ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517.948.25

Т. Н. АРУТЮНЯН, Г. Г. СААКЯН

СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРАКА

Доказывается теорема о существовании собственных значений для одной двупараметрической краевой задачи Дирака.

При исследованиях многопараметрических спектральных задач (см., напр., [1–7]) безусловно существенным является доказательство существования собственных значений для рассматриваемых задач. В данной статье приводится доказательство существования собственных значений для одной двупараметрической задачи Дирака, которое с успехом можно применить и для доказательства существования собственных значений в различных многопараметрических задачах.

Рассматривается следующая двупараметрическая задача Дирака на собственные значения:

$$\begin{cases} S\dfrac{dy^r(x_r)}{dx_r}+G_r(x_r)y^r(x_r)=\sum\limits_{s=1}^{2}\lambda_s A_{rs}(x_r)y^r(x_r), \quad 0<x_r<\ell_r, & (1)\\ y^r(\ell_r)=\rho_r y^r(0), \quad r=1,2, & (2)\end{cases}$$

где ρ_r – комплексные числа, $|\rho_r|=1$, $G_r(x_r)$, $A_{rs}(x_r)\,(r,s=1,2)$ – непрерывные на $[0,\ell_r]$ вещественные симметричные матрицы порядка 2×2, λ_1,λ_2 – комплексные параметры и $y^r(x_r)=(y_1^r(x_r),y_2^r(x_r))$ – C^2-значная искомая вектор-функция,

$$S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Приведем некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $H=L^2[0,\ell_1]\otimes L^2[0,\ell_2]$,

$$A_0(x)=A_{11}(x_1)\otimes A_{22}(x_2)-A_{12}(x_1)\otimes A_{21}(x_2) \tag{4}$$

(по поводу тензорных произведений пространств и матриц см., напр., [1]), Δ_0 – оператор, порожденный матрицей $\Delta_0(x)$ и действующий в H по формуле $\Delta_0 h = \Delta_0(x)h(x)$.

Предположим, что имеет место *условие определенности* (см., напр., [4])

$$\Delta_0 \geq 0, \tag{5}$$

играющее существенную роль в многопараметрических спектральных задачах.

Определение 1. Пусть $f, g \in H$. Комплекснозначная функция $\phi(f,g)$ от двух переменных называется полуторалинейной формой, если она удовлетворяет следующим свойствам:

$$\phi(g, g_1 + g_2) = \phi(g, g_1) + \phi(g, g_2), \quad \phi(g_1 + g_2, g) = \phi(g_1, g) + \phi(g_2, g),$$

$$\phi(cg_1, g_2) = c\phi(g_1, g_2), \quad \phi(g_1, cg_2) = \bar{c}\phi(g_1, g_2)$$

для любых $g, g_1, g_2 \in H$ и $c \in C$.

Определение 2. Полуторалинейная форма $\phi(f,g)$ называется эрмитовой формой, если $\phi(f,g) = \overline{\phi(g,f)}$ для любых $f, g \in H$.

В частности, трехзначная форма $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$ называется эрмитовой, если каждая из полуторалинейных форм ϕ_k $(k = 0,1,2)$ является эрмитовой.

Определение 3. Вектор h из H называется собственным вектором трехзначной эрмитовой формы ϕ, соответствующим собственному значению $\lambda = (1, \lambda_1, \lambda_2)$, если для любого h' из H имеет место равенство

$$\phi(h, h') = (\phi_0(h,h'), \lambda_1\phi_0(h,h'), \lambda_2\phi_0(h,h')) = (1, \lambda_1, \lambda_2)\phi_0(h,h').$$

Определение 4. Если для данного $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in C^2$ система (1) *имеет решение $\left(y^1(x_1,\lambda), y^2(x_2,\lambda)\right) \neq (0,0)$, удовлетворяющее условиям* (2), *то λ называется собственным значением, а тензор $y^1(x_1,\lambda) \otimes y^2(x_2,\lambda)$ – собственной функцией задачи* (1)–(2), *соответствующей собственному значению λ.*

Запишем рассматриваемую задачу Дирака в виде

$$D_r y^r = \left(\lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2}\right) y^r, \quad y^r(l_r) = \rho_r y^r(0), \tag{6}$$

где

$$D_r = S\frac{d}{dx_r} + G_r, \quad r = 1,2. \tag{7}$$

Область определения $D(D_r)$ оператора Дирака D_r состоит из вектор-функций $y^r(x_r) = \left(y_1^r(x_r), y_2^r(x_r)\right)$, удовлетворяющих условиям:

1. $y^r(x_r) \in AC[0,\ell_r] \subset L^2[0,\ell_r]$.

2. $D_r y^r \equiv S\dfrac{dy^r}{dx_r} + G_r(x_r)y^r \in L^2[0,\ell_r]$, $r = 1,2$. $\quad (8)$

3. $y^r(x_r)$ удовлетворяет граничным условиям (2).

Определенные таким образом операторы D_r с областями определения $D(D_r)$, всюду плотными в пространствах $H_r = L^2[0,\ell_r]$, являются самосопряженными и имеют компактные резольвенты [9, 10], причем, не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $0 \in \rho(D_r)$ (резольвентное множество оператора D_r). Известно также (см., напр., [10]), что собственные значения операторов D_r образуют неограниченные ни снизу, ни сверху последовательности t_k^r $(k \in Z)$, причем $t_k^r \to \pm\infty$ при $k \to \pm\infty$ $(r = 1,2)$. Для каждого самосопряженного оператора D_r пронумеруем собственные значения в порядке возрастания их модулей:

$$\left|t_1^r\right| \le \left|t_2^r\right| \le \ldots, \qquad r = 1,2.$$

Пусть H_{nr} – подпространства в H_r, натянутые на собственные функции оператора D_r, соответствующие собственным значениям $t_1^r, t_2^r, \ldots, t_n^r$ $(r = 1,2)$, а P_{nr} – операторы проектирования пространства H_r на подпространства H_{nr} $(H_{nr} = P_{nr}H_r)$. Положим $X_n = H_{n1} \otimes H_{n2}$, $H = H_1 \otimes H_2$, $n = 1,2$. Заметим, что каждое X_n конечномерно $(\dim X_n = \dim H_{n1} \dim H_{n2} = n^2)$ и $\dim X_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $v_{rn}(x_r)$ $(n = 1,2,\ldots)$ есть нормированные собственные функции оператора D_r $(r = 1,2)$, пронумерованные в соответствии с вышеизложенной нумерацией собственных значений. Теоремы о полноте и разложении по собственным функциям самосопряженного оператора (в нашем случае D_r, $r = 1,2$) утверждают, что если $f_r \in L^2[0,\ell_r]$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(f_r, v_{rn})v_{rn}$ – ряд Фурье функции f_r по системе $\{v_{rn}(x_r)\}_{n=1}^{\infty}$, то при $n \to \infty$

$$\left\| f_r - \sum_{r=1}^{n}(f_r, v_{rn})v_{rn} \right\|_{L^2} = \left\| f_r - P_{nr}f_r \right\|_{L^2} \to 0. \tag{9}$$

Пусть $h = h_1 \otimes h_2$, $h' = h_1' \otimes h_2'$, $h_r, h_r' \in D(D_r)$. Определим на $(D(D_1) \otimes D(D_2)) \times (D(D_1) \otimes D(D_2))$ трехзначную форму $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)$, где

$$\phi_0(h,h') = \det\begin{vmatrix} (A_{11}h_1, h_1')_1 & (A_{12}h_1, h_1')_1 \\ (A_{21}h_2, h_2')_2 & (A_{22}h_2, h_2')_2 \end{vmatrix}, \phi_1(h,h') = -\det\begin{vmatrix} (A_{12}h_1, h_1')_1 & (D_1h_1, h_1')_1 \\ (A_{22}h_2, h_2')_2 & (D_2h_2, h_2')_2 \end{vmatrix},$$

$$\phi_2(h,h') = \det\begin{vmatrix} (A_{11}h_1, h_1')_1 & (D_1h_1, h_1')_1 \\ (A_{21}h_2, h_2')_2 & (D_2h_2, h_2')_2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

(здесь $(\cdot,\cdot)_r$ означает скалярное произведение в пространстве H_r $(r = 1,2)$).

Так как операторы D_r линейные и самосопряженные, а матрицы $A_{rs}(r,s=1,2)$ симметричные, то каждая из форм $\phi_k(k=0,1,2)$ будет эрмитовой. Следовательно, эрмитовой будет и форма ϕ. Заметим, что $\phi_0(h,h')=(\Delta_0 h,h')$, и в силу условия определенности (5) ϕ_0 будет положительно определена в H.

Если в определении ϕ положить $h_r, h'_r \in H_{nr}$ и заменить $A_{rs}h_r$ на $P_{nr}A_{rs}h_r$, то таким образом мы определим форму $\phi^{(n)}$ на $X_n \times X_n$.

Так как ϕ_0 положительно определена в H, то $\phi_0^{(n)}$ будет положительно определена в X_n.

Следующая теорема, по существу доказанная П. Брауном [6], выражает связь между собственными значениями и векторами формы ϕ и собственными значениями и векторами рассматриваемой задачи (1)–(2).

Теорема 1. Если $h=h_1\otimes h_2$ *– собственный вектор задачи* (1)–(2) *(соответственно* ϕ*), соответствующий собственному значению* (λ_1,λ_2) *(соответственно* $(1,\lambda_1,\lambda_2)$*), тогда он является собственным вектором* ϕ *(соответственно задачи* (1)–(2)*) с собственным значением* $(1,\lambda_1,\lambda_2)$ *(соответственно* (λ_1,λ_2)*).*

Заметим, что согласно теореме 1 собственные векторы и собственные значения формы $\phi^{(n)}$ в пространстве X_n соответствуют собственным векторам и собственным значениям задачи (1)–(2), рассматриваемой в пространстве X_n.

С другой стороны, применительно к нашему случаю имеет место (см. [1], теорема 7.9.1)

Теорема 2. Если Δ_0 *– оператор положительного типа в пространстве* X_n*, то для каждого* $\phi^{(n)}$ *существует множество разложимых тензоров* $h_n^{(m)}=h_{1n}^{(m)}\otimes h_{2n}^{(m)}$ $(m=1,2,...,n^2)$ *из* X_n*, которые являются собственными векторами* $\phi^{(n)}$*, образующими базис* X_n*, ортогональными относительно* $\phi_0^{(n)}$ *и нормированными в смысле*

$$\phi_0^{(n)}(h_n^{(m)},h_n^{(m)})=1, \quad m=1,2,...,n^2.$$

Далее, воспользуемся известной (см. [1]) процедурой построения собственных значений, используемой в многопараметрических задачах.

Пусть $(1,\lambda_{1n}^{(m)},\lambda_{2n}^{(m)})$ $(m=1,2,...,n^2)$ – собственные значения $\phi^{(n)}$, повторяющиеся с учетом кратности. Для каждого n упорядочим пары $(\lambda_{1n}^{(m)},\lambda_{2n}^{(m)})$ так, чтобы суммы

$$\sum_{s=1}^{2}\left|\lambda_{sn}^{(m)}\right|^2 \qquad (11)$$

не убывали по m при фиксированном значении n, а в случае, если они совпадут для двух или более различных собственных значений, расположим их лексикографически, т. е. по возрастанию чисел sn, составленных из номеров s и n.

Рассмотрим вопрос сходимости для последовательности

$$\lambda_n^{(m)} = \left\{ (\lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)}) \right\} \tag{12}$$

при $n \to \infty$ для каждого фиксированного m.

Пусть $m = 1$. Если последовательность $\left\{ (\lambda_{1n}^{(1)}, \lambda_{2n}^{(1)}) \right\}$ ограничена (т.е. для всех n величины (11) ограничены), то из нее извлечем сходящуюся подпоследовательность; если она не ограничена (одна или обе компоненты (12) стремятся к ∞), тогда мы можем выбрать подпоследовательность, стремящуюся к ∞. Таким образом мы можем выбрать последовательность номеров n, $n_{11} < n_{12} < \ldots$ так, чтобы при $m = 1$ соответствующая подпоследовательность последовательности (12) сходилась или стремилась к ∞. Далее, из $n_{11}, n_{12}, \ldots$ выберем подпоследовательность $n_{21} < n_{22} < \ldots$ так, чтобы вышеизложенное было бы верно для (12) и при $m = 2$. Продолжим этот процесс. Тогда диагональная последовательность $n_{11}, n_{22}, \ldots$ будет обладать следующим свойством: для каждого m соответствующие подпоследовательности последовательностей (12) будут сходиться или стремиться к ∞.

Возможны два случая: либо когда n пробегает указанную выше диагональную последовательность для каждого m, соответствующие подпоследовательности последовательности (12) сходятся, либо найдется такое m_0, что при $m > m_0$ последовательность (12) стремится к ∞ в силу способа нумерации собственных значений. Чтобы не загромождать статью формулами, будем считать, что в первом случае при каждом m сама последовательность (12) сходится к конечному пределу, который будем называть *предельным собственным значением.*

Для доказательства существования собственных значений нам понадобится (см. [8])

Теорема 3. Если оператор Δ_0 удовлетворяет условию $(\Delta_0 h, h) \geq \gamma \|h\|^2$ (для любого элемента $h \in H$) и для какого-то m существует предельное собственное значение, то оно является собственным значением задачи (1)–(2).

Имеет место

Теорема 4. При выполнении условия $(\Delta_0 h, h) \geq \gamma \|h\|^2, \gamma > 0$ (для любого элемента $h \in H$), задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно собственное значение.*

Доказательство. Пусть $P_n = P_{n1} \otimes P_{n2}$, $f^n = P_{n1} f_1 \otimes P_{n2} f_2$. Тогда ясно, что $f^n \in X_n$. Покажем, что если $f_m \to f_r$ в H_r при $n \to \infty$, то $P_{rn} f_m \to f_r$.

Действительно, имеем

$$P_{rn}f_{rn}-f_r=(P_{rn}f_r-f_r)+P_{rn}(f_{rn}-f_r).$$

Первое выражение справа стремится к нулю при $n\to\infty$, так как согласно (9) $P_{rn}f_r\to f_r$ при $n\to\infty$. Второе слагаемое также стремится к нулю, так как $f_{rn}\to f_r$ и $\|P_{rn}\|=1$. Следовательно, $P_{rn}f_{rn}\to f_r$ по норме пространства H_r. Отсюда вытекает, что при $n\to\infty$

$$f^n\to f. \tag{13}$$

Докажем, что если $f^n\to f$ в H, то

$$\phi_0^{(n)}(f^n,f^n)\to\phi_0(f,f). \tag{14}$$

Действительно, пусть $f^n=f_1^n\otimes f_2^n$, $f=f^1\otimes f^2$. Тогда имеем

$$\phi_0^{(n)}\left(f^n,f^n\right)=\det\begin{vmatrix}\left(P_{n1}A_{11}f_1^n,f_1^n\right) & \left(P_{n1}A_{12}f_1^n,f_1^n\right)\\ \left(P_{n2}A_{21}f_2^n,f_2^n\right) & \left(P_{n1}A_{22}f_1^n,f_2^n\right)\end{vmatrix}.$$

В силу соотношения (14) каждая из компонент определителя $(P_{nr}A_{rs}f_r^n,f_r^n)$ будет стремиться к $(A_{rs}f^r,f^r)$ при $n\to\infty$, откуда и следует требуемая сходимость.

Пусть теперь $f=f_1\otimes f_2$ – некоторый ненулевой элемент из H, $\phi_0(f,f)=a$, $f^n=P_{n1}f_1\otimes P_{n2}f_2$. Тогда ясно, что $f^n\in X_n$. Так как $f^n\to f$ и $f\neq 0$, то найдется такое n_1, что для $n>n_1$ будем иметь $f^n\neq 0$. Предположим, что $\phi_0^{(n)}(f^n,f^n)=a_n$. Так как $\phi_0^{(n)}(f^n,f^n)\to\phi_0(f,f)$ и $\phi_0(f,f)=$ $=(A_0f,f)\neq 0$, то $a_n\neq 0$ для $n>n_1$. Предположим теперь, что ни для какого m не существует *предельного собственного значения*, т.е. последовательности $\lambda_{sn}^{(m)}$ для любого m стремятся к бесконечности. Зафиксируем $m=1$ и для заданного достаточно большого M найдем такой номер n_0, что при $n>n_0$ $\max\left(\left|\lambda_{1n}^{(1)}\right|,\left|\lambda_{2n}^{(1)}\right|\right)>M$.

В силу принципа упорядоченности пар $(\lambda_{sn}^{(m)},\lambda_{sn}^{(m)})$ указанное выше неравенство будет справедливым и для всех пар $(\lambda_{sn}^{(m)},\lambda_{sn}^{(m)})$ при $n>n_0$, т. е.

$$\max\left(\left|\lambda_{1n}^{(m)}\right|,\left|\lambda_{2n}^{(m)}\right|\right)>M \tag{15}$$

при $n>n_0$. Возьмем теперь $\tilde n=\max(n_0,n_1)+1$.

Выберем на плоскости некоторую конечную область S, содержащуюся в квадрате $|\lambda_1|\le M$, $|\lambda_2|\le M$.

Известно (см. [10], теорема 7.9.2), что если $\{u_{nm}\}-\phi_0^{(n)}$ – ортонормированная система собственных функций $\varphi^{(n)}$, то имеет место равенство

Парсеваля

$$\phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = \sum_m \left|\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})\right|^2 \qquad (16)$$

для любого $f^n \in X_n$. Разделим сумму в правой части (16) на две суммы соответственно тому, попадут ли собственные значения в область S или нет:

$$\sum_m \left|\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})\right|^2 = \sum_{\lambda\in S} \left|\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})\right|^2 + \sum_{\lambda\notin S} \left|\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})\right|^2 . \qquad (17)$$

Первая сумма в правой части будет пуста, так как для выбранного $\tilde{n}$ все точки $(\lambda_{1n}^{(m)}, \lambda_{2n}^{(m)})$ в силу соотношения (15) окажутся вне области S. Согласно проведенным выше рассуждениям, вторую сумму можно сделать достаточно малой при достаточно большом M. Тогда мы получим, что

$$a_n = \phi_0^{(n)}(f^n, f^n) = \sum_m \left|\phi_0^{(n)}(f^n, u_{nm})\right|^2 < \delta_n ,$$

где $\delta_n \to 0$. Полученное неравенство содержит противоречие, т.к. $a_n \to a \neq 0$, что и доказывает существование какого-то *предельного собственного значения*. Согласно теореме 3, это *предельное собственное значение* будет являться собственным значением задачи (1)–(2).

Теорема 4 доказана.

Авторы выражают благодарность профессору И.Г. Хачатряну, обратившему внимание на актуальность рассматриваемой проблемы, за ценные указания в процессе ее решения.

ЕГУ, АрГУ *Поступила 31.05.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Atkinson F.V.** Multiparameter Eigenvalue Problems. V.1. New York and London: Academic Press, 1972.
2. **Faierman** – J. Diff. Eq., 1969, v. 5, p. 197–213.
3. **Sleeman B.D.** Some aspects of Multi-parameter spectral theory. Scotland: Dep. Math. Univ. 1970, p. 81–94.
4. **Sleeman B.D.** – Bull. Inst. Poli. Jazzy, 1971, v. 17, № 21, p. 51–60.
5. **Browne P.J.** – J. Math. Anal. and Applications, 1972, v. 38, p. 553–568.
6. **Browne P.J.** – J. Math. Anal. and Appl., 1977, v. 60, p. 259–273.
7. **Browne P.J.** – Lect. Notes Math., 1982, v. 964, p. 95–109.
8. **Sleeman B.D.** – J. Math. Anal. and Appl., 1978, v. 65, p. 511–530.
9. **Костюченко А.Г., Саргсян И.С.** Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.
10. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Գ. Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԴԻՐԱԿԻ ՄԻ ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱՆՈՑ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է սեփական արժեքների գոյության թեորեմը Դիրակի մի երկպարամետրանոց եզրային խնդրի համար:

T. N. HARUTUNYAN, G. H. SAHAKYAN

THE EXISTENCE OF THE EIGENVALUES FOR DIRAC'S TWO-PARAMETER BOUNDARY-VALUE PROBLEM

Summary

The existence of eigenvalues for Dirac's two-parameter boundary-value problem is proved.