Բնական գիտություններ 2, 2006 Естественные науки

Механика

УДК 519.95

М. С. ГАБРИЕЛЯН, А. С. ЧЛИНГАРЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ–УКЛОНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИНАМИКОЙ

Рассматривается устойчивость решений игровых задач сближения–уклонения с m целевыми множествами, когда объект подчиняется системе нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений с переменной динамикой, т.е. динамика системы шаг за шагом меняется, а порядок встреч с целевыми множествами зафиксирован. Предполагается, что моменты переключения систем являются постоянными величинами. Строится семейство u-стабильных мостов. Используются кусочно-позиционная стратегия, экстремальная к этому семейству, и теорема об устойчивости решения игровых задач сближения–уклонения с одним целевым множеством относительно информационных помех, изученная Н.Н. Красовским. Получены условия, при которых решения вышеописанных игровых задач устойчивы относительно информационных помех.

§1. Постановка задачи. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_k, u_k, v_k). \tag{1.1}$$

Здесь $f_k : [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k \to R^n$ – непрерывные функции, где $P_k \subset R^{p_k}$, $Q_k \subset R^{q_k}$ – компакты, характеризующие возможности игроков, $k \in I$ $(I = 1, 2, \ldots, m)$.

Предполагается [1], что функция $f_k(\cdot)$ удовлетворяет:

1) условию бесконечной продолжаемости решения, т.е.

$$\left| x_k' f_k(t, x_k, u_k, v_k) \right| \le \chi_k (1 + \|x_k\|^2) \text{ при } (t, x_k, u_k, v_k) \in [t_0, \infty) \times R^n \times P_k \times Q_k,$$

где χ_k – постоянные числа;

2) для любой ограниченной области $G \subset R^{n+1} = [(t, x) : t \in [-\infty, \infty], x \in R^n]$ и для каждого $k \in I$ условию Липшица:

$$\left\| f_k(t, x_k^{(1)}, u_k, v_k) - f_k(t, x_k^{(2)}, u_k, v_k) \right\| \le \lambda_G^{(k)} \left\| x_k^{(1)} - x_k^{(2)} \right\|$$

при $(t, x_k^{(i)}, u_k, v_k) \in G \times P_k \times Q_k$, $i = 1, 2$.

Предполагается также, что выполняется условие седловой точки маленькой игры (см. [2], стр. 38), т. е.

$$\min_{u_k\in P_k}\max_{v_k\in Q_k} s'_* f_k(t_*,x_{*(k)},u_k,v_k)=\max_{v_k\in Q_k}\min_{u_k\in P_k} s'_* f_k(t_*,x_{*(k)},u_k,v_k) \qquad (1.2)$$

при $s_*\in R^n$, $(t_*,x_{*(k)})\in[t_0,\infty)\times R^n$, $k\in I$.

Допустим, что заданы замкнутые и ограниченные множества $\tilde M_k$ и $\tilde N_k$ $(k\in I)$ в пространстве $(t,x)\in[-\infty,\infty]\times R^n$ [1]. Предположим также, что множества $\tilde M_k$ являются выпуклыми. Плата определяется равенством

$$\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]),\dots,\tau_m(x[\cdot]),\eta_1(x[\cdot]),\dots,\eta_{m-1}(x[\cdot])). \qquad (1.3)$$

Здесь $\sigma:[t_0,\infty]^{2m-1}\to(-\infty,\infty]$ – заданная функция, которая по первым m аргументам удовлетворяет следующим четырем условиям:

I. На множестве $[t_0,\infty)^m$ функция $\sigma(\cdot)$ принимает конечные значения и непрерывна.

II. $\sigma(\tau_1,\dots,\tau_m)=\infty$, если хотя бы одно $\tau_i=\infty$.

III. Множество $\Sigma(c)=\{(\tau_1,\dots,\tau_m):\sigma(\tau_1,\dots,\tau_m)\le c\}$ ограничено для любого конечного числа c.

IV. Неравенство $\sigma(\tau_1,\dots,\tau'_i,\dots,\tau_m)\le\sigma(\tau_1,\dots,\tau''_i,\dots,\tau_m)$ справедливо для любых наборов $(\tau_1,\dots,\tau'_i,\dots,\tau_m)$ и $(\tau_1,\dots,\tau''_i,\dots,\tau_m)$, удовлетворяющих неравенству $\tau'_i\le\tau''_i$. По остальным аргументам $\sigma(\tau_1,\dots,\tau_m)$ удовлетворяет условию II и ограничена при $\eta_i(\cdot)=1$ для всех $i=1,\dots,m-1$.

В (1.3) $x[\cdot]$ $(x[t]:[t_0,\infty)\to R^n)$ есть реализовавшееся движение системы (1.1), удовлетворяющее следующим условиям: $x[t]=x_k[t]$ при $t\in[t_{k-1},t_k]$ и $x[t]=x_m[t]$ при $t\ge t_m$, причем $x_0[t_0]=x_1[t_0]=x_0$, $x_{k-1}[t_{k-1}]=x_k[t_{k-1}]$ для всех $k\in I$. Здесь через t_k обозначены моменты переключения систем, удовлетворяющие условиям $t_k\in T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k)\ne\varnothing$ и $t_k=\infty$, если $T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k)=$ $=\varnothing$ $(k\in I)$. $x_k[t]$ – это реализовавшееся движение системы под номером k из (1.1) при начальном условии $(t_{k-1},x_{k-1}[t_{k-1}])$;

$$T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k)=[\tau:\tau\ge t_{k-1};\ (t,x_k[t])\in\tilde N_k \text{ при } t_{k-1}\le t\le\tau,\ (\tau,x_k[\tau])\in\tilde M_k].$$

Функционалы $\tau_k(x[\cdot])$ и $\eta_k(x[\cdot])$ определяются следующим образом:

$$\tau_k(x[\cdot])=\min\{\tau:\tau\in T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k);\ \tau\ge t_{k-1}\},$$

в случае когда $T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k)=\varnothing$, полагаем $\tau_k(x[\cdot])=\infty$ $(k\in I)$ [1];

$$\eta_k(x_k[\cdot])=\begin{cases}1 & \text{при } t_k\in T_k(x_k[\cdot],\tilde M_k,\tilde N_k)\ne\varnothing,\\ \infty & \text{при } t_k\notin T_k(\cdot) \text{ или } T_k(\cdot)=\varnothing.\end{cases}$$

Предполагается, что последовательность встреч с целевыми множествами строго зафиксирована.

Сформулируем следующие игровые задачи [1].

Задача 1. Заданы начальные условия (t_0, x_0) и система (1.1). Требуется найти кусочно-позиционную стратегию $U \div u(t, x, t_1, ..., t_{m-1})$ (КПСU), обеспечивающую встречи

$$(\tau_k, x_k[\tau_k]) \in \tilde{M}_k, \qquad (t, x_k[t]) \notin \tilde{M}_k;$$
$$(t, x_k[t]) \in \tilde{N}_k \qquad (\tau_{k-1} \le t < \tau_k;\ k \in I,\ \tau_0 = t_0), \tag{1.4}$$

и среди них найти КПСU^0, удовлетворяющую условию минимакса

$$\sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U^0]) = \min_U \sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U]).$$

Если же такая КПСU^0 не существует, то требуется найти последовательность $U^{0(j)} \div u^{0(j)}(t, x, t_0, ..., t_{m-1})$, $j = 1, 2, ...$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U^{0(j)}]) = \inf_U \sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, U]).$$

Задача 2. Заданы начальные условия (t_0, x_0) и система (1.1). Требуется найти КПС$V \div v(t, x, \tau_1, ..., \tau_m)$, исключающую хотя бы одну из встреч (1.4). Если такой стратегии не существует, то требуется найти хотя бы КПСU^0, удовлетворяющую условию

$$\inf_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, V^0]) = \sup_U \inf_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, V]).$$

Если же такая КПСU^0 не существует, то требуется найти последовательность $V^{0(j)} \div v^{0(j)}(t, x, t_0, ..., t_{m-1})$, $j = 1, 2, ...$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, V^{0(j)}]) = \inf_U \sup_{x[\cdot]} \gamma(x[\cdot, t_0, x_0, V]).$$

Нижняя грань считается по всем движениям, для которых $\gamma(x[\cdot])$ из (1.3) оказывается конечной [1].

Для этих игровых задач построено семейство мостов $W_j(t_1, ..., t_j)$ $(j = 0, ..., m-1)$, которые являются u-стабильными относительно целевых компактов $L_j(t_1, ..., t_j)$ [1]. Причем мосты $W_j(\cdot)$ обрываются на соответствующих целевых множествах не позже, чем в момент времени ϑ. Также определяется КПС$U^{(e)}$, экстремальная к системе мостов $W_j(t_1, ..., t_j)$, $j = 0, ..., m-1$, [1].

§2. Устойчивость решения по отношению к информационным помехам. Рассмотрим вопросы устойчивости решения вышеописанных задач по отношению к информационным помехам.

Пусть задача сближения–уклонения решается в пользу первого игрока. Предположим, что моменты переключения систем $t_1, ..., t_{m-1}$ являются постоянными величинами. Под t_i-ым переключением понимается момент смены динамики системы при встрече движений с целевым множеством M_i. Тогда плата игры примет вид: $\gamma(\cdot) = \sigma(t_1, ..., t_m, 1, ..., 1)$.

Построим ветвь u-стабильных мостов для целевых множеств $\tilde{M}_k$ $(k \in I)$, которая будет представлять собой сужение $W_j(t_1,...,t_j)$, $j = 0,...,m-1$, [1]. Пусть порядок встреч с целевыми множествами зафиксирован. Рассмотрим сначала первое целевое множество $\tilde{M}_1$. Имеем начальную позицию (t_0, x_0). Обозначим через $\tilde{W}_1$ u-стабильный мост относительно множества $\tilde{M}_1$. Возьмем произвольную экстремальную относительно этого моста позиционную стратегию $\tilde{u}_1^{(e)}(t,x)$, и пусть $\tilde{x}_1[t] = \tilde{x}_1[t_0, x_0, t, \tilde{u}_1^{(e)}(\cdot)]$ – соответствующее этой стратегии конструктивное движение системы (1.1) при $k = 1$. Выберем некоторый момент времени t_1 такой, чтобы гиперплоскость $t_1 = const$ одновременно пересекалась с множествами $\tilde{M}_1$ и $\tilde{W}_1$, то есть $M_1 = [(t,x): t = t_1, \ (t,x) \in \tilde{M}_1; (t,x) \in \tilde{W}_1] \neq \varnothing$. Хотя бы один такой момент времени t_1 существует, если задача решается в пользу первого игрока, т.е. когда $\eta_1(\tilde{x}_1[\cdot]) = 1$ ($\eta_1(\cdot)$ – функционал, входящий в плату из (1.3)). Если таких моментов несколько, то произвольно берем один из них. Взяв множество M_1 в качестве целевого и имея ту же начальную позицию (t_0, x_0), обозначим u-стабильный мост относительно множества M_1 через $W_1(t, t_0, x_0, t_1)$. Т.е. на первом шаге вместо целевого множества $\tilde{M}_1$ и u-стабильного моста $\tilde{W}_1$ построили множества M_1 и $W_1(\cdot, t_0, x_0, t_1)$.

Теперь возьмем начальную позицию $(t_0, x_0) \in W_1(\cdot, t_0, x_0, t_1)$, и пусть $x_1[t] = x_1[t_0, x_0, t, u_1^{(e)}(\cdot)]$ есть конструктивное движение, соответствующее системе (1.1) при $k = 1$, здесь $u_1^{(e)}(t,x)$ – позиционная стратегия, экстремальная относительно u-стабильного моста $W_1(\cdot, t_0, x_0, t_1)$. Согласно определению u-стабильности и условию $W_1(\cdot) \subset \tilde{N}_1$, движение $x_1[t]$, сохраняясь в фазовом ограничении $\tilde{N}_1$, в момент времени t_1 встретится с целевым множеством M_1.

Теперь рассмотрим сближение движения со вторым целевым множеством. Имеем начальную позицию $(t_1, x_1[t_1]) \in W_1(\cdot, t_0, x_0, t_1)$ и $(t_1, x_1[t_1]) \in M_1$ одновременно. Пусть $\tilde{W}_2$ есть u-стабильный мост относительно множества $\tilde{M}_2$. Возьмем произвольную экстремальную относительно этого моста позиционную стратегию $\tilde{u}_2^{(e)}(t,x)$, и пусть $\tilde{x}_2[t] = \tilde{x}_2[t_1, x_1[t_1], t, \tilde{u}_2^{(e)}(\cdot)]$ – соответствующее конструктивное движение системы (1.1) при $k = 2$. Выберем некоторый момент времени t_2 такой, чтобы гиперплоскость $t_2 = const$ одновременно пересекалась с множествами $\tilde{M}_2$ и $\tilde{W}_2$, т.е. $M_2 = [(t,x): t = t_2,$ $(t,x) \in \tilde{M}_2; (t,x) \in \tilde{W}_2] \neq \varnothing$. Хотя бы один такой момент времени t_2 существует, если задача решается в пользу первого игрока, то есть когда $\eta_2(\tilde{x}_2[\cdot]) = 1$.

Если таких моментов несколько, то произвольно берем один из них. Теперь, взяв множество M_2 в качестве целевого и имея ту же начальную позицию $(t_1, x_1[t_1])$, одновременно принадлежащую множествам $W_1(\cdot, t_0, x_0, t_1)$ и M_1, обозначим u-стабильный мост относительно множества M_2 через $W_2(\cdot, t_0, x_0, t_1, t_2)$. Причем $W_2(\cdot, t_0, x_0, t_1, t_2)$ полностью содержит в себе множество M_1, так как начальная позиция $(t_1, x_1[t_1])$ есть любая точка из M_1. Таким образом, на втором шаге вместо целевого множества $\tilde{M}_2$ и u-стабильного моста $\tilde{W}_2$ построили множества M_2 и $W_2(\cdot, t_0, x_0, t_1, t_2)$.

Пусть $x_2[t] = x_2[t_1, x_1[t_1], t, u_2^{(e)}(\cdot)]$ есть конструктивное движение, соответствующее системе (1.1) при $k = 2$. Здесь $u_2^{(e)}(t,x)$ – позиционная стратегия, экстремальная относительно u-стабильного моста $W_2(\cdot, t_0, x_0, t_1, t_2)$. Движение $x_2[t]$, сохраняясь в фазовом ограничении $\tilde{N}_2$, в момент времени t_2 встретится с целевым множеством M_2.

Продолжая эти рассуждения, на конечном m-ом шаге выберем момент времени t_m такой, чтобы множество $M_m = [(t,x): t = t_m,\ (t,x) \in \tilde{M}_m; (t,x) \in \tilde{W}_m]$ было непустым. Хотя бы один такой момент времени t_m существует, если задача решается в пользу первого игрока. Если таких моментов несколько, то произвольно берем один из них. Обозначим через $W_m(\cdot, t_0, x_0, t_1, \ldots, t_m)$ u-стабильный относительно множества M_m мост. Взяв экстремальную относительно этого моста позиционную стратегию $u_m^{(e)}(t,x)$ и имея начальную позицию $(t_{m-1}, x_{m-1}[t_{m-1}])$, принадлежащую $W_{m-1}(\cdot, t_0, x_0, t_1, \ldots, t_{m-1})$ и M_{m-1} одновременно, будем иметь конструктивное движение, соответствующее системе (1.1) при $k = m$. Это движение в момент времени t_m встретится с целевым множеством M_m. Таким образом, построили следующий u-стабильный мост и экстремальную относительно него КПС$U^{(e)}$:

$$W_k(\cdot) = W_k(\cdot, t_0, x_0, t_1, \ldots, t_k); \quad u_k^{(e)} = u_k^{(e)}(t, x_k[\cdot]) \text{ при } t_{k-1} \le t \le t_k,\ k \in I.$$

Тогда ломаная Эйлера [2] будет иметь вид:

$$x_{k\Delta}[t] = x_{k\Delta}[t; t_{k-1}, x_{k-1}[t_{k-1}], t_1, \ldots, t_k, u_k^{(e)}[t], v_k[t]] \text{ при } t_{k-1} \le t \le t_k,\ k \in I,$$

где Δ – некоторое разбиение полуоси $[t_0, \infty)$, а $t_1, \ldots, t_{m-1}$ есть моменты переключения систем.

Конструктивное движение системы (1.1), соответствующее управлению $u_k^{(e)} = u_k^{(e)}(t, x_k[\cdot])$ ($k \in I$), определяется следующим образом:

$$x_k[t] = x_k[t; t_{k-1}, x_{k-1}[t_{k-1}], t_1, \ldots, t_k, u_k^{(e)}[t], v_k[t]] \text{ при } t_{k-1} \le t \le t_k,\ k \in I.$$

Устойчивость решения относительно информационных помех для систем с постоянной динамикой была исследована в [3].

Определение устойчивости. Скажем, что КПС$U^{(e)} \div u_k^{(e)}(t,x_k[\cdot])$, экстремальная к семейству мостов $W_k(\cdot,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$, $k \in I$, гарантирует решение задачи сближения, устойчивое по отношению к информационным помехам, если для любых $\delta > 0$ и $\zeta > 0$ можно указать числа $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta,\delta)),...,$ $\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta))$ такие, что управление

$$u_{k\Delta}^*[t] = u_k^{(e)}(\tau_i, x_{k\Delta}^*[\tau_i]),\ t_{k-1} \le \tau_i \le t < \tau_{i+1} \le t_k\ (k \in I,\ i = 0,1,...),$$

в моменты t_k гарантирует попадание ломаной Эйлера $x_{k\Delta}^*[t]$ $(t \ge t_0)$ в $\varepsilon_k(\zeta,\delta)$-окрестности целевых множеств M_k $(k = 1,...,m)$ при ее сохранении в $\varepsilon_k(\zeta,\delta)$-окрестностях множеств $\tilde{N}_k$, если только полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 0,1,...)$ разбиения Δ полуоси $[t_0,\infty)$ удовлетворяют условиям $\tau_{i+1} - \tau_i \le \delta$. Причем $x_{k\Delta}^*[\tau_i]$ – это результаты неточного измерения фазового вектора $x_{k\Delta}[\tau_i]$ k-го уравнения системы (1.1), $k \in I$. В начальный момент времени выполняется соотношение $\left\| x_{1\Delta}[t_0] - x_{1\Delta}^*[t_0] \right\| \le \zeta$.

Обозначим сечения множеств $W_k(\cdot,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$ гиперплоскостями $t = const$ через $W_{k,t}(t,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$, причем $t_{k-1} \le t \le t_k$, $k \in I$. Докажем следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть для $f_k(t,x_k,u_k,v_k)$, $k \in I$, из (1.1) имеют место все вышеуказанные условия. Пусть также для всех систем (1.1), позиций $(t_*, x_{*(k)})$, $t_{k-1} \le t_* \le t_k$ $(k \in I)$, и векторов s_* маленькая игра имеет седловую точку, т.е. имеет место (1.2). Предположим, что существует u-стабильный мост $W_k(t,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$, $k \in I$, обрывающийся в моменты времени t_k на целевых множествах M_k, и пусть начальная позиция (t_0,x_0) принадлежит множеству $W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)$. Предположим также, что сечения $W_{k,t}(t,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$ множеств $W_k(\cdot,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$ гиперплоскостями $t = const$, $t_{k-1} \le t \le t_k$ $(k \in I)$, есть строго выпуклые множества. Тогда КПС$U^{(e)} \div u_k^{(e)}(t,x_k[\cdot])$, $k \in I$, экстремальная к мосту $W_k(\cdot,t_0,x_0,t_1,...,t_k)$, на интервале $[t_0,t_1]$ гарантирует $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$-отклонение ломаной Эйлера от целевого множества M_1, на интервале $[t_1,t_2]$ – $\varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta,\delta))$-отклонение от целевого множества M_2 и так далее, на интервале $[t_{m-1},t_m]$ – $\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta))$-отклонение ломаной Эйлера от целевого множества M_m.

Доказательство. Последовательность встреч с целевыми множествами зафиксирована. Рассмотрим интервал $[t_0,t_1]$. На этом интервале имеем систему (1.1) при $k = 1$. Рассмотрим сближение произвольной ломаной Эйлера $x_{1\Delta}[t]$ с целевым множеством M_1. По условиям доказываемой теоремы сечения $W_{1,t}(t,t_0,x_0,t_1)$ множества $W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)$ гиперплоскостями $t = const$,

$t_0 \le t \le t_1$, являются строго выпуклыми. Тогда для каждой позиции (t,x) ближайшая к ней позиция $(t,w(t,x)) \in W_{1,t}(t,t_0,x_0,t_1)$ будет единственной, следовательно, вектор $s(t,x) = x - w(t,x)$ также определяется единственным образом, причем от x он зависит равномерно непрерывно. То есть $\|s(t,x_*) - s(t,x^*)\| \le \sigma(\zeta)$ при $\|x_* - x^*\| \le \zeta$ для всех $\zeta \to 0$; $x_* \in E_n$, $x^* \in E_n$; здесь $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Таким образом, малые погрешности измерения фазовой точки x_* влекут за собой малые погрешности в определении вектора s, направленного на x_* из ближайшей точки сечения $W_{1,t}(t,t_0,x_0,t_1)$ множества $W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)$.

Пусть первый игрок выбирает произвольное разбиение Δ полуоси $[t_0,\infty)$, удовлетворяющее условию $\tau_i - \tau_{i+1} \le \delta$, где $\delta > 0$ есть произвольное положительное маленькое число, причем $\tau_0 = t_0$.

Построим на интервале $[t_0,t_1]$ ломаную Эйлера $x_{1\Delta}^*[t] = x_{1\Delta}^*[t,t_0,x_0,t_1,u_{1\Delta}^*[t],v_l[t]]$, соответствующую управлению, экстремальному к мосту $W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)$:

$$u_{1\Delta}^*[t] = u_1^{(e)}(\tau_i, x_{1\Delta}^*[\tau_i]) \text{ при } t_0 \le \tau_i \le t < \tau_{i+1} \le t_1 \quad (i = 0,1,\ldots).$$

Здесь $x_{1\Delta}^*[\tau_i]$ – это результаты неточного измерения фазового вектора $x_{1\Delta}[\tau_i]$ системы (1.1) при $k=1$, которые в начальный момент времени удовлетворяют условию $\|x_{1\Delta}[t_0] - x_{1\Delta}^*[t_0]\| \le \zeta$. Тогда, согласно теореме 56.1 из [2], построенная ломаная Эйлера, сохраняясь в некоторой $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$-окрестности моста $W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)$, т.е. в $W_1^{(\varepsilon_1(\cdot))} = [\{t',x'\} : t_0 \le t' \le t_1,\ \|x' - x\| \le \varepsilon_1(\zeta,\delta),\ x \in W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)]$, в момент $t = t_1$ попадет в $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$-окрестность множества M_1, т.е. в $M_1^{(\varepsilon_1(\cdot))} = [\{t',x'\} : t' = t_1,\ \|x' - x\| \le \varepsilon_1(\zeta,\delta),\ x \in M_1]$. Причем $\varepsilon_1(\cdot)$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon_1^2(\zeta,\delta) \le \rho^2(t_0) e^{2\lambda^{(1)}(t_1 - t_0)} + (\varphi(\delta) + \varphi_*(\zeta)) \frac{1}{2\lambda^{(1)}} [e^{2\lambda^{(1)}(t_1 - t_0)} - 1].$$

Тогда имеют место оценки

$$\rho((t,x_{1\Delta}^*[t]), W_1(\cdot,t_0,x_0,t_1)) \le \varepsilon_1(\zeta,\delta) \text{ при } t_0 \le t \le t_1,$$

$$\rho((t_1,x_{1\Delta}^*[t_1]), M_1) \le \varepsilon_1(\zeta,\delta),$$

причем $\varepsilon_1(\zeta,\delta) \to 0$ при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$.

Теперь возьмем интервал $[t_1,t_2]$. Рассмотрим сближение ломаной Эйлера $x_{2\Delta}[t] = x_{2\Delta}[t;t_1,x_1[t_1],t_1,t_2,u_2^{(e)}[t],v_2[t]]$, соответствующей второму уравнению системы (1.1), с целевым множеством M_2. Для каждой позиции (t,x) $(t \in [t_1,t_2])$ вектор $s(t,x) = x - w(t,x)$ будет единственным, здесь $(t,w(t,x)) \in$

$\in W_{2,t}(t,t_0,x_0,t_1,t_2)$, причем от x этот вектор зависит равномерно непрерывно. Для этого интервала роль информационных помех будет играть величина $\varepsilon_1(\zeta,\delta)$, т.е. имеет место условие $\left\|x_{1\Delta}[t_1]-x^*_{1\Delta}[t_1]\right\|\le\varepsilon_1(\zeta,\delta)$. Тогда, согласно теореме 56.1 из [2], экстремальное к мосту $W_2(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2)$ управление

$$u^*_{2\Delta}[t]=u_2^{(e)}(\tau_i,x^*_{2\Delta}[\tau_i]),\text{ где } t_1\le\tau_i\le t<\tau_{i+1}\le t_2,$$

гарантирует попадание ломаной $x^*_{2\Delta}[t]$, $t\in[t_1,t_2]$, в момент $t=t_2$ в $M_2^{(\varepsilon_2)}$ при сохранении ее в $W_2^{(\varepsilon_2)}(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2)$. Здесь $W_2^{(\varepsilon_2)}(t,t_0,x_0,t_1,t_2)$ и $M_2^{(\varepsilon_2)}$ есть некоторые $\varepsilon_2(\zeta,\delta)$-окрестности множеств $W_2(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2)$ и M_2 соответственно, т.е. $W_2^{(\varepsilon_2(\cdot))}(\cdot)=[\{t',x'\}:t_1\le t'\le t_2,\ \|x'-x\|\le\varepsilon_2(\cdot),\ x\in W_2(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2)]$, $M_2^{(\varepsilon_2)}=[\{t',x'\}:t'=t_2,\ \|x'-x\|\le\varepsilon_2(\cdot),\ x\in M_2]$. Причем $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta,\delta))$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon_2^2(\zeta,\delta)\le\rho^2(t_1)e^{2\lambda^{(2)}(t_2-t_1)}+(\varphi(\delta)+\varphi_*(\varepsilon_1(\zeta,\delta)))\frac{1}{2\lambda^{(2)}}[e^{2\lambda^{(2)}(t_2-t_1)}-1].$$

Тогда имеют место оценки

$$\rho((t,x^*_{2\Delta}[t]),W_2(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2))\le\varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta,\delta))\text{ при } t_1\le t\le t_2,$$

$$\rho((t_2,x^*_{2\Delta}[t_2]),M_2)\le\varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta,\delta)),$$

причем $\varepsilon_2(\zeta,\delta)\to0$ при $\varepsilon_1(\zeta,\delta)\to0$, т.е. при $\zeta\to0$ и $\delta\to0$.

Продолжая эти рассуждения, на конечном m-ом интервале $[t_{m-1},t_m]$ будем иметь отклонение $\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta)=\varepsilon_{m-1}(\varepsilon_{m-2}(\varepsilon_{m-3}(\cdot)))$. По теореме 56.1 из [2], экстремальное к мосту $W_m(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2,...,t_m)$ управление

$$u^*_{m\Delta}[t]=u_m^{(e)}(\tau_i,x^*_{m\Delta}[\tau_i]),\text{ где } t_{m-1}\le\tau_i\le t<\tau_{i+1}\le t_m,$$

гарантирует попадание ломаной $x^*_{m\Delta}[t]$ в момент $t=t_m$ в $M_m^{(\varepsilon_m)}$ при сохранении ее в $W_m^{\varepsilon_m}(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2,...,t_m)$. Здесь $W_m^{\varepsilon_m}(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2,...,t_m)$ и $M_m^{(\varepsilon_m)}$ есть некоторые $\varepsilon_m(\zeta,\delta)$-окрестности множеств $W_m(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2,...,t_m)$ и M_m соответственно, т. е.

$$W_m^{\varepsilon_m(\cdot)}(\cdot)=[\{t',x'\}:t_{m-1}\le t'\le t_m,\ \|x'-x\|\le\varepsilon_m(\zeta,\delta),\ x\in W_m(\cdot,t_0,x_0,t_1,...,t_m)]$$

$$\text{и } M_m^{(\varepsilon_m(\cdot))}=[\{t',x'\}:t'=t_m,\ \|x'-x\|\le\varepsilon_m(\zeta,\delta),\ x\in M_m].$$

Причем $\varepsilon_m(\zeta,\delta)=\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\varepsilon_m^2(\zeta,\delta)\le\rho^2(t_{m-1})e^{2\lambda^{(m)}(t_m-t_{m-1})}+(\varphi(\delta)+\varphi_*(\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta)))\frac{1}{2\lambda^{(m)}}[e^{2\lambda^{(m)}(t_m-t_{m-1})}-1].$$

Тогда имеют место оценки

$$\rho((t,x^*_{m\Delta}[t]),W_m(\cdot,t_0,x_0,t_1,t_2,...,t_m))\le\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta))\text{ при } t_{m-1}\le t\le t_m,$$

$$\rho((t_m,x^*_{m\Delta}[t_m]),M_m)\le\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta)),$$

причем $\varepsilon_m(\zeta,\delta)\to0$ при $\varepsilon_{m-1}(\zeta,\delta)\to0$, т.е. при $\zeta\to0$ и $\delta\to0$.

То есть приходим к следующему результату: ломаная Эйлера $x^*_{k\Delta}[t] = x^*_{k\Delta}[t; t_{k-1}, x_{k-1}[t_{k-1}], t_1, \dots, t_k, u^*_k[t], v_k[t]]$, соответствующая КПС$U^{(e)} \div \div u^{(e)}_k(t, x^*_k[t])$, экстремальной к семейству мостов $W_k(\cdot, t_0, x_0, t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($k \in I$), при выполнении всех условий теоремы 2.1 в момент $t = t_1$ попадает в $M_1^{(\varepsilon_1)}$, в момент $t = t_2$ попадает в $M_2^{(\varepsilon_2)}$ и так далее, в момент $t = t_m$ ломаная попадает в $M_m^{(\varepsilon_m)}$. Причем отклонения ломаной Эйлера $x_{k-1\Delta}[t]$ от целевого множества M_{k-1} для k-го целевого множества являются информационными помехами, т.е. $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\varepsilon_{k-1}(\zeta, \delta))$, и они стремятся к нулю при $\zeta \to 0$ и $\delta \to 0$. Получается, что для данных информационных помех ζ и диаметра δ разбиения Δ построены $\varepsilon_1(\zeta, \delta), \dots, \varepsilon_m(\zeta, \delta)$, характеризующие отклонения ломаных Эйлера $x^*_{k\Delta}[t] = x^*_{k\Delta}[t; t_{k-1}, x_{k-1}[t_{k-1}], t_1, \dots, t_k, u^*_k[t], v_k[t]]$ ($k \in I$) системы (1.1) от целевых множеств $M_1, \dots, M_m$ соответственно. Тем самым теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание. Для того чтобы сформулировать теорему 2.1 для случая конструктивных движений, надо в величинах $\varepsilon_1(\zeta, \delta), \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1(\zeta, \delta))$, ..., $\varepsilon_m(\varepsilon_{m-1}(\zeta, \delta))$ принять $\delta = 0$, т.е. перейти к пределу в ломаных Эйлера при $\delta \to 0$.

Если воспользоваться v-стабильным мостом $V(\cdot)$ (его построение аналогично построению моста $W(\cdot)$) и КПС$V^{(e)} \div v^*_\Delta[\cdot]$, экстремальной относительно этого моста [1], то можно сформулировать и доказать теорему об устойчивости решения второй игровой задачи относительно информационных помех, аналогичную теореме 2.1.

Кафедра теоретической механики *Поступила 24.11.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габриелян М.С.** – Межвузовский сборник научных трудов. Математика. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1985, вып. 5.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, 455 с.
3. **Габриелян М.С., Члингарян А.С.** – Известия НАН РА. Механика, 2004, т. 57, № 3, с. 51–58.

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, Ա. Ս. ՉԼԻՆԳԱՐՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅՈՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՇԱՏ ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻՆ ՄՈՏԵՑՄԱՆ-ՇԵՂՄԱՆ ԽԱՂԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է m նպատակային բազմությունների մոտեցման–շեղման խաղային խնդրի լուծման կայունությունը, երբ օբյեկտը ենթարկվում է

փոփոխական դինամիկայով ոչ գծային ոչ ստացիոնար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգին: Այսինքն, համակարգի դինամիկան քայլ առ քայլ փոփոխվում է, իսկ նպատակային բազմությունների հետ հանդիպման կարգը ֆիքսված է: Ենթադրվում է, որ համակարգերի դինամիկայի փոփոխման ժամանակները հաստատուն մեծություններ են: Կառուցվում է *u*-ստաբիլ բազմությունների ընտանիք: Օգտագործվում են ըստ այդ ընտանիքի էքստրեմալ կտոր առ կտոր դիրքային ստրատեգիան և Ն.Ն. Կրասովսկու կողմից ուսումնասիրված ըստ ինֆորմացիոն շեղումների մեկ նպատակային բազմության մոտեցման–շեղման խաղային խնդրի լուծման կայունության թեորեմը: Ստացված են պայմանները, որոնց դեպքում վերոհիշյալ խնդրի լուծումը կայուն է ըստ ինֆորմացիոն շեղումների:

M. S. GABRIELYAN, A. S. CHLINGARYAN

THE STABILITY OF SOLUTION OF PURSUIT–EVASION TO SEVERAL GOAL SETS GAME PROBLEM FOR SYSTEMS WITH VARYING DYNAMICS

Summary

Conditions are obtained by which the solutions in the case of several goal sets and the systems with varying dynamics are stable with respect to informational disturbance.

The stability of solution of pursuit-evasion to *m* goal sets game problem is analyzed when the object follows a system of nonlinear nonstationary differential equations with varying dynamics. So the dynamic of the system is changing step by step. The sequence of meetings with the goal sets is fixed. The moments of systems switching are assumed to be constant values. A family of *u*-stable bridges is constructed. A piecewise positional strategy extremal to that family and the theorem about the solution's stability with respect to informational disturbance of the pursuit–evasion to one goal set game problem, proved by N.N. Krasovskii, are applied.

Conditions are obtained by which the solutions are stable with respect to informational disturbance.