ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2006 Естественные науки

Ֆիզիկա

УДК 523.754

Հ. Հ. ԱԲԱՋՅԱՆ

ԱՔՍԻԱԼ ՀԱՄԱՉԱՓ ԴԱՇՏԵՐԸ ԷՅՆՇՏԵՅՆԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ներածություն: Սեփական առանցքի շուրջ պտտվող աքսիալ համաչափ աստղային կոնֆիգուրացիայի խնդիրը լուծելու տարբեր փորձեր են արված: Կան ժամանակակից մեթոդներով թվային լուծումներ [1–4], բայց ավելի նախընտրելի են անալիտիկ լուծումները, որոնք թույլ են տալիս որոշել կոնֆիգուրացիաների ինտեգրալ բնութագրերը: Այդ նպատակով այս աշխատանքում օգտագործվում է խոտորումների տեսության մեթոդը, որը պտույտի խնդրի համար առաջին անգամ կիրառել են Դ. Սեդրակյանն ու Է. Չուբարյանը [5] և նրանցից անկախ Հարթլը և Թորնը [6, 7] 1967 թվականին:

[5–7] աշխատանքներում գտնված են անալիտիկ լուծումները 1-ին և 2-րդ մոտավորությունների (ըստ անկյունային արագության) համար: Հաջորդ մոտավորությունները չէին հաշվված, քանի որ նրանց լուծումը բարդ մաթեմատիկական խնդիր է, բացի դրանից, ավելի բարձր կարգի մոտավորությունները էական ուղղումներ չեն մտցնում պտտվող մարմնի ինտեգրալ բնութագրերի մեջ:

Տեսության մշակումից հետո շատ շուտով՝ 1967 թվականին, հայտնաբերվեցին առաջին պուլսարները [8], որոնք հետագայում նույնացվեցին պտտվող նեյտրոնային աստղերի հետ [9] և այդ տեսությունը հնարավոր եղավ կիրառել իրական ֆիզիկական օբյեկտների համար: Գերխիտ նյութի ֆիզիկայի աստղաֆիզիկական կիրառությունների հետագա զարգացումը հանգեցրեց նրան, որ անհրաժեշտ եղավ ավելի ճշգրիտ չափել ֆիզիկական մեծությունների կախումը անկյունային արագությունից: Օրինակ, [10] աշխատանքում փորձ է արված գտնել գերխիտ նյութի ներքին կառուցվածքի փոփոխությունների ազդեցությունը այդպիսի օբյեկտների պտույտի դինամիկայի վրա և նրանց իներցիայի մոմենտը ավելի ճշգրիտ հաշվելու համար գտնված են 3-րդ մոտավորությամբ պայմանավորված ուղղումները: Այս և բազմաթիվ այլ փաստերից հասկանալի է դառնում, որ կա խոտորումների տեսության ավելի բարձր կարգի մոտավորությունները հաշվելու անհրաժեշտություն:

[11] աշխատանքում հաջողվել է նյուտոնյան մոտավորության համար գտնել ցանկացած մոտավորությամբ ուղղումները հաշվելու մեթոդ: Այս աշխատանքում փորձ է արված նույն բանը անել էյնշտեյնի տեսության շրջանակներում: Ստացված են էյնշտեյնի հավասարումները աքսիալ համաչափ

դաշտերի համար վակուումում: Գտնված են ընդհանուր լուծումներ խոտորումների տեսության ցանկացած մոտավորության համար: Բայց որևէ մոտավորությամբ ուղղման անալիտիկ տեսքը գտնելու համար պետք է նախօրոք ունենալ նախորդ բոլոր մոտավորությունների ուղղումները: Հետևաբար, գտնված ընդհանուր լուծումը միայն մեթոդ է ավելի բարձր մոտավորությունները հաշվելու համար:

1-ին և 2-րդ մոտավորությունների անալիտիկ լուծումների կիրառումով հաշվված են ուղղումները նաև 3-րդ ու 4-րդ մոտավորությունների համար:

Քառաչափ ինտերվալի տեսքը: Դիտարկենք գրավիտացիոն դաշտի մետրիկան աքսիալ համաչափ կոնֆիգուրացիայի համաչափության առանցքի շուրջ Ω անկյունային արագությամբ ստացիոնար պտույտի դեպքում.

$$g_{ik}=g_{ik}\left(r,\theta,\Omega\right),\quad \Omega=\frac{d\varphi}{dt}:$$

Ենթադրենք պտույտը պինդմարմնային է, այսինքն՝ Ω-ն կախված չէ r-ից և θ-ից: Նշանակենք $x^0=t,\quad x^1=r,\quad x^2=\theta,\quad x^3=\varphi\quad (c=1,G=1)$: Քառաչափ ինտերվալը կունենա հետևյալ տեսքը. $ds^2=g_{ik}dx^i dx^k$:

$t\to -t,\varphi\to -\varphi$ ձևափոխությունների դեպքում Ω-ի նշանը չի փոխվում, ուրեմն g_{ik}-երն էլ չեն փոխվում: ds^2-ու ինվարիանտությունից հետևում է, որ $g_{01}=g_{02}=g_{13}=g_{23}=0$: Կատարենք r-ի և θ-ի այնպիսի ձևափոխություն, որ $g_{12}=0,\quad g_{33}=g_{22}\sin^2\theta$: Մնացած 4 մետրիկական գործակիցները նշանակենք հետևյալ կերպ [5, 12]. $g_{00}=\omega^2 e^{\mu}\sin^2\theta-e^{\nu}$, $g_{11}=e^{\lambda}$, $g_{22}=e^{\mu}$, $g_{03}=\omega e^{\mu}\sin^2\theta$: Ինտերվալի համար վերջնականապես ստանում ենք հետևյալ տեսքը.

$$ds^2=(\omega^2 e^{\mu}\sin^2\theta-e^{\nu})dt^2+e^{\lambda}dr^2+e^{\mu}(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)+2\omega e^{\mu}\sin^2\theta\, d\varphi dt,$$

որտեղ λ,μ,ν,ω-ն ֆունկցաներ են r,θ,Ω-ից:

$t\to -t$ ձևափոխության դեպքում մետրիկան մնում է ինվարիանտ, բայց Ω-ն փոխում է նշանը: Այս փաստից հետևում է, որ λ,μ,ν-ն պետք է լինեն զույգ ֆունկցաներ Ω-ից, իսկ ω-ն՝ կենտ ֆունկցիա:

Էյնշտեյնի հավասարումները վակուումում: Ունենք 4 անհայտ ֆունկցիա՝ λ,μ,ν,ω, որոնք գտնելու համար կլուծենք Էյնշտեյնի հավասարումները վակուումում՝ $G_k^i=0$: Այստեղ անկախ հավասարումները 4-ն են: Ընտրենք դրանցից մեզ հարմար հետևյալ կոմբինացիան.

$$\begin{cases}G_1^1-G_0^0=0\\ G_2^2+G_3^3=0\\ G_2^1=0\\ G_3^0=0\end{cases}:$$

$$G_1^1-G_0^0=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[2\mu_{11}+\mu_1{}^2-\mu_1\lambda_1-\mu_1\nu_1\right]-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin^2\theta\left[\omega\omega_{11}+\omega\omega_1\left(2\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\nu_1\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\lambda_{22}-\nu_{22}+\frac{1}{2}\lambda_2{}^2-\frac{1}{2}\nu_2{}^2+(\lambda_2-\nu_2)ctg\theta\right]-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\nu}\sin^2\theta\left[\omega\omega_{22}+\omega_2{}^2+\omega\omega_2\left(\mu_2+\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2}\nu_2+3ctg\theta\right)\right],$$

$$G_2^2+G_3^3=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[2\mu_{11}+2\nu_{11}+\mu_1{}^2+\nu_1{}^2-\mu_1\lambda_1+\mu_1\nu_1-\lambda_1\nu_1\right]-$$

$$-\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin^2\theta\left[\omega\omega_{11}+2\omega_1{}^2+\omega\omega_1\left(2\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\nu_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\lambda_{22}+\nu_{22}+\frac{1}{2}\lambda_2{}^2+\frac{1}{2}\nu_2{}^2+\lambda_2\nu_2+(\lambda_2+\nu_2)ctg\theta\right]-$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\nu}\sin^2\theta\left[\omega\omega_{22}+\omega_2{}^2+\omega\omega_2\left(\mu_2+\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2}\nu_2+3ctg\theta\right)\right],$$

$$G_2^1=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[\mu_{12}+\nu_{12}-\frac{1}{2}\mu_1(\lambda_2+\nu_2)-\frac{1}{2}\nu_1(\lambda_2-\nu_2)\right]+\frac{1}{2}\omega_1\omega_2e^{\mu-\lambda-\nu}\sin^2\theta\,,$$

$$G_3^0=\frac{1}{2}e^{\mu-\lambda-\nu}\sin^2\theta\left[\omega_{11}+\omega_1\left(2\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_1-\frac{1}{2}\nu_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-\nu}\sin^2\theta\left[\omega_{22}+\omega_2\left(\mu_2+\frac{1}{2}\lambda_2-\frac{1}{2}\nu_2+3ctg\theta\right)\right]$$

(այստեղ և հետագայում կատարված է նշանակում. $A_i\equiv\dfrac{\partial A}{\partial x^i}$, որտեղ A-ն x^i-երից կախված ցանկացած ֆունկցիա է):

Լուծման մեթոդիկան: Խնդիրը լուծելու համար կօգտագործենք խոտորումների տեսությունը, որի փոքր պարամետր կհանդիսանա $\beta=\dfrac{\Omega^2}{8\pi\rho}$ մեծությունը: Քանի որ մեծ անկյունային արագությունների դեպքում աստղի հասարակածից սկսվում է նյութի արտահոսք, ապա Ω-ն սահմանափակ է: Ներքին խնդիրը լուծելով՝ կարող ենք ցույց տալ, որ նույնիսկ ամենախիտ կոնֆիգուրացիաների համար β_{max}-ը չի գերազանցում 0,2-ը: Այսինքն՝ խոտորումների տեսության կիրառումը արդարացված է:

Մետրիկական գործակիցները վերլուծենք շարքի ըստ β-ի.

$$\lambda(r,\theta,\Omega)=\lambda^0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\lambda^n(r,\theta),$$

$$\nu(r,\theta,\Omega)=\nu^0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\nu^n(r,\theta),$$

$$\mu(r,\theta,\Omega)=\mu^0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n\mu^n(r,\theta),$$

$$\omega(r,\theta,\Omega)=\sqrt{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n\omega^n(r,\theta):$$

Զրոյական մոտավորության անդամները կախված չեն θ-ից, որովհետև այդ մոտավորությունը համարժեք է պտույտի բացակայությանը, իսկ այդ դեպքում ունենք սֆերիկ համաչափ դաշտ:

λ,μ,ν-ն վերլուծված են շարքի ըստ β-ի (որ նույնն է՝ Ω^2-ու), որովհետև, ինչպես արդեն նշվել է, նրանք զույգ ֆունկցաներ են Ω-ից: Իսկ քանի որ ω-ն կենտ ֆունկցիա է, նրա շարքում կան $\sqrt{\beta}$-ի միայն կենտ աստիճաններ:

Ստացված շարքերը տեղադրենք Էյնշտեյնի հավասարումների մեջ և առանձնացնենք β-ի այն ցուցչին համապատասխանող անդամները, որ մոտավորությամբ ցանկանում ենք լուծել խնդիրը: Որևէ մոտավորությամբ Էյնշտեյնի հավասարումները ստանալու համար անհրաժեշտ է ունենալ $\lambda^n,\mu^n,\nu^n,\omega^n$ ֆունկցիաները բոլոր նախորդ մոտավորությունների համար: Հետևաբար, խնդիրը պետք է լուծել քայլ առ քայլ՝ սկսած զրոյական մոտավորությունից: Չնայած դրան, հաջողվել է գտնել լուծման ընդհանուր մեթոդներ բոլոր կենտ և բոլոր զույգ կարգի մոտավորությունների համար: Բայց մինչ այդ լուծենք խնդիրը զրոյական մոտավորությամբ:

Սֆերիկ համաչափ դաշտ: Զրոյական մոտավորությունը համապատասխանում է Շվարցշիլդի մետրիկային: Էյնշտեյնի հավասարումները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\begin{cases} e^{-\lambda^0}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{\lambda_1^0}{r}\right)-\dfrac{1}{r^2}=0 \\ e^{-\lambda^0}\left(\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\nu_1^0}{r}\right)-\dfrac{1}{r^2}=0 \end{cases}:$$

Այդ հավասարումների լուծումն է $e^{-\lambda^0}=e^{\nu^0}=1-\dfrac{2m}{r}$, որտեղ m-ը կոնֆիգուրացիայի զանգվածն է պտույտի բացակայության դեպքում: μ^0-ն Շվարցշիլդի մետրիկայում որոշվում է $e^{\mu^0}=r^2$ բանաձևով:

$\Omega^1,\Omega^3,\dots$ մոտավորություններ: Էյնշտեյնի հավասարումներից Ω-ի կենտ աստիճան պարունակում է միայն $G_3^0=0$ հավասարումը: Այդ հավասարման մեջ տեղադրելով նախորդ մոտավորություններից հայտնի $\lambda^0,\dots,\lambda^n,\nu^0,\dots,\nu^n,\mu^0,\dots,\mu^n,\omega^0,\dots,\omega^{n-1}$ ֆունկցիաները, կստանանք ω^n-ի համար հավասարում (Ω^{2n+1} մոտավորություն): Բոլոր n-երի համար այդ հավասարումների ձախ մասերը համընկնում են.

$$\omega_{11}^n+\frac{4}{r}\omega_1^n+\frac{1}{r(r-2m)}(\omega_{22}^n+3\omega_2^n\,ctg\theta)=W^n(r,\theta)$$

($n=0$-ն համապատասխանում է Ω^1-ին, իսկ $n=1$-ը՝ Ω^3-ին):

Աջ մասը Ω^1 մոտավորությամբ կլինի՝

$$W^0(r,\theta)=0,$$

իսկ Ω^3-ով՝

$$W^1(r,\theta)=-\omega_1^0\left(2\mu_1^1-\frac{1}{2}\lambda_1^1-\frac{1}{2}\nu_1^1\right):$$

Որպեսզի հավասարման մեջ փոփոխականները անջատենք, ω^n-ը վերլուծենք շարքի ըստ Լեժանդրի բազմանդամների ածանցյալների.

$$\omega^n(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k^n(r)P_{k+1}^{(1)}(\cos\theta), \qquad P_k^{(1)}(\gamma)\equiv\frac{dP_k(\gamma)}{d\gamma}:$$

Հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\omega_{(k)|1}^n+\frac{4}{r}\omega_{(k)1}^n-\frac{k(k+3)}{r(r-2m)}\omega_{(k)}^n=W_k^n(r), \quad k=0,\ldots,2n,$$

$$W_k^0(r)=0,$$

$$W_k^1(r)=-\sum_{\ell=0,2}\omega_1^0\left[2\mu_{(\ell)1}^1-\frac{1}{2}\lambda_{(\ell)1}^1-\frac{1}{2}\nu_{(\ell)1}^1\right]\frac{\delta_{k,\ell}-\delta_{k,\ell-2}}{2\ell+1},$$

իսկ լուծումը կլինի՝

$$\omega_k^n=\frac{a_k^n}{r^{k+3}}F\left(k,k+3,2k+4;\frac{2m}{r}\right)+b_k^n r^k F\left(-k,-k-3,-2k-2;\frac{2m}{r}\right)+w_k^n(r):$$

Այստեղ a_k^n-ը և b_k^n-ը ինտեգրման հաստատուններ են: a_k^n-ը որոշվում է ներքին լուծման հետ կարման պայմաններից, իսկ անվերջությունում g_{03}-ի վերջավոր լինելու պայմանից ստացվում է, որ $b_k^n=0$: $w_k^n(r)$-ը հավասարման որևէ մասնավոր լուծում է: Ուստի վերջնական լուծումը կլինի

$$\boxed{\omega_k^n=\frac{a_k^n}{r^{k+3}}F\left(k,k+3,2k+4;\frac{2m}{r}\right)+w_k^n(r)},$$

$$w_0^0(r)=0$$

$$w_0^1(r)=\frac{3a_0^0A_0^1}{2r^4}-\frac{3a_0^0A_2^1}{16m^5r}\left[5-\frac{7m}{r}-\frac{40m^2}{3r^2}+\frac{2m^3}{r^3}+\frac{r}{m}\left(\frac{5}{2}-\frac{6m}{r}+\frac{4m^3}{r^3}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]-$$
$$-\frac{(a_0^0)^3}{10mr^6}\left(1-\frac{27m}{r}\right),$$

$$w_2^1(r)=-\frac{a_0^0A_2^1}{8m^4r^2}\left[3-\frac{2m}{r}-\frac{3m^2}{r^2}+\frac{r}{2m}\left(3+\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]-$$
$$-\frac{(a_0^0)^3}{60m^2r^5}\left(5+\frac{9m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right):$$

A_0^0 և A_2^0 հաստատունների մասին կասենք հաջորդ բաժնում:

$\Omega^2,\Omega^4,\ldots$ մոտավորություններ: Ω-ի զույգ աստիճան պարունակում են հետևյալ հավասարումները.

$$\begin{cases}G_1^1-G_0^0=0\\ G_2^2+G_3^3=0:\\ G_2^1=0\end{cases}$$

Այդ հավասարումների մեջ տեղադրելով նախորդ մոտավորություններից հայտնի $\lambda^0,\ldots,\lambda^{n-1},\nu^0,\ldots,\nu^{n-1},\mu^0,\ldots,\mu^{n-1},\omega^0,\ldots,\omega^{n-1}$ ֆունկցիաները, կստանանք λ^n, ν^n, μ^n ֆունկցիաների համար հավասարումներ (Ω^{2n} մոտավորություն): Բոլոր n-երի համար այդ հավասարումների ձախ մասերը համընկնում են:

$$\begin{cases} \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\mu^n_{11}+\frac{1}{r}\left(2\mu^n_1-\lambda^n_1-\nu^n_1\right)\right]+\frac{1}{2r^2}\left[\lambda^n_{22}-\nu^n_{22}+\left(\lambda^n_2-\nu^n_2\right)ctg\theta\right]=C^n(r,\theta), & (1) \\ \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\mu^n_{11}+\nu^n_{11}\right)+\frac{1}{r^2}\left[2(r-m)\mu^n_1-(r-m)\lambda^n_1+(r+m)\nu^n_1\right]+ & \\ \qquad +\frac{1}{2r^2}\left[\lambda^n_{22}+\nu^n_{22}+\left(\lambda^n_2+\nu^n_2\right)ctg\theta\right]=D^n(r,\theta), & (2) \\ \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\mu^n_{12}+\nu^n_{12}\right)-\frac{1}{r^2}\left[(r-m)\lambda^n_2+(r-3m)\nu^n_2\right]=E^n(r,\theta), & (3) \end{cases}$$

$$C^1(r,\theta)=0,$$

$$C^2(r,\theta)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mu^1_1\left(\mu^1_1-\lambda^1_1-\nu^1_1\right)-$$
$$-\frac{1}{2r^2}\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda^{12}_2-\nu^{12}_2\right)-\left(\mu^1-\lambda^1\right)\left[\lambda^1_{22}-\nu^1_{22}+\left(\lambda^1_2-\nu^1_2\right)ctg\theta\right]\right\},$$

$$D^1(r,\theta)=\frac{9(a^0_0)^2}{r^6}\sin^2\theta,$$

$$D^2(r,\theta)=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\mu^1_1\left(\mu^1_1-\lambda^1_1+\nu^1_1\right)-\nu^1_1\left(\lambda^1_1-\nu^1_1\right)\right]-$$
$$-\frac{1}{2r^2}\left\{\frac{1}{2}\left(\lambda^1_2+\nu^1_2\right)^2-\left(\mu^1-\lambda^1\right)\left[\lambda^1_{22}+\nu^1_{22}+\left(\lambda^1_2+\nu^1_2\right)ctg\theta\right]\right\}-$$
$$-\frac{3a^0_0}{r^2}\left[2\omega^1_1-\frac{3a^0_0}{r^4}\left(\mu^1-\nu^1\right)\right]\sin^2\theta,$$

$$E^1(r,\theta)=0,$$

$$E^2(r,\theta)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\lambda^1_2\left(\mu^1_1+\nu^1_1\right)+\nu^1_2\left(\mu^1_1-\nu^1_1\right)\right]-\frac{3a^0_0}{r^2}\omega^1_2\sin^2\theta:$$

Եթե (3) հավասարումը ինտեգրենք ըստ θ-ի, կստանանք μ^n-ը՝ կախված λ^n-ից և ν^n-ից.

$$\boxed{\mu^n_1=-\nu^n_1+\frac{r-m}{r(r-2m)}\lambda^n+\frac{r-3m}{r(r-2m)}\nu^n+M^n(r,\theta)},$$

$$M^1(r,\theta)=0$$

(այստեղ և հետագայում $n=2$-ին (որ նույնն է՝ Ω^4-ին) համապատասխանող ֆունկցիաները չեն բերված իրենց մեծ չափերի պատճառով):

Տեղադրենք ստացվածը (1) և (2) հավասարումների մեջ.

$$\begin{cases}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\nu''_{11}-\frac{m}{r(r-2m)}\lambda''_1+\frac{2r-3m}{r(r-2m)}\nu''_1-\frac{r^2-4mr+2m^2}{r^2(r-2m)^2}\lambda''-\frac{r^2-4mr+6m^2}{r^2(r-2m)^2}\nu''\right]- \\ \qquad -\frac{1}{2r^2}\left[\lambda''_{22}-\nu''_{22}+\left(\lambda''_2-\nu''_2\right)ctg\theta\right]=H''(r,\theta), & (4) \\ \lambda''+\nu''+\frac{1}{2}\left[\lambda''_{22}+\nu''_{22}+\left(\lambda''_2+\nu''_2\right)ctg\theta\right]=K''(r,\theta), & (5)\end{cases}$$

$$H^1(r,\theta)=0,$$

$$K^1(r,\theta)=\frac{9(a_0^0)^2}{r^4}\sin^2\theta:$$

Հավասարումների մեջ փոփոխականները անջատելու համար λ''-ը և ν''-ը վերլուծենք շարքի ըստ Լեժանդրի բազմանդամների.

$$\lambda''(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\lambda''_\ell(r)P_\ell(\cos\theta),$$

$$\nu''(r,\theta)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\nu''_\ell(r)P_\ell(\cos\theta)$$

և տեղադրենք (4) և (5) հավասարումների մեջ: Կստանանք՝

$$\begin{cases}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left[\nu''_{(\ell)11}-\frac{m}{r(r-2m)}\lambda''_{(\ell)1}+\frac{2r-3m}{r(r-2m)}\nu''_{(\ell)1}-\frac{r^2-4mr+2m^2}{r^2(r-2m)^2}\lambda''_\ell-\frac{r^2-4mr+6m^2}{r^2(r-2m)^2}\nu''_\ell\right]+ \\ \qquad +\frac{\ell(\ell+1)}{2r^2}\left(\lambda''_\ell-\nu''_\ell\right)=Q''_\ell(r), & (6) \\ \boxed{\lambda''_\ell=-\nu''_\ell+L''_\ell(r)}, \qquad \ell=0,\dots,2n, & (7)\end{cases}$$

$$Q_0^1(r)=0, \qquad Q_2^1(r)=0,$$

$$L_0^1(r)=\frac{6(a_0^0)^2}{r^4}, \qquad L_2^1(r)=\frac{3(a_0^0)^2}{r^4}:$$

Տեղադրելով λ''_ℓ-ը (6) հավասարման մեջ՝ վերջնականապես կստանանք հետևյալ հավասարումը.

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\nu''_{(\ell)11}+\frac{2(r-m)}{r^2}\nu''_{(\ell)1}-\left[\frac{4m^2}{r^3(r-2m)}+\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\nu''_\ell=N''_\ell(r),$$

$$N_0^1(r)=6(a_0^0)^2\frac{r^2-8mr+10m^2}{r^7(r-2m)},$$

$$N_2^1(r)=-6(a_0^0)^2\frac{r^2+mr-5m^2}{r^7(r-2m)},$$

որի լուծումն է

$$\nu''_\ell=\frac{A''}{r^\ell(r-2m)}F\left(\ell+1,\ell-1,2\ell+2;\frac{2m}{r}\right)+\frac{B''_\ell r^{\ell+1}}{r-2m}F\left(-\ell,-\ell-2,-2\ell;\frac{2m}{r}\right)+n''_\ell(r),$$

որտեղ A_ℓ^n-ը ու B_ℓ^n-ը ինտեգրման հաստատուններ են: A_ℓ^n-ը որոշվում է ներքին լուծման հետ կարման պայմաններից, իսկ անվերջությունում g_{00}-ի վերջավոր լինելու պայմանից ստացվում է, որ $B_\ell^n = 0$: Ուստի ν_ℓ^n-ի վերջնական տեսքը կլինի

$$\boxed{\nu_\ell^n = \frac{A_\ell^n}{r^\ell (r-2m)} F\left(\ell+1, \ell-1, 2\ell+2; \frac{2m}{r}\right) + n_\ell^n(r)},$$

$n_\ell^n(r)$-ը հավասարման որևէ մասնավոր լուծում է:

Ստորև բերվում են $n_\ell^n(r)$ ֆունկցիաները 2-րդ և 4-րդ մոտավորությունների համար.

$$n_0^1(r) = \frac{(a_0^0)^2}{2r^4} \frac{1-\dfrac{4m}{r}}{1-\dfrac{2m}{r}}, \qquad n_2^1(r) = \frac{(a_0^0)^2}{2mr^3} \frac{1-\dfrac{m}{r}-\dfrac{2m^2}{r^2}}{1-\dfrac{2m}{r}},$$

$$n_0^2(r) = -(A_0^1)^2 \frac{m}{r^3} \frac{1-\dfrac{m}{r}}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^3}\left(5 - 10\frac{m}{r} + 8\frac{m^2}{r^2}\right) +$$

$$+ (A_2^1)^2 \frac{5r^3}{128m^9}\left\{\frac{1-\dfrac{m}{r}}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^3}\left(189 - 1512\frac{m}{r} + 4464\frac{m^2}{r^2} - 5616\frac{m^3}{r^3} + 2172\frac{m^4}{r^4} + \right.\right.$$

$$\left. +528\frac{m^5}{r^5} + 16\frac{m^6}{r^6} + 64\frac{m^7}{r^7} - 320\frac{m^8}{r^8}\right) +$$

$$+ \frac{3r}{2m}\left(117 - 468\frac{m}{r} + 504\frac{m^2}{r^2} - 72\frac{m^3}{r^3} - 20\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right) +$$

$$\left. + \frac{81r^2}{2m^2}\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\right\} -$$

$$- A_0^1 A_2^1 \frac{5}{mr^3} \frac{1}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^3}\left(1 - 3\frac{m}{r} + 6\frac{m^2}{r^2} - 4\frac{m^3}{r^3}\right) -$$

$$-(a_0^0)^2 A_0^1 \frac{1}{4m^2r^3} \frac{1}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^3}\left(40 - 375\frac{m}{r} + 1074\frac{m^2}{r^2} - 364\frac{m^3}{r^3} - 3576\frac{m^4}{r^4} + 6384\frac{m^5}{r^5} - 3360\frac{m^6}{r^6}\right) -$$

$$-(a_0^0)^2 A_2^1 \frac{1}{16m^6 r}\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{2m}{r}\right)^3}\left(69 - 561\frac{m}{r} + 2834\frac{m^2}{r^2} - 14610\frac{m^3}{r^3} + 52380\frac{m^4}{r^4} - \right.\right.$$

$$-98688\frac{m^5}{r^5}+74592\frac{m^6}{r^6}+13152\frac{m^7}{r^7}-33600\frac{m^8}{r^8}\Bigg)+$$

$$+\frac{15r}{m}\left(1-6\frac{m}{r}+48\frac{m^2}{r^2}-166\frac{m^3}{r^3}+165\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\Bigg]-$$

$$-a_0^0a_0^1\frac{3}{m^2r^2}\left(1-\frac{8m}{r}+\frac{10m^2}{r^2}\right)-a_0^0a_2^1\left[\frac{2m}{r}\left(3+3\frac{m}{r}+4\frac{m^2}{r^2}+6\frac{m^3}{r^3}\right)-3\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]-$$

$$-(a_0^0)^4\frac{1}{20m^3r^5}\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^3}\Bigg(189-623\frac{m}{r}-324\frac{m^2}{r^2}-16944\frac{m^3}{r^3}+143520\frac{m^4}{r^4}-$$

$$-404052\frac{m^5}{r^5}+497880\frac{m^6}{r^6}-230400\frac{m^7}{r^7}\Bigg),$$

$$n_2^2(r)=-(A_2^1)^2\frac{75r}{448m^7}\frac{1}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}\left\{\frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(3-\frac{6m}{r}-\frac{2m^2}{r^2}\right)}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}\left(9-36\frac{m}{r}+41\frac{m^2}{r^2}-10\frac{m^3}{r^3}-2\frac{m^4}{r^4}\right)+\right.$$

$$+\frac{3r}{m}\left(12-48\frac{m}{r}+53\frac{m^2}{r^2}-10\frac{m^3}{r^3}-6\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+$$

$$\left.+\frac{45r^2}{4m^2}\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\right\}-$$

$$-A_0^1A_2^1\frac{15}{8m^3r}\left[\frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(3-12\frac{m}{r}+12\frac{m^2}{r^2}-4\frac{m^4}{r^4}\right)}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left(3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}\right)}+\frac{r}{2m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]+$$

$$+(a_0^0)^2A_0^1\frac{1}{2r^5}\frac{11+33\frac{m}{r}-96\frac{m^2}{r^2}}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}+$$

$$+(a_0^0)^2A_2^1\frac{3}{56m^4r^3}\frac{1}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}\Bigg[\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}\Bigg(150-177\frac{m}{r}-1964\frac{m^2}{r^2}+4340\frac{m^3}{r^3}-$$

$$-548\frac{m^4}{r^4}-2030\frac{m^5}{r^5}-1120\frac{m^6}{r^6}\Bigg)+$$

$$+\frac{5r}{2m}\left(33-246\frac{m^2}{r^2}+178\frac{m^3}{r^3}+150\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\Bigg]+$$

$$+a_0^0 a_0^1\frac{6}{r^4}\frac{1+\frac{m}{r}-5\frac{m^2}{r^2}}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}+$$

$$+a_0^0 a_2^1\frac{1}{7}\frac{1}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}\left[\frac{2}{5}\left(540-1845\frac{m}{r}+1485\frac{m^2}{r^2}+108\frac{m^4}{r^4}+148\frac{m^5}{r^5}+60\frac{m^6}{r^6}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3r}{m}\left(36-159\frac{m}{r}+210\frac{m^2}{r^2}-70\frac{m^3}{r^3}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]+$$

$$+(a_0^0)^4\frac{3}{28m^2r^6}\frac{1}{3-\frac{6m}{r}+\frac{2m^2}{r^2}}\left(20-277\frac{m}{r}+540\frac{m^2}{r^2}+937\frac{m^3}{r^3}-2079\frac{m^4}{r^4}\right),$$

$$n_4^2(r)=-(A_2^1)^2\frac{15r}{448m^7}\frac{1}{5-\frac{10m}{r}+\frac{m^2}{r^2}}\left\{\frac{\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(3-\frac{6m}{r}-\frac{2m^2}{r^2}\right)}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}\left(51-204\frac{m}{r}+230\frac{m^2}{r^2}-52\frac{m^3}{r^3}+12\frac{m^4}{r^4}\right)+\right.$$

$$+\frac{3r}{2m}\left(129-516\frac{m}{r}+568\frac{m^2}{r^2}-104\frac{m^3}{r^3}-40\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+$$

$$\left.+\frac{117r^2}{2m^2}\left(1-\frac{m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2\right\}-$$

$$+(a_0^0)^2A_2^1\frac{3}{224m^4r^3}\frac{1}{5-\frac{10m}{r}+\frac{m^2}{r^2}}\left[351-489\frac{m}{r}-356\frac{m^2}{r^2}-210\frac{m^3}{r^3}-336\frac{m^4}{r^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{5r}{2m}\left(81-168\frac{m}{r}-40\frac{m^2}{r^2}+64\frac{m^3}{r^3}+120\frac{m^4}{r^4}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]-$$

$$-a_0^0 a_2^1\frac{1}{7}\frac{1}{5-\frac{10m}{r}+\frac{m^2}{r^2}}\left[\frac{2}{5}\left(270-765\frac{m}{r}+375\frac{m^2}{r^2}+105\frac{m^3}{r^3}+89\frac{m^4}{r^4}+88\frac{m^5}{r^5}+30\frac{m^6}{r^6}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3r}{m}\left(18-69\frac{m}{r}+70\frac{m^2}{r^2}-7\frac{m^3}{r^3}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]-$$

$$-(a_0^0)^4\frac{1}{280m^2r^6}\frac{1}{5-\frac{10m}{r}+\frac{m^2}{r^2}}\left(300+689\frac{m}{r}-3359\frac{m^2}{r^2}+804\frac{m^3}{r^3}+1890\frac{m^4}{r^4}\right):$$

Հաստատուններ և ֆիզիկական մեծություններ: Մեր ստացած լուծումը անվերջությունում պետք է համընկնի Պապապետրուի հայտնի մետրիկայի հետ [13].

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2\left(1+\frac{2M-2m}{r}\right)\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - \frac{4I_z}{r}\sin^2\theta\, d\varphi dt,$$

որոնց համապատասխանությունից էլ պտտվող կոնֆիգուրացիայի M զանգվածի և իմպուլսի մոմենտի I_z բաղադրիչի համար կստանանք

$$M = m - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n A_0^n, \qquad I_z = -\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n a_0^n :$$

Բոլոր a_k^n և A_ℓ^n հաստատունները որոշվում են կոնֆիգուրացիայի սահմանի վրա ներքին լուծման հետ կարման պայմաններից: Զանգվածի և իմպուլսի մոմենտի մեջ մտնում են այդ հաստատունների միայն զրոյական անդամները: Մնացած բոլոր անդամները մտնում են քվադրուպոլ և ավելի բարձր կարգի մոմենտների մեջ:

Տեսական ֆիզիկայի ամբիոն *Ստացվել է 18.01.2006*

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Butterworth E.M., Ipser J.R.** – Astrophys. J., 1976, v. 204, p. 200.
2. **Komatsu H., Erguchi Y., Hachisu I.** – Mon. Not. R. Astron. Soc., 1989, v. 237, p. 355.
3. **Wu X., Müther H., Soffel M., Herold H., Ruder H.** – Astron. and Astrophys., 1991, v. 246, p. 411.
4. **Bonazzola S., Gourgoulhon E., Salgado M., Mark J.A.** – Astron. and Astrophys.., 1993, v. 278, p. 421.
5. **Седракян Д.М., Чубарян Э.В.** – Астрофизика, 1968, т. 4, с. 239 и с. 551.
6. **Hartle J.B.** – Ap. J., 1967, v. 150, p. 1005.
7. **Hartle J.B., Thorne K.S.** – Ap. J., 1968, v. 153, p. 807.
8. **Hewish A., Bell S.J., Pilkington J.D.H., Scott P.F., Collins R.A.** – Nature, 1968, v. 217, p. 709.
9. **Gold T.** – Nature, 1968, v. 218, p. 731 и 1969, v. 221, p. 25.
10. **Chubarian E., Grigorian H., Poghosyan G., Blaschke D.** – Astron. and Astrophys., 2000, v. 357, p. 968.
11. **Сторян Е.М., Чубарян Э.В., Папоян В.В.** – ДАН Арм. ССР, 1971, т. 53, с. 84.
12. **Hartle J.B., Sharp D.** – Ap. J., 1967, v. 147, p. 317.
13. **Papapetrou A.** – Proc. R. Irish Acd., 1948, v. 52, p. 11.

Г. Г. АБАЗЯН

АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ПОЛЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ЭЙНШТЕЙНА

Резюме

Предложен способ приближенного определения параметров стационарных аксиально-симметричных полей вращающихся конфигураций в третьем и четвертом приближениях по угловой скорости.

H. H. ABAZYAN

AXIAL-SYMMETRIC FIELDS IN THE FRAMEWORK OF EJNSTEIN THEORY

Summary

The method of approximate determination of parameters of stationary axial-symmetric fields of rotating configurations at the third and the forth approximation of angular velocity is proposed.