ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517.984.5

А. А. АСАТРЯН, И. Г. ХАЧАТРЯН

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Кортевега–де Фриза при начальном условии, заданном функцией, имеющей определенное поведение на бесконечности. Описывается построение решения этой задачи методом обратной задачи рассеяния в предположении, что оно существует и имеет в бесконечности такое же поведение, что и функция при начальном условии.

Рассмотрим уравнение Кортевега–де Фриза (описывающее движение волн в неглубокой воде)

$$\frac{\partial v}{\partial t}-6v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}=0 \tag{1}$$

относительно функции $v(x,t)$ $(x,t\in\mathbb{R})$ при условии

$$v(x,0)=v_0(x), \tag{2}$$

где функция $v_0(x)$ является трижды непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет соотношениям

$$v_0(x)=a^{\pm}+o(1)\quad (x\to\pm\infty \text{ соответственно}), \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{0}(1-x)\left|v_0(x)-a^-\right|dx+\int_{0}^{\infty}(1+x)\left|v_0(x)-a^+\right|dx<\infty \tag{4}$$

с некоторыми вещественными постоянными a^+,a^-.

Предположим, что задача (1), (2) имеет решение $v(x,t)$, которое при каждом t удовлетворяет соотношениям

$$v(x,t)=a^{\pm}+o(1)\quad (x\to\pm\infty \text{ соответственно}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=o(1)\quad (|x|\to\infty), \tag{6}$$

$$\int_{-\infty}^{0}(1-x)\left|v(x,t)-a^-\right|dx+\int_{0}^{\infty}(1+x)\left|v(x,t)-a^+\right|dx<\infty. \tag{7}$$

Кроме того, будем предполагать, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ существуют положительные числа δ, Δ и функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такие, что

$$\left|v(x,t)-a^+\right| \le f(x) \ \left(|t-\tau|<\delta, x>\Delta\right), \tag{8}$$

$$\left|v(x,t)-a^-\right| \le f(x) \ \left(|t-\tau|<\delta, x<-\Delta\right), \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| \le f(x) \ \left(|t-\tau|<\delta, |x|>\Delta\right). \tag{10}$$

В настоящей работе описывается построение решения $v(x,t)$ методом обратной задачи рассеяния. Для случая $a^+ = a^- = 0$ подобные исследования были проведены в [3, 4].

Пусть $v(x,t)$ – функция, которая имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \frac{\partial v}{\partial t}$ и при каждом фиксированном значении t удовлетворяет условиям (5)–(10). Обозначим $\mu_1 = \min\left\{a^+, a^-\right\}$, $\mu_2 = \max\left\{a^+, a^-\right\}$, $\lambda_j^{\pm}(\mu) = (-1)^{j-1}\sqrt{\mu - a^{\pm}}$ ($\mu \in \mathbb{C}$; $j = 1,2$; для корня берется главное значение). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + v(x,t)y = \mu y \tag{11}$$

относительно функции $y(x)$. Как известно (см. [1, 2]), для каждого $t \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{C} \setminus \left\{a^+, a^-\right\}$ уравнение (11) имеет две фундаментальные системы решений: $y_1^+(x,t,\mu), y_2^+(x,t,\mu)$ и $y_1^-(x,t,\mu)$, $y_2^-(x,t,\mu)$, для которых при $x \to \pm\infty$ соответственно выполняются асимптотические равенства

$$y_j^{\pm}(x,t,\mu) = e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}\left[1+o(1)\right], \quad j=1,2,$$

$$\frac{\partial y_j^{\pm}(x,t,\mu)}{\partial x} = i\lambda_j^{\pm}(\mu)e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}\left[1+o(1)\right], \quad j=1,2.$$

При этом для каждого отрезка $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ решения $y_j^{\pm}(x,t,\mu)$, $j=1,2$, можно выбирать так, чтобы существовали частные производные

$$\frac{\partial^{i+k} y_j^{\pm}(x,t,\mu)}{\partial t^i \partial x^k}, \frac{\partial^{i+k} y_j^{\pm}(x,t,\mu)}{\partial x^k \partial t^i} \quad \left(0 \le i \le 1, \ 0 \le k \le 2, \ 1 \le i+k \le 3\right),$$

которые вместе с $y_j^{\pm}(x,t,\mu)$ непрерывны по совокупности переменных x,t. Кроме того, при $x \to \pm\infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\frac{\partial y_j^{\pm}(x,t,\mu)}{\partial t} = o\left(e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}\right), \quad j=1,2.$$

Для каждого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через L_t действующий в $L^2(\mathbb{R})$ самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $-\frac{d^2y}{dx^2}+v(x,t)y$ (см. [1, 2]). Согласно [1], непрерывный спектр операторов L_t совпадает с полуосью $[\mu_1,\infty)$ и, следовательно, не зависит от параметра t.

Следуя [4], стр. 288, оператор $S_\mu : C^1(\mathbb{R}\times[t_0,t_1])\to C(\mathbb{R}\times[t_0,t_1])$ для $\mu\in\mathbb{C}$ определим формулой

$$S_\mu=\frac{\partial}{\partial t}-2\left[v(x,t)+2\mu\right]\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}.$$

Важным свойством оператора S_μ является то, что функции $S_\mu y_j^+(x,t,\mu)$, $j=1,2$, по переменной x являются решениями уравнения (11) тогда и только тогда, когда функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза.

Лемма. Если функция v удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза, то точечный спектр оператора L_t не зависит от параметра t.

Пусть $v(x,t)$ – решение уравнения Кортевега–де Фриза. Согласно результатам работы [2], при вышеуказанных условиях для оператора L_t вводятся правые данные рассеяния

$$\left\{T,\ N^+(t,\mu)\ \ (\mu\in T),\ S^+(t,\mu)\ \ \left(\mu\in(\mu_1,\mu_2)\cup(\mu_2,\infty)\right)\right\}, \tag{12}$$

где T – точечный спектр операторов L_t, который в силу леммы 2 не зависит от t, $N^+(t,\mu)$, $\mu\in T$, – положительные постоянные, а $S^+(t,\mu)$ – матрица рассеяния, которая является квадратной матрицей 1-го порядка при $a^-<\mu<a^+$ и квадратной матрицей 2-го порядка при $a^+<\mu<a^-$ и $\mu\in(\mu_2,\infty)$. Отметим также, что $S^+(t,\mu)$ – неотрицательная матрица, причем в случаях $a^+<\mu<a^-$ и $\mu\in(\mu_2,\infty)$ имеем

$$S_{11}^+(t,\mu)=S_{22}^+(t,\mu)=\lambda_1'^+(\mu),\ t\in\mathbb{R}, \tag{13}$$

так что в этих случаях матрица $S^+(t,\mu)$ полностью определяется элементом $S_{12}^+(t,\mu)$ (см. [2]).

Теорема. Если функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза, то справедливы следующие утверждения:

1) если $\mu\in T$, то

$$N^+(t,\mu)=N^+(0,\mu)e^{-4\left(a^++2\mu\right)\left|\lambda_1^+(\mu)\right|t}; \tag{14}$$

2) если $a^-<\mu<a^+$, то

$$S^+(t,\mu)=S^+(0,\mu)e^{-4\left(a^++2\mu\right)\left|\lambda_1^+(\mu)\right|t}; \tag{15}$$

3) если $a^+ < \mu < a^-$ или $\mu \in (\mu_2, \infty)$, то

$$S_{12}^+(t,\mu) = S_{12}^+(0,\mu) e^{-4i(a^+ + 2\mu)\lambda_1^+(\mu)t}. \tag{16}$$

Для случая $a^+ = a^- = 0$ лемма и теорема доказаны в [4], а для общего случая доказательство аналогично. При этом важную роль играет вышесказанный факт о том, что функции $S_\mu y_j^+(\cdot,\cdot,\mu)$, $j = 1,2$, являются решениями уравнения (11).

Для решения задачи (1), (2) сначала по заданной функции $v_0(x) = v(x,0)$ найдем данные рассеяния $\{T, N^+(0,\mu), \mu \in T, S^+(0,\mu) \ (\mu \in (\mu_1,\mu_2) \cup (\mu_2,\infty))\}$ оператора L_0. Далее, по формулам (14)–(16) находим данные рассеяния (12) оператора L_t. С помощью этих данных построим функцию

$$\tilde{F}^+(x,\xi,t) = \sum_{\mu \in T} \frac{N^+(t,\mu)}{\left|\lambda_1^+(\mu)\right|^2} \left(e^{ix\lambda_1^+(\mu)} - 1\right)\left(e^{i\xi\lambda_1^+(\mu)} - 1\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1}^{\infty} \sum_{\nu,j=1}^{1+r^+(\mu)} \frac{S_{j\nu}^+(t,\mu)}{\lambda_\nu^+(\mu)\overline{\lambda_j^+(\mu)}} \left(e^{ix\lambda_\nu^+(\mu)} - 1\right)\left(\overline{e^{i\xi\lambda_j^+(\mu)}} - 1\right) d\mu - \omega(x,\xi), \quad x,\xi,t \in \mathbb{R},$$

где

$$\omega(x,\xi) = \begin{cases} \min\{|x|,|\xi|\}, & x\xi \ge 0; \\ 0, & x\xi < 0; \end{cases}$$

а $r^+(\mu)$ означает половину количества вещественных корней уравнения $\lambda^2 + a^+ = \mu$. Согласно результатам работы [2], существует непрерывная по совокупности переменных x,ξ производная $F^+(x,\xi,t) = \dfrac{\partial^2 \tilde{F}^+(x,\xi,t)}{\partial x \partial \xi}$. При фиксированных $x,t \in \mathbb{R}$ рассмотрим интегральное уравнение

$$K(\xi) + F^+(x,\xi,t) + \int_x^\infty K(s) F^+(s,\xi,t)\, ds = 0 \quad (-\infty < x \le \xi < \infty)$$

относительно функции $K(\xi)$. Это уравнение имеет единственное решение $K^+(x,\xi,t)$ в любом из классов $L^p(x,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, и с помощью функции $K^+(x,\xi,t)$ решение $v(x,t)$ уравнения Кортевега–де Фриза определяется по формуле $v(x,t) = a^+ - 2\dfrac{d}{dx}K^+(x,x,t)$, где постоянная a^+, как это следует из (3), находится по формуле $a^+ = \lim\limits_{x\to\infty} v_0(x)$.

Из вышесказанного следует единственность рассматриваемого решения $v(x,t)$. Очевидно, вопрос существования решения задачи (1), (2) сводится к следующему: являются ли полученные величины T, $N^{+}(t,\mu)$ $(\mu \in T)$, $S^{+}(t,\mu)$ $(\mu \in (\mu_1,\mu_2) \cup (\mu_2,\infty))$ правыми данными рассеяния для оператора L_t с коэффициентом $v(x,t)$, удовлетворяющим условиям (5)–(10)? Однако его решение связано с определенными трудностями. Отметим, что для случая $a^{+} = a^{-} = 0$ подобное исследование проведено в [4].

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 31.03.2006*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Петросян А.Г.** – Ученые записки ЕГУ, 2003, № 3, с. 8–15.
2. **Асатрян А.А.** – Известия НАН Армении. Математика, 2005, т. 40, № 2, с. 15–28.
3. **Gardner G., Green J., Kruskal M., Miura R.** – Phys. Rev. Letters, 1967, v. 19, p. 1095–1098.
4. **Марченко В.А.** Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Հ. Ա. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԿՈՐՏԵՎԵԳԻ–ԴԸ ՖՐԻԶԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՑՐՄԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ԽՆԴՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Կորտևեգի–դը Ֆրիզի հավասարման համար դիտարկվում է անվերջությունում որոշակի վարք ունեցող ֆունկցիայով տրվող սկզբնական պայմանով Կոշու խնդիր: Ցրման հակադարձ խնդրի մեթոդով նկարագրվում է Կոշու խնդրի լուծման կառուցումը այն ենթադրությամբ, որ լուծումը գոյություն ունի և անվերջությունում օժտված է նույն վարքով, ինչով օժտված է սկզբնական պայմանում հանդես եկող ֆունկցիան:

H. A. ASATRYAN, I. G. KHACHATRYAN

SOLUTION OF THE KORTEWEG–DE VRIEZ EQUATION BY THE METHOD OF INVERSE SCATTERING PROBLEM

Summary

Cauchy's problem for the nonlinear Korteweg–de Vriez equation is considered with the initial condition given by function, having certain behaviour at infinity. Construction of the solution of this problem by the method of the inverse scattering problem is described provided that the solution exists and has the same behaviour at infinity, as the initial data.