ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2006 Естественные науки

Математика

УДК 517.948.25

Г. Г. СААКЯН

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе определяется характеристическая функция для матриц, позволяющая получить удобный для исследования вид характеристического уравнения для двупараметрического матричного уравнения.

Возникающие в математической физике двупараметрические задачи представляют собой особый интерес. Основные исследования в этой области связаны с выяснением спектральных свойств задачи (см., напр., [1, 2]).

В данной работе рассматривается двупараметрическое матричное уравнение

$$Ty = \lambda Ay + \mu By, \tag{1}$$

где T, A и B – вещественные матрицы порядка $n \times n$, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ – n-компонентная C^n-значная искомая вектор-функция, λ и μ – комплексные параметры.

Для исследования уравнения (1) могут оказаться полезными утверждения, приводимые в нижеизлагаемых лемме и теореме.

Определение 1. Функция $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ от матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется n-линейной функцией (n-линейной формой), если $G(A_1, A_2, \dots, A_n)$ есть линейная функция по каждому из аргументов A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ при фиксированных остальных аргументах $A_j, j \neq i$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Для удобства дальнейшего изложения будем пользоваться следующими обозначениями:

$$G\big(n(A_1 + A_2 + \dots + A_n)\big) = G\big(\underbrace{A_1 + A_2 + \dots + A_n, \dots, A_1 + A_2 + \dots + A_n}_{n}\big),$$

$$G(k_1 A_1, k_2 A_2, \dots, k_i A_i) = G(\underbrace{A_1, \dots, A_1}_{k_1}, \underbrace{A_2, \dots, A_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{A_i, \dots, A_i}_{k_i}),$$

причем в случае равенства одного из чисел k_j $(j=1,2,\dots,i)$ нулю будем считать, что соответствующий ему аргумент просто отсутствует (напр., под $G(0\cdot A_1,k_2A_2,\dots,k_iA_i)$ будем понимать $G(k_2A_2,\dots,k_iA_i)$).

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что верна

Лемма. Всякую n-линейную симметричную форму $G(A_1,A_2,\dots,A_n)$, определенную на множестве n-мерных матриц $(A_i\in M^{n,n}, i=1,2,\dots,n)$, можно представить в виде

$$G(A_1,A_2,\dots,A_n)=\frac{\sum\limits_{k=n}^{1}\sigma_k\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\dots<i_n\le k}G(n(A_{i_1}+A_{i_2}+\dots+A_{i_n})}{n!},\qquad(2)$$

где числовые множители σ_k определяются из следующих рекуррентных соотношений: $\sigma_1=(-1)^{n-1}$, $\sigma_k=-\sigma_{k-1}$ $(k=2,3,\dots,n)$.

В частности, приняв

$$G(nA)=G(\underbrace{A,A,\dots,A}_{n})=\det A$$

и учитывая свойство определителей, нетрудно показать, что в качестве симметричной n-линейной формы, определенной на множестве n-мерных матриц, можно рассматривать форму

$$G(A_1,A_2,\dots,A_n)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k\sum\limits_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n}\det\left(A_{i_1}+A_{i_2}+\dots+A_{i_k}\right)}{n!}\qquad(3а)$$

или

$$G(A_1,A_2,\dots,A_n)=\frac{1}{n!}\sum\sigma\cdot(a_{i_1j_1}\cdot a_{i_2j_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_nj_n}),\qquad(3б)$$

где $\sigma=sign(i_1,i_2,\dots,i_n)\cdot sign(j_1,j_2,\dots,j_n)$, $i_k,j_k=1,2,\dots,n$, причем элементы $a_{i_1j_1},a_{i_2j_2},\dots,a_{i_nj_n}$ выбираются из различных матриц и строк.

Заметим, что в случае трехмерных матриц соотношения (3а) и (3б) соответственно будут иметь вид:

$$G(A,B,C)=$$
$$=\frac{\det(A+B+C)-\det(A+B)-\det(A+C)-\det(B+C)+\det A+\det B+\det C}{3!},\qquad(4а)$$

$$G(A,B,C)=\qquad(4б)$$
$$=\frac{1}{3!}\sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\ne j\ne k}}^{3}\sigma(i,j,k)(a_{1i}b_{2j}c_{3k}+a_{1i}c_{2j}b_{3k}+b_{1i}a_{2j}c_{3k}+c_{1i}a_{2j}b_{3k}+b_{1i}c_{2j}a_{3k}+c_{1i}b_{2j}a_{3k}).$$

Определение 2. Если при $(\lambda,\mu)\in C^2$, $(\lambda,\mu)\ne(0,0)$, уравнение (1) имеет ненулевое решение, то (λ,μ) называется собственным значением уравнения

(1), *а соответствующее решение* $y(x)$ – *собственной функцией уравнения* (1), *соответствующей собственному значению* (λ, μ).

Для определения собственных значений уравнения (1) особую роль играет *характеристическое уравнение*, которое (см. [3]) можно записать в виде

$$\det(T - \lambda A - \mu B) = 0. \tag{5}$$

Имеет место

Теорема. Характеристическое уравнение (5) *в случае* n*-мерных матриц* A, B *и* T *можно представить в виде*

$$\sum_{\substack{m,k=0 \\ m+k \le n}}^{n} (-1)^{k+m} C_n^k C_{n-k}^m \lambda^k \mu^m G(kA, mB, (n-k-m)T) = 0. \tag{6}$$

Доказательство следует из равенства

$$\det(T - \lambda A - \mu B) = G(n(T - \lambda A - \mu B)) = 0$$

и n-линейности формы $G(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

В частности характеристическое уравнение (5) в случае $A, B, T \in M^{3,3}$ запишется в виде

$$-\lambda^3 G(A,A,A) - 3\lambda^2 \mu G(A,A,B) - 3\lambda\mu^2 G(A,B,B) - \mu^3 G(B,B,B) + 3\lambda^2 G(A,A,T) +$$
$$+3\mu^2 G(B,B,T) + 6\lambda\mu G(A,B,T) - 3\lambda G(A,T,T) - 3\mu G(B,T,T) + G(T,T,T) = 0,$$

где $G(A,B,C)$ определяется соотношением (4а).

Арцахский госуниверситет

Поступила 07.11.2005

ЛИТЕРАТУРА

1. **Binding P.A., Browne P.J.** Spectral properties of two parameter eigenvalue problems, II. Proc. R. Soc. Edinburg, 1987, v. 106A, p. 39–51.
2. **Browne P.J.** – Ordinary and Partial Differential Equations, 1989, v. II, p. 52–60.
3. **Саакян Г.Г.**–Կրթությունը և գիտությունը Արցախում, 2005, № 1–2, с. 152–155.
4. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
5. **Edwards C.H., David E.P.** Elementary Linear Algebra. New Jersey, 1988.

Գ.Հ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱՆՈՑ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԻՉ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում մատրիցների համար սահմանվում է բնութագրիչ ֆունկցիա, որը թույլ է տալիս երկպարամետրանոց մատրիցային հավասարման

համար ստանալ այնպիսի բնութագրիչ հավասարում, որը հետազոտման համար հարմար տեսք կունենա:

G. H. SAHAKYAN

ABOUT CHARACTERISTIC EQUATION FOR TWO-PARAMETER MATRIX EQUATION

Summary

In the work one characteristic function is defined for matrix, which allows to get comfortable form to study the characteristic equation for two-parameter matrix equation.