ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

А. А. МАМИКОНЯН

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

В данной работе рассматривается краевая задача с начальным условием

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+Bu=f, \\ u(0)=u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma=0, |\gamma|\le m, \end{cases}$$

и нелинейными дифференциальными операторами A и B следующего вида: $Au=\sum\limits_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha\left(x,t,D^\gamma u\right)$, $Bu=\sum\limits_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha B_\alpha\left(x,t,D^\gamma u\right)$, $|\gamma|\le m$. Мы получаем условия для функций $A_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)$ и $B_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)$, при выполнении которых доказывается существование и единственность решения этой задачи в пространствах $L^p(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m)$ для $p\ge 2$.

Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+Bu=f, \\ u(0)=u_0, \\ D^\gamma u|_\Gamma=0, |\gamma|\le m, \end{cases} \tag{1}$$

где нелинейные операторы A и B имеют следующий вид:

$$Au=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha\left(x,t,D^\gamma u\right), \tag{2}$$

$$Bu=\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha B_\alpha\left(x,t,D^\gamma u\right),\ |\gamma|\le m, \tag{3}$$

и действуют в пространстве $L^p(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m(\Omega))$, $\Omega\subset R^n$, $\Gamma=\partial\Omega$ – достаточно гладкая граница Ω.

При линейных операторах A и B эта задача рассматривалась во многих работах С.Л. Соболева, Р.С. Александряна и их учеников (см., напр., [1, 2]). Случай, когда A – линейный оператор, а B – нелинейный, рассмотрен в работах [3–5]. Там же рассмотрен случай, когда операторы A и B имеют вырождения. L_2, теория задачи (1), в общем случае рассматривалась в [6]. В данной работе рассматривается вопрос о существовании и единственности решения задачи (1) при нелинейных операторах A и B вида (2), (3) в пространствах $L^p(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m)$, $p \ge 2$.

1. Пусть X – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Через $\langle f,u \rangle$ обозначим действие $f \in X^*$ на $u \in X$, а нормы в X и X^* – соответственно через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$.

Определение 1. Оператор $A: X \to X^*$ называется

• радиально непрерывным, если $\forall u,v \in X$ вещественная функция $\varphi(s) = \langle A(u+sv),v \rangle$ непрерывна на $[0,1]$;

• липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная M, что

$$\|Au - Av\|_* \le M\|u-v\| \quad \forall u,v \in X.$$

Определение 2. Имеем $u,v \in X$. Оператор $A: X \to X^*$ называется

• монотонным, если $\langle Au - Av, u-v \rangle \ge 0$;

• сильно монотонным, если $\langle Au - Av, u-v \rangle \ge m\|u-v\|^2, m > 0$.

Пусть $S = [0,T]$, $T > 0$, а X – некоторое линейное пространство. Через $(S \to X)$ обозначим пространство всех функций, действующих из S в X.

Определение 3. Пусть X_1, X_2 – линейные пространства. Отображение $G: D(G) \to (S \to X_2)$, $D(G) \subset (S \to X_1)$, называется оператором Вольтерры, если из равенства $u(s) = v(s)$ для почти всех $s \in [0,t], t \in S$, следует, что $(Gu)(s) = (Gv)(s)$ для почти всех $s \in [0,t], t \in S$.

Нетрудно доказать (см., напр., [6]), что для радиально непрерывного оператора Вольтерры существует обратный оператор $A^{-1}: X^* \to X$, который является липшиц-непрерывным оператором. Также нетрудно убедиться, что (C,k)-нормы, определенные для $u \in C(S,X)$ формулой $\|u\|_{C,k} = \sup\limits_{t \in S}\left\{e^{-kt}\|u(t)\|\right\}$, $k \ge 0$, эквивалентны норме $\|u\| = \sup\limits_{t \in S}\|u(t)\|$ в $C(S,X)$.

Лемма 1. Если оператор Вольтерры $G: L^p(S,X) \to L^p(S,X)$ липшиц-непрерывен, то $\forall u,v \in L^p(S,X)$ и $\forall t \in S$ имеет место $\|Gu - Gv\|_{L^p([0,t],X)} \le L\|u-v\|_{L^p([0,t],X)}$ (постоянная L не зависит от t).

Доказательство. Пусть $t \in S$. Положим

$$u_t(s)=\begin{cases}u(s), 0\le s\le t,\\ 0, t<s\le T,\end{cases}\qquad v_t(s)=\begin{cases}v(s), 0\le s\le t,\\ 0, t<s\le T.\end{cases}$$

Так как G – оператор Вольтерры, то

$$\|Gu-Gv\|_{L^p([0,t],X)}\le\|Gu_t-Gv_t\|_{L^p(S,X)}\le L\|u_t-v_t\|_{L^p(S,X)}\le L\|u-v\|_{L^p([0,t],X)},$$

то есть лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующую задачу Коши:

$$\begin{cases}u'+Gu=f,\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{4}$$

Теорема 1. Пусть оператор Вольтерры $G:L^p(S,X)\to L^p(S,X)$ липшиц-непрерывен. Тогда $\forall u_0\in X$ и $\forall f\in L^p(S,X)$ задача (4) имеет единственное решение.

Доказательство. Для начала заметим, что если $u\in L^p(S,X)$ удовлетворяет уравнению $u'+Gu=f$ для $f\in L^p(S,X)$ и $G:L^p(S,X)\to L^p(S,X)$, то $u'=f-Gu\in L^p(S,X)$. Отсюда следует (см. [6], теоремы 1.6 и 1.7, гл. IV), что $u\in C(S,X)$ и почти всюду сильно дифференцируема, а также что задача (4) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t)=u_0-\int_0^t((Gu)(s)-f(s))ds\quad\forall t\in S.$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Для $u\in C(S,X)$ определим отображение U формулой $(Uu)(t)=u_0-\int_0^t((Gu)(s)-f(s))ds\ \ \forall t\in S$.

Из непрерывной зависимости неопределенного интеграла Бохнера от интегрируемой функции следует, что $U:C(S,X)\to C(S,X)$. Согласно лемме 1, $\forall u,v\in C(S,X)$

$$\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\|\le\int_0^t\|(Gu)(s)-(Gv)(s)\|ds\le T^{1/q}\left(\int_0^t\|(Gu)(s)-(Gv)(s)\|^p ds\right)^{1/p}=$$

$$=T^{1/q}\|Gu-Gv\|_{L^p([0,t],X)}\le LT^{1/q}\left(\int_0^t\|u(s)-v(s)\|^p ds\right)^{1/p}=LT^{1/q}\left(\int_0^t\|u(s)-v(s)\|^p e^{-pks}e^{pks}ds\right)^{1/p}\le$$

$$\le LT^{1/q}\|u-v\|_{C,k}\left(\int_0^t e^{pks}ds\right)^{1/p}=LT^{1/q}\|u-v\|_{C,k}\left(\frac{e^{pkt}-1}{pk}\right)^{1/p}.$$

Отсюда следует, что $\forall t\in S$

$$\|(Uu)(t)-(Uv)(t)\|e^{-kt}\le L\frac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}}\left(1-e^{-kpt}\right)^{1/p}\|u-v\|_{C,k}\le L\frac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}}\left(1-e^{-kpT}\right)^{1/p}\|u-v\|_{C,k}.$$

Подберем k таким образом, чтобы $L\dfrac{T^{1/q}}{(pk)^{1/p}} \le 1$, то есть $k \ge \dfrac{L^p T^{p/q}}{p}$. Тогда будем иметь $\|Uu - Uv\|_{C,k} \le \lambda \|u - v\|_{C,k}$, где $0 < \lambda < 1$.

Согласно принципу неподвижной точки Банаха, существует единственный элемент $u \in C(S,X)$, для которого $u = Uu$, т.е.

$$u(t) = u_0 - \int_0^t \big((Gu)(s) - f(s)\big)ds \quad \forall t \in S .$$

Следовательно u является решением задачи (4).

Теорема доказана.

Замечание 1. Определяемое соответствие $\{u_0, f\} \to \{u, u'\}$ непрерывно как отображение $X \times L^p(S,X) \mapsto C(S,X) \times L^p(S,X)$.

Доказательство. Пусть функции $u_1, u_2 \in C(S,X)$ удовлетворяют при всех $t \in S$ соотношениям

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_{01} - \int_0^t \big((Gu_1)(s) - f_1(s)\big)ds, \\ u_2(t) &= u_{02} - \int_0^t \big((Gu_2)(s) - f_2(s)\big)ds. \end{aligned} \tag{5}$$

С учетом леммы 1 и в результате несложных оценок получаем:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \le K_1\left(\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|\right)^2 + 2L^2 T \int_0^T \|u_1(s) - u_2(s)\|^2 ds,$$

где постоянная K_1 зависит от T. Применив лемму Грануолла (см., напр., [6], лемма 1.3), получаем $\|u_1 - u_2\|_{C(S,X)} \le K_2\left(\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|\right)$. Из (5) вытекает, что почти всюду на S $\|u_1'(t) - u_2'(t)\| \le \|(Gu_1)(t) - (Gu_2)(t)\| + \|f_1(t) - f_2(t)\|$. Отсюда с помощью несложных оценок получаем: $\|u_1' - u_2'\|_{L^p(S,X)} \le K_3(\|u_1 - u_2\|_{C(S,X)} + \|f_1 - f_2\|_{L^p(S,X)})$.

Следовательно, $\|u_1 - u_2\|_{C(S,X)} + \|u_1' - u_2'\|_{L^p(S,X)} \le K(\|u_{01} - u_{02}\| + \|f_1 - f_2\|_{L^p(S,X)})$.

Замечание доказано.

2. Вернемся к задаче (1). Предположим, что функции $A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ и $B_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ определены для всех ξ_γ, непрерывно дифференцируемы по всем ξ_γ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left|A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)\right| \le C_1 \sum_{|\gamma| \le m} |\xi_\gamma|^{p-1}, \quad C_1 > 0, \tag{6}$$

$$\sum_{|\gamma| \le m} \left|\frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_\gamma}\eta_\gamma\right| \le C_2 \sum_{|\gamma| \le m} |\xi_\gamma|^{p-2} |\eta_\gamma| \quad \forall \xi_\gamma, \eta_\gamma, |\gamma| \le m, C_2 > 0, \tag{7}$$

$$\left|B_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)\right| \le c\sum_{|\gamma|\le m}\left|\xi_\gamma\right|^{p-1}, \qquad c>0, \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial B_\alpha}{\partial \xi_\gamma}\right| \le c_1, \qquad c_1>0, \tag{9}$$

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} A_{\alpha\beta}(x,t,\xi_\gamma)\eta_\alpha\eta_\beta \ge c_2\sum_{|\alpha|=m}\left\|\xi_\alpha\right\|^{p-2}\eta_\alpha^2, \quad c_2>0. \tag{10}$$

Лемма 2. Пусть функции $A_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)$ определены для всех ξ_γ, непрерывно дифференцируемы по всем ξ_γ и выполнены условия (6) и (7). Тогда оператор $A: L^p\left(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m\right)\to L^q\left(0,T,W_q^{-m}\right)$ радиально непрерывен.

Доказательство. $\forall s_1,s_2\in[0,1]$ оценим разность:

$$\left|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)\right| = \left|\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^T\int_\Omega\Big(A_\alpha(x,t,D^\gamma(u+s_1v))-A_\alpha(x,t,D^\gamma(u+s_2v))\Big)D^\alpha v\,dxdt\right| =$$

$$=\left|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial A_\alpha(x,t,D^\gamma(u+s_2v)+\tau D^\gamma(s_1-s_2)v)}{\partial\xi_\gamma}D^\gamma((s_1-s_2)v)D^\alpha v\,dxdtd\tau\right| \le$$

$$\le C_2\left|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\int_0^1\left|D^\gamma(u+s_2v)+\tau D^\gamma(s_1-s_2)v\right|^{p-2}D^\gamma((s_1-s_2)v)D^\alpha v\,dxdtd\tau\right| \le$$

$$\le C_3\left|s_1-s_2\right|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left[\left|D^\gamma(u+s_2v)\right|^{p-2}\left|D^\gamma v\right|\left|D^\alpha v\right|+\left|D^\gamma v\right|^{p-1}\left|D^\alpha v\right|\right]dxdt \le$$

$$\le C_4\left|s_1-s_2\right|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left[\left|D^\gamma v\right|\left(\left|D^\gamma(u+s_2v)\right|^{p-1}+\left|D^\alpha v\right|^{p-1}\right)+\left|D^\gamma v\right|^{p-1}\left|D^\alpha v\right|\right]dxdt =$$

$$= C_4\left|s_1-s_2\right|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left[\left|D^\gamma v\right|\left|D^\gamma(u+s_2v)\right|^{p-1}+\left|D^\gamma v\right|\left|D^\alpha v\right|^{p-1}+\left|D^\gamma v\right|^{p-1}\left|D^\alpha v\right|\right]dxdt.$$

Теперь оценим первое слагаемое:

$$\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left|D^\gamma v\right|\left|D^\gamma\left(u+s_2v\right)\right|^{p-1}dxdt = \int_0^T\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega\left|D^\gamma v\right|\left|D^\gamma\left(u+s_2v\right)\right|^{p-1}dxdt \le$$

$$\le\int_0^T\left(\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega\left|D^\gamma v\right|^p dx\right)^{1/p}\left(\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega\left|D^\gamma\left(u+s_2v\right)\right|^{(p-1)q}dx\right)^{1/q}dt \le C\|u\|\left\|u+s_2v\right\|^{p-1}\le M_1.$$

Оценим второе слагаемое:

$$\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left|D^\gamma v\right|\left|D^\alpha v\right|^{p-1}dxdt = \int_0^T\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\left|D^\gamma v\right|\left|D^\alpha v\right|^{p-1}dxdt \le$$

$$\le\int_0^T\int_\Omega\sum_{|\gamma|\le m}\left|D^\gamma v\right|\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha v\right|^{p-1}dxdt \le C\int_0^T\left(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega\left|D^\alpha v\right|^{(p-1)q}dx\right)^{1/q}dt\cdot\int_0^T\left(\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega\left|D^\gamma v\right|^p dx\right)^{1/p}dt =$$

$$= C\|v\|^{p-1}\|v\| \le M_2.$$

Третье слагаемое оценивается аналогично. В результате получаем

$$|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)| \le |s_1-s_2|(M_1+M_2+M_3).$$

Следовательно, функция $\varphi(s)$ непрерывна.

Лемма 3. Пусть функции $B_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ определены для всех ξ_γ, непрерывно дифференцируемы по всем ξ_γ и выполнены условия (8) и (9). Тогда оператор $B: L^p\left(0,T,\overset{0}{W}{}^m_p\right) \to L^q\left(0,T,W_q^{-m}\right)$ липшиц-непрерывен.

Доказательство.

$$\|Bu-Bv\| = \sup_{\|w\|\le 1}|\langle Bu-Bv,w\rangle| = \sup_{\|w\|\le 1}\left|\sum_{|\alpha|\le m}\int_0^T\int_\Omega\left[B_\alpha(x,t,D^\gamma u)-B_\alpha(x,t,D^\gamma v)\right]D^\alpha w\,dxdt\right| =$$

$$= \sup_{\|w\|\le 1}\left|\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial B_\alpha(x,t,D^\gamma v+\tau D^\gamma(u-v))}{\partial\xi_\gamma}D^\gamma(u-v)D^\alpha w\,dxdtd\tau\right| \le$$

$$\le c_1\sup_{\|w\|\le 1}\sum_{|\alpha|\le m}\sum_{|\gamma|\le m}\int_0^T\int_\Omega|D^\gamma(u-v)||D^\alpha w|\,dxdt = c_1\sup_{\|w\|\le 1}\int_0^T\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le m}|D^\alpha w|\sum_{|\gamma|\le m}|D^\gamma(u-v)|\,dxdt \le$$

$$\le c_1\sup_{\|w\|\le 1}c_2\|w\|\|u-v\| = c_3\|u-v\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 (см. [7]). Пусть функции $A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ определены для всех ξ_γ, дифференцируемы по всем ξ_γ и имеет место неравенство (10), где $A_{\alpha\beta}(x,t,\xi_\gamma) = \dfrac{\partial A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)}{\partial\xi_\beta}$, $|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le m$. Тогда оператор A является сильно монотонным.

Лемма 5. Пусть для функций $A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ существуют $\dfrac{\partial A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)}{\partial\xi_\gamma}$, $|\alpha|,|\gamma|\le m$. Тогда A – оператор Вольтерры.

Доказательство. Пусть $u(s)=v(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$. Тогда для любой $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ будем иметь:

$$\int_0^t D^\alpha u(s)\varphi(s)ds = (-1)^{|\alpha|}\int_0^t u(s)D^\alpha\varphi(s)ds = (-1)^{|\alpha|}\int_0^t v(s)D^\alpha\varphi(s)ds = \int_0^t D^\alpha v(s)\varphi(s)ds.$$

Следовательно, $D^\alpha v(s) = D^\alpha u(s)$ для почти всех $s\in[0,t]$.

Покажем, что $A_\alpha(x,t,D^\gamma v) = A_\alpha(x,t,D^\gamma u)$ для почти всех $s\in[0,t]$. Действительно,

$$\int_0^t \left[A_\alpha\left(x,t,D^\gamma u\right) - A_\alpha\left(x,t,D^\gamma v\right) \right] \varphi(s)ds = \int_0^t \sum_{|\gamma| \le m} \left| \frac{\partial A_\alpha(x,t,D^\gamma (v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_\gamma} \right| \times$$

$$\times \left| D^\gamma \left(u-v\right) \right| \varphi(s)ds \le \int_0^t \sum_{|\gamma| \le m} \left| D^\gamma (u+\tau v) \right|^{p-1} \left| D^\gamma \left(u-v\right) \right| \varphi(s)ds = 0.$$

Следовательно, и $\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,t,D^\gamma u) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x,t,D^\gamma v)$ почти всюду.

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть в задаче (1) операторы имеют вид (2) и (3), а функции $A_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)$ и $B_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)$ удовлетворяют условиям (6)–(10). Тогда задача (1) имеет единственное решение $\forall u_0 \in \overset{0}{W}{}_p^m(\Omega)$ и $\forall f \in L^q\left(0,T,W_q^{-m}(\Omega)\right)$.

Доказательство. Из лемм 2, 4, 5 следует, что A радиально непрерывный монотонный оператор Вольтерры. Следовательно, для него существует обратный оператор $A^{-1} : L^q\left(0,T,W_q^{-m}\right) \to L^p\left(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m\right)$, который липшиц-непрерывен. Задача (1) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} u' + Gu = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

где оператор $Gu = A^{-1}\left(-Bu + f\right)$, $G : L^p\left(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m\right) \to L^p\left(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m\right)$.

Из лемм 3 и 4 следует, что B – липшиц-непрерывный оператор Вольтерры. Следовательно, таким же является оператор G. Отсюда из теоремы 1 следует, что существует единственное решение задачи (1) $\forall u_0 \in \overset{0}{W}{}_p^m$ и $\forall f \in L^q\left(0,T,W_q^{-m}(\Omega)\right)$.

Теорема доказана.

Кафедра теории оптимального управления
и приближенных методов

Поступила 24.10.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соболев С.Л.** – ПМ ФТ, 1960, № 3.
2. **Александрян Р.А.** – Тр. моск. мат. общ-ва, 1960, т. 9.
3. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1993, т. 28, № 3, с. 18–30.
4. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Там же, 1994, т. 29, № 5, с. 21–30.
5. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Там же, 1995, т. 30, № 1, с. 17–32.
6. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. **Дубинский Ю.А.** – УМН, 1968, т. 23, вып. 1, с. 45–90.

Հ. Ա. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ

ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ-ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդիրը.

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^{\gamma} u|_{\Gamma} = 0, \ |\gamma| \le m : \end{cases}$$

A, B ոչ գծային օպերատորներն ունեն հետևյալ տեսքը. $Au = \sum\limits_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}\left(x,t,D^{\gamma}u\right)$, $Bu = \sum\limits_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} B_{\alpha}\left(x,t,D^{\gamma}u\right)$, $|\gamma| \le m$: A_{α}, B_{α} ֆունկցիաների համար ստացվում են պայմաններ, որոնց դեպքում ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը $L^p(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m)$ տարածություններում, երբ $p \ge 2$:

H. A. MAMIKONYAN

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SOBOLEV TYPE NONLINEAR EQUATIONS

Summary

In this paper following initial boundary value problem is considered.

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = f, \\ u(0) = u_0, \\ D^{\gamma} u|_{\Gamma} = 0, \ |\gamma| \le m, \end{cases}$$

Operators A and B are nonlinear and have the following forms $Au = \sum\limits_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}\left(x,t,D^{\gamma}u\right)$, $Bu = \sum\limits_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} B_{\alpha}\left(x,t,D^{\gamma}u\right)$, $|\gamma| \le m$. Conditions for functions A_{α} and B_{α} are obtained that lead to existence and uniqueness of solution of the problem in the spaces $L^p(0,T,\overset{0}{W}{}_p^m)$, $p \ge 2$.