Математика

УДК 512.1

Н. В. ШИРВАНЯН, В. Л. ШИРВАНЯН

О ВЛОЖЕНИИ ГРУППЫ ФИБОНАЧИ $F(2,9)$

Рассматривается группа Фибоначи $F(2,9)$, которая задается 9-ю образующими и 9-ю определяющими соотношениями. Приводится вложение группы $F(2,9)$ в группу $G =< a,b;\ a^9 = 1, ab = b^2a^2 >$.

Группа $F(2,9)$ – одна из класса групп Фибоначи [1] $F(r,n)$, которая задается 9-ю образующими $a_1, a_2,\dots,a_9$ и 9-ю определяющими соотношениями вида $a_{i+2} = a_{i+1}a_i$, $i = 1, 2, 3,\dots,9$, где индексы приведены по модулю 9. Иначе говоря, группа $F(2,9)$ задается следующим образом: $F(2,9) =< a_1, a_2,\dots,a_9;\ a_3 = a_2a_1,\ a_4 = a_3a_2,\ a_5 = a_4a_3,\ a_6 = a_5a_4,\ a_7 = a_6a_5,\ a_8 = a_7a_6,\ a_9 = a_8a_7,\ a_1 = a_9a_8,\ a_2 = a_1a_9 >$. Неизвестно, конечна эта группа или бесконечна. Для остальных $F(2,n)$ известно следующее [2, 3]: $F(2,3)$ конечна и имеет порядок 8, $F(2,4) -\!\!- \sim Z_4$ (Z_n – циклическая группа порядка n), $F(2,5) -\!\!- \sim Z_5$, $F(2,6)$ бесконечна, $F(2,7)$ бесконечна, $F(2,8)$ и $F(2,10)$ конечны, $F(2,n)$ бесконечны при всех $n \geq 11$.

Нами доказано, что группу G можно задать следующим образом [4]:

$$G_1 =< p, q;\ p^{18} = 1, q^9 = 1,\ pq^2 = qp^2(pq)^9 = 1 >.$$

Определим слова:

$$Z_1 = [p, q] = p^{-1}q^{-1}pq,\ Z_k = [Z_{k-1}, q], k \geq 2.$$

Лемма 1. В групе G_1 выполняются равенства

$$Z_k = q^{k-1}pq^{-k} = qZ_{k-1}q^{-1}, \quad k \geq 2. \tag{1}$$

Доказательство. Применим индукцию по k.

Имеем $Z_1 = p^{-1}q^{-1}pq = p^{-1}q^{-1}pq^2q^{-1} = p^{-1}q^{-1}pq^2q^{-1} = pq^{-1}$,

$$Z_2 = [z_1, q] = [pq^{-1}, q] = qp^{-1}q^{-1}pq^{-1}q = qz_1q^{-1}.$$

Пусть $Z_k = qZ_{k-1}q^{-1}$, тогда получим $Z_{k+1} = [Z_k, q] = [qZ_{k-1}q^{-1}, q] =$
$= qZ_{k-1}^{-1}q^{-1}q^{-1}qZ_{k-1}q^{-1}q = qZ_{k-1}^{-1}q^{-1}Z_{k-1}qq^{-1} = q[Z_{k-1}q]q^{-1} = qZ_kq^{-1}$.

Выпишем первые 9 слов из последовательности (1):

$$\begin{array}{lll} Z_1 = pq^{-1}, & Z_4 = q^3pq^{-4}, & Z_7 = q^6pq^{-7}, \\ Z_2 = qpq^{-2}, & Z_5 = q^4pq^{-5}, & Z_8 = q^7pq^{-8}, \\ Z_3 = q^2pq^{-3}, & Z_6 = q^5pq^{-6}, & Z_9 = q^8pq^{-9} = q^{-1}p. \end{array} \tag{2}$$

При $k > 9$ слово Z_k в G_1 равно одному из слов (2).

В группе G_1 возьмем подгруппу $F_1 = \langle Z_1, Z_2, ..., Z_9 \rangle$, порожденную словами $Z_1, Z_2, ..., Z_9$.

Лемма 2. В групе G_1 выполняются соотношения

$$\begin{array}{lll} Z_1Z_2 = Z_9, & Z_4Z_5 = Z_3, & Z_7Z_8 = Z_6, \\ Z_2Z_3 = Z_1, & Z_5Z_6 = Z_4, & Z_8Z_9 = Z_7, \\ Z_3Z_4 = Z_2, & Z_6Z_7 = Z_5, & Z_9Z_1 = Z_8. \end{array} \tag{3}$$

Доказательство. Проверим первое соотношение, остальные получатся аналогичным образом:

$$Z_1Z_2 = p^2q^{-2} = q^{-1}qp^2q^{-2} = q^{-1}pq^2q^{-2} = q^{-1}p = Z_9.$$

Отсюда следует , что в F_1 выполняются все соотношения группы $F(2,9)$ с точностью до перестановки образующих. Таким образом получаем , что $F_1 \sim F(2,9)$, т. е. верна

Теорема. $F(2,9)$ вкладывается в группу G_1.

Лемма 3. В группе G_1 выполняются соотношения сопряженности.

$$\begin{array}{lll} 1. & q^{-1}z_1q = Z_9, & p^{-1}z_1p = Z_9. \\ 2. & q^{-1}z_2q = Z_1, & p^{-1}z_2p = Z_9^{-1}Z_1Z_9. \\ 3. & q^{-1}z_3q = Z_2, & p^{-1}z_3p = Z_9^{-1}Z_2Z_9. \\ 4. & q^{-1}z_4q = Z_3, & p^{-1}z_4p = Z_9^{-1}Z_3Z_9. \\ 5. & q^{-1}z_5q = Z_4, & p^{-1}z_5p = Z_9^{-1}Z_4Z_9. \\ 6. & q^{-1}z_6q = Z_5, & p^{-1}z_6p = Z_9^{-1}Z_5Z_9. \\ 7. & q^{-1}z_7q = Z_6, & p^{-1}z_7p = Z_9^{-1}Z_6Z_9. \\ 8. & q^{-1}z_8q = Z_7, & p^{-1}z_8p = Z_9^{-1}Z_7Z_9. \\ 9. & q^{-1}z_9q = Z_8, & p^{-1}z_9p = Z_9^{-1}Z_8Z_9 = Z_1Z_9. \end{array}$$

Эти соотношения показывают, что F_1 – нормальная подгруппа группы G_1.

Арм. СХА *Поступило 13.06.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь (под редакцией Блощицина В.Я., Мерзлякова Ю.И., Чуркина В.А.). Новосибирск, 1986.
2. **Johnson D.L., Wamsley J.W., Wright D.** – Proc. London Math. Soc., 1974, v. 29, p. 577.
3. **Johnson D.L.** – Bull. London Math. Soc., 1974, v. 9, p. 101.
4. **Ширванян Н.В., Ширванян В.Л.** – Ученые записки ЕГУ, 2005, № 3, с. 141.

Ն. Վ. ՇԻՐՎԱՆՅԱՆ, Վ. Լ. ՇԻՐՎԱՆՅԱՆ

ՖԻԲՈՆԱՉԻԻ $F(2,9)$ ԽՄԲԻ ՆԵՐԴՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է Ֆիբոնաչիի $F(2,9)$ խումբը, որը տրվում է 9 ծնիչներով և որոշիչ առնչություններով: Հոդվածում բերվում է $F(2,9)$ խմբի ներդրումը $G=<a,b;\ a^9=1, ab=b^2a^2>$ խմբի մեջ:

N. V. SHIRVANYAN, V. L. SHIRVANYAN

AN IMBEDDING OF FIBONACCI GROUP $F(2,9)$

Summary

In this paper we give imbedding of group Fibonacci $F(2,9)$, given by 9 generators and 9 defining relations in the group $G=<a,b;\ a^9=1, ab=b^2a^2>$.