минимизируя функционал

$$\rho_0^2 = \min_{\sum l_i c_i = 1} \int_{t_0}^{t_1} (h_1(\tau) l_1 + h_2(\tau) l_2 + h_3(\tau) l_3)^2 d\tau ,$$

получим оптимальное значение $\omega_1^0(\tau)$, которое определяется формулой

$$\omega_1^0(\tau) = \frac{1}{\rho_0^2} h^0(\tau) ,$$

где $h^0(\tau) = h_1(\tau) l_1^0 + h_2(\tau) l_2^0 + h_3(\tau) l_3^0$, а l_i^0 – минимизирующие величины в ρ_0^2.

Явный вид функции $\omega_1^0(\tau)$ будет:

$$\omega_1^0(\tau) = \left(\frac{l_1^0 a_1}{\rho_0^2} + \frac{l_2^0 a_3}{\rho_0^2} + \frac{l_3^0 a_6}{\rho_0^2} \right) e^{\alpha(t_1 - \tau)} + \left(\frac{l_1^0 a_2}{\rho_0^2} + \frac{l_2^0 a_4}{\rho_0^2} + \frac{l_3^0 a_7}{\rho_0^2} \right) e^{\beta(t_1 - \tau)} + \frac{l_2^0 a_5}{\rho_0^2} .$$

Кафедра теоретической механики

Поступила 18.06.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бухгольц Н.Н.** Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969.
2. **Румянцев В.В.** – Космические исследования, 1968, т. 6, вып. 5.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
4. **Красовский Н.Н.** Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. 4 в кн. Малкина И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1969.
5. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

Վ. Ն. ԳՐԻՇԿՅԱՆ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊՏՏԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ԵՎ ՍՏԱԲԻԼԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է անշարժ կետի շուրջը պտտական շարժում կատարող պինդ մարմին, որի ներսում տեղադրված են թափանիվներ: Ցույց է տրված, որ համակարգը միայն գիրոսկոպիկ ուժերի միջոցով լրիվ ղեկավարելի չէ: Համակարգին ավելացված են թափանիվների պտույտից առաջացող դիսիպատիվ ուժեր: Գծային համակարգերի համար որոշված են օպտիմալ ղեկավարող և ստաբիլացնող ազդեցությունները:

V. N. GRISHKYAN

ABOUT STABILIZATION AND CONTROL OF A ROTATION OF A RIGID BODY

Summary

In this paper the problems of optimum stabilization and optimum traffic control of rigid body rotating around a motionless point with the help of flywheels is solved. It is shown, that the system is not quite controlled only by gyroscopic forces. The dissipative forces arising from the rotation of flywheels are added to the system. Linear systems are considered and for them optimum stabilizing and controlling operations are found.