ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

А. Б. ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ КОШИ

В настоящей работе при помощи методов теории краевых задач аналитических функций строятся обобщенные собственные функции интегрального оператора, порожденного ядром Коши на конечном интервале. Далее выводятся формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье по этим собственным функциям, а затем на их основании строятся решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и постоянными коэффициентами.

1. Введение. В смешанных задачах об определении стационарного температурного поля в кусочно-однородных телах, в теории крыла конечного размаха (крыла самолета), в вопросах распространения трещин в кусочно-однородных телах и в разнообразных областях математической физики часто встречается сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши и постоянными коэффициентами:

$$b\varphi(x)+\frac{c}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)ds}{s-x}=f(x), \tag{1}$$

где b и c – известные постоянные, $\varphi(x)$ – неизвестная функция, а $f(x)$ – наперед заданная функция, принадлежащая классу Гелдера [1, 2].

Решение уравнения (1) в комплексных потенциалах, построенное в монографии [3], непосредственно неприменимо к исследованию закономерностей изменения решения уравнения (1) и получения числовых результатов. Задача обращения уравнения (1) в более общей постановке ранее обсуждалась в работах [4, 5], где приведена соответствующая формула обращения в различных функциональных пространствах. Более общие сингулярные интегральные уравнения рассматривались в [1, 2].

В настоящей работе предлагается другой способ решения уравнения (1), отличный от указанных. А именно, на основании результатов работ [6, 7] и при помощи методов теории краевых задач аналитических функций [1, 2] строятся обобщенные собственные функции интегрального оператора, порожденного ядром Коши на конечном интервале. Далее получаются формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье по этим собственным функциям. На основании последних строится решение интегрального уравнения

$$-ith(\pi\mu)\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds=f(x)\quad(-\infty<\mu<+\infty),\tag{2}$$

которое получается из (1). Уравнение (2) рассматривается при условии

$$\int_{-a}^{a}\varphi(s)ds=0\,.\tag{3}$$

Именно уравнение (2)–(3) часто встречается в указанных выше задачах. Решение уравнения (2) выражается в интегралах типа Коши. Предлагается эффективный способ вычисления таких интегралов, основанный на методе многочленов Чебышева.

2. Построение обобщенных собственных функций интегрального оператора с ядром Коши. Решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (2) представим в виде

$$\varphi(x)=(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\varphi_*(x),$$

где $\varphi_*(x)$ – определенная на $(-a,\ a)$ функция из класса Гелдера.

Построим его с помощью обобщенных собственных функций интегрального оператора S с ядром Коши:

$$S\varphi(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds.\tag{4}$$

Известно [8], что оператор (4), где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и средней квадратичной сходимости, в пространстве комплекснозначных функций $L^2(-a,a)$ является самосопряженным и ограниченным оператором ($\|S\|\le 1$). В этом направлении укажем также на монографии [9] и [10].

Построим обобщенные собственные функции оператора (4) с помощью методов теории краевых задач аналитических функций [1, 2]. Метод, изложенный здесь, несколько проще, чем метод, используемый в [6] с той же целью.

Вводим кусочно-голоморфную функцию

$$\varPhi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-z}ds$$

в комплексной плоскости $z=x+iy$ с разрезом $(-a,\ a)$ на действительной оси. Воспользуемся формулами Племеля–Сохоцкого [1, 2]:

$$\varPhi^+(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds,\tag{5а}$$

$$(-a<x<a)$$

$$\varPhi^-(x)=-\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds\,.\tag{5б}$$

Здесь $\varPhi^+(x)$ – краевое значение аналитической функции $\varPhi(z)$ на верхнем берегу разреза $(-a,\ a)$, т.е. при $z \to x+i0$, а $\Phi^{-}(x)$ – значение той же функции на нижнем берегу разреза $(-a,\ a)$, т.е при $z \to x-i0$.

Теперь для оператора (4) рассмотрим спектральное отношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds = \lambda\varphi(x) \qquad (|x|<1), \tag{6}$$

где $\lambda = th(\pi\mu)$ $(-\infty < \mu < +\infty)$. По формулам (5а), (5б) соотношение (6) можно записать в виде

$$\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x) = \lambda[\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)], \qquad x \in (-a,a),$$

откуда при помощи простых преобразований получим следующую простейшую однородную задачу сопряжения граничных значений аналитических функций:

$$\Phi^{+}(x) = g\Phi^{-}(x), \quad g = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad (\lambda = th(\pi\mu)), \tag{7}$$

где g – постоянное число. Для построения решения задачи (7) рассмотрим [1, 2] определенную в комплексной плоскости z с разрезом $(-a,\ a)$ на действительной оси функцию

$$X(z) = (z+a)^{-\gamma}(z-a)^{\gamma-1} \qquad (\gamma = \alpha + i\beta).$$

Эта функция многозначна, точнее, в каждой точке z она принимает бесконечное число значений. Возьмем ту однозначную аналитическую ветвь функции $X(z)$, которая в бесконечности ведет себя следующим образом:

$$X(z) \cong 1/z \qquad (z \to \infty).$$

Затем можем записать

$$z+a = |z+a|e^{i\vartheta},$$

$$(z+a)^{-\gamma} = e^{-\gamma\ln(z+a)} = e^{-\gamma\ln|z+a|}e^{-i\gamma\vartheta} = |z+a|^{-\gamma}e^{-i\gamma\vartheta} \ (\vartheta = \arg(z+a),\ 0 \le \vartheta < 2\pi).$$

Если около точки $z=-a$ сделать один полный оборот против часовой стрелки, то аргумент ϑ прирастет на 2π и станет $\vartheta+2\pi$. В результате функция $(z+a)^{-\gamma}$ приобретает множитель $e^{-2\pi i\gamma}$. Таким же образом функция

$$z-a = |z-a|e^{i\alpha},$$

$$(z-a)^{\gamma-1} = |z-a|^{\gamma-1}e^{i(\gamma-1)\alpha} \qquad (\alpha = \arg(z-a))$$

приобретает множитель $e^{-2\pi i\gamma}$, если около точки $z=a$ сделать один полный оборот по часовой стрелке. На основании сказанного будем иметь

$$X_{+}(x) = e^{2\pi i\gamma}X_{-}(x), \qquad x \in (-a,a). \tag{8}$$

Далее, по (7)

$$g = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = -\frac{1+th(\pi\mu)}{1-th(\pi\mu)} = -\frac{ch(\pi\mu)+sh(\pi\mu)}{ch(\pi\mu)-sh(\pi\mu)} = -\frac{e^{\pi\mu}}{e^{-\pi\mu}} = -e^{2\pi\mu}.$$

Приняв во внимание (8), теперь потребуем, чтобы имело место равенство

$$g = -e^{2\pi\mu} = e^{2\pi i\gamma},$$

откуда

$$\gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{\ln|g|}{2\pi i} + \frac{\vartheta}{2\pi}.$$

Здесь $\vartheta = \arg g$, причем $0 \le \vartheta < 2\pi$. Очевидно, что в данном случае $\vartheta = \pi$ и из последнего соотношения получим

$$\gamma = \frac{1}{2} - i\mu \quad (-\infty < \mu < +\infty).$$

Таким образом, решение однородной краевой задачи (7) имеет вид

$$\Phi(z) = X(z) = (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z+a)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \qquad (-\infty < \mu < +\infty), \tag{9}$$

причем эта кусочно-голоморфная функция определена в комплексной плоскости z, разрезанной по интервалу $(-a, a)$ действительной оси, и в бесконечно удаленной точке обладает поведением $1/z$.

Теперь при помощи (9) и (5а), (5б) получим решение однородного сингулярного интегрального уравнения (6). Из формул (5а), (5б) следует, что решение этого уравнения будет выражаться формулой

$$\varphi(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x) = X_+(x) - X_-(x), \quad x \in (-a, a).$$

Приняв во внимание граничные значения функции $X(x)$, из (9) получим

$$\varphi(x) = -e^{i\pi\gamma}(a-x)^{\gamma-1}(a+x)^{-\gamma} + e^{-i\pi\gamma}(a-x)^{\gamma-1}(a+x)^{-\gamma} =$$

$$= -(e^{i\pi\gamma} - e^{-i\pi\gamma})(a-x)^{\gamma-1}(a+x)^{-\gamma} = -2i\sin(\pi\gamma)(a-x)^{\gamma-1}(a+x)^{-\gamma} =$$

$$= -2i\sin(\pi(\frac{1}{2} - i\mu))(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} = -2i\cos(i\pi\mu)(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} =$$

$$= -2i\,ch(\pi\mu)(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}.$$

Окончательно,

$$\varphi(x) = \varphi_\mu(x) = (a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \quad x \in (-a, a). \tag{10}$$

Это выражение подставим в уравнение (6), которое и дает искомое спектральное соотношение

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+s)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{s-x}ds = th(\pi\mu)(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \tag{11}$$

$$(-a < x < a;\ -\infty < \mu < +\infty)$$

или же

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{\varphi_\mu(s)}{s-x}ds = th(\pi\mu)\varphi_\mu(x) \quad (-a < x < a;\ -\infty < \mu < +\infty), \tag{12}$$

где функция $\varphi_\mu(x)$ определяется формулой (10).

3. Решение сингулярного интегрального уравнения. Приступим к решению основного сингулярного интегрального уравнения (2)–(3). Делая замену переменных ($x = a\bar{x}$, $s = a\bar{s}$) и опуская черточки, приходим к интегральному уравнению

$$-ith(\pi\mu)\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds=f(x) \qquad (2а)$$

при условии

$$\int_{-1}^{1}\varphi(s)ds=0\,. \qquad (2б)$$

Поскольку в интегральном уравнении (2) или (2а) число $\lambda=th(\pi\mu)$ фиксировано, то для того чтобы избегать путаницы со спектральным параметром μ, впредь в равенстве (2а) положим $\mu=\mu_0$, т.е. вместо уравнения (2) или (2а) рассмотрим интегральное уравнение

$$-ith(\pi\mu_0)\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)}{s-x}ds=f(x) \qquad (13)$$

при условии (2б).

Чтобы построить решение этого интегрального уравнения, сначала получим формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье по обобщенным собственным функциям $\varphi_\mu(x)$ $(-\infty<\mu<+\infty)$. С этой целью воспользуемся следующими формулами Фурье–Планшерела в классе $L^2(-\infty,+\infty)$:

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}f(u)e^{i\mu u}du, \qquad (14а)$$

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)e^{-i\mu u}d\mu, \qquad (14б)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и средней квадратичной сходимости, причем имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(u)\right|^2du=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\mu)\right|^2d\mu\,.$$

В этих формулах перейдем к переменной u, положив

$$u=\ln((1+x)/(1-x)) \quad (-1<x<1)\,.$$

Так как $du=2dx/(1-x^2)$, то из (14а) будем иметь

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{\delta>0,\delta\to0}{l.i.m}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}f\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)e^{i\mu\ln\frac{1+x}{1-x}}\frac{2dx}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{\delta>0,\delta\to0}{l.i.m}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{2f\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\frac{e^{i\mu\ln\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{\delta>0,\delta\to0}{l.i.m}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{2f\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dx\,.$$

Теперь с учетом (10), где следует положить $a=1$, получим

$$F(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{\delta>0,\delta\to 0}{l.i.m}\int_{-1+\delta}^{1-\delta} g(x)\varphi_\mu(x)dx, \tag{15а}$$

$$g(x)=2f(\ln(1+x)/(1-x))/\sqrt{1-x^2}. \tag{15б}$$

Преобразуем также формулу (14б):

$$f\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)e^{-i\mu\ln\frac{1+x}{1-x}}d\mu=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)\sqrt{1-x^2}\,\frac{e^{-i\mu\ln\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{1-x^2}}d\mu=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)(1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}d\mu=\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)\varphi_{-\mu}(x)d\mu.$$

Итак,

$$f\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)\varphi_{-\mu}(x)d\mu \quad (-1<x<1).$$

После перехода к функции $g(x)$ по (15б) эта формула примет вид

$$g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\underset{N\to\infty}{l.i.m}\int_{-N}^{N}F(\mu)\varphi_{-\mu}(x)d\mu \qquad (-1<x<1). \tag{16}$$

Теперь в формулах (15)–(16) функцию $\sqrt{2\pi}F(\mu)$ заменим на функцию $G(\mu)$, после чего получим следующие обобщенные формулы интегрального преобразования Фурье по обобщенным собственным функциям $\varphi_\mu(x)$ оператора Коши S:

$$G(\mu)=\underset{\delta>0,\delta\to 0}{l.i.m}\int_{-1+\delta}^{1-\delta}g(x)\varphi_\mu(x)dx, \tag{17а}$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}G(\mu)\varphi_{-\mu}(x)d\mu. \tag{17б}$$

При этом уравнение Парсеваля примет следующую форму:

$$\int_{-1}^{1}|g(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(\mu)|^2d\mu.$$

(17а) и (17б) – формулы разложения произвольной функции $g(x)\in L^2(-1,1)$ по функциям $\varphi_\mu(x)$. В (17а), (17б) заменяя μ на $-\mu$, приходим к следующим эквивалентным формулам:

$$G(\mu)=\int_{-1}^{1}g(x)\varphi_{-\mu}(x)dx, \tag{18а}$$

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\mu)\varphi_\mu(x)d\mu. \tag{18б}$$

Далее перейдем к решению интегрального уравнения (13) при условии (2б). Исходя из формулы (18б) решение этого интегрального уравнения представим следующим интегралом:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu \qquad (-1<x<1), \tag{19}$$

где $\Phi(\mu)$ – неизвестная функция. Для определения этой функции интеграл (19) подставим в интегральное уравнение (13):

$$-\frac{i}{\pi}th(\pi\mu_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d(s)}{s-x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(s)\Phi(\mu)d\mu=f(x)\quad(-1<x<1).$$

Затем, во втором интеграле изменяя порядок интегрирования, законность которого вытекает из известной формулы Пуанкаре–Бертрана [2], и пользуясь спектральным соотношением $a=1$ для (12), получим

$$-\frac{i}{\pi}th(\pi\mu_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu+\frac{1}{\pi}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\mu)d\mu\int\limits_{-1}^{1}\frac{\varphi_\mu(s)}{s-x}ds=$$

$$=-\frac{i}{\pi}th(\pi\mu_0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ith(\pi\mu)\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu=f(x)$$

и, следовательно,

$$\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0))\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu=f(x)\quad(-1<x<1).\tag{20}$$

Итак, для определения неизвестной функции $\Phi(\mu)$ получили интегральное уравнение (20), решение которого должно удовлетворять определенному условию (2б). Требуя, чтобы искомое решение (19) также удовлетворяло условию (2б), получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_\mu(x)\Phi(\mu)d\mu=0,$$

откуда изменением порядка интегрирования находим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(\mu)}{ch(\pi\mu)}d\mu=0.\tag{21}$$

Здесь было использовано выражение известного интеграла [11,12]:

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}dx=\frac{\pi}{ch(\pi\mu)}\qquad(-\infty<\mu<+\infty).$$

Итак, решение интегрального уравнении (20) должно удовлетворять условию (21).

Теперь при помощи (18а) обратим интегральное уравнение (20):

$$i[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]\Phi(\mu)=F(\mu)\qquad(-\infty<\mu<+\infty),\tag{22}$$

где

$$F(\mu)=\int\limits_{-1}^{1}\varphi_{-\mu}(x)f(x)dx.\tag{23}$$

Решение уравнения (22) равно сумме общего решения однородного уравнения (когда $F(\mu)\equiv 0$) и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение в классе обобщенных функций обладает решением

$$\Phi_0(\mu)=C\delta(\mu-\mu_0)\qquad(-\infty<\mu<+\infty),$$

где C – произвольная постоянная, а $\delta(\mu)$ – известная дельта-функция Дирака. Следовательно, общее решение уравнения (22) имеет вид:

$$\Phi(\mu) = C\delta(\mu-\mu_0) + \frac{F(\mu)}{i[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]} \quad (-\infty < \mu < +\infty). \qquad (24)$$

Неизвестная постоянная C определяется из условия (21), откуда получим

$$\frac{C}{ch(\pi\mu_0)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\mu)}{i[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)} d\mu = 0,$$

где интеграл в бесконечности и в точке $\mu = \mu_0$ следует понимать в смысле главного значения по Коши. Из последнего равенства

$$C = ich(\pi\mu_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\mu)}{[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)} d\mu. \qquad (25)$$

Теперь с помощью (24) и обратного преобразования (18б) получим

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_\mu(x)F(\mu)}{th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)} d\mu \quad (-1 < x < 1), \qquad (26)$$

где постоянная C выражается интегралом (25).

Итак, решение сингулярного интегрального уравнения (13) дается формулами (23), (25) и (26).

Преобразуем формулу (26), подставив в нее выражение функции $F(\mu)$ из (23). Затем, изменяя порядок интегрирования, получим

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} K(x,s) f(s) ds \qquad (-1 < x < 1), \qquad (27)$$

где введено ядро

$$K(x,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_\mu(x)\varphi_{-\mu}(s)}{th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)} d\mu \qquad (-1 < x, s < 1). \qquad (28)$$

Подчеркнем, что в формулах (26) и (27) функция $C\varphi_{\mu_0}(x)/\pi$ – решение однородного (когда $f(x) \equiv 0$) сингулярного уравнения (13).

Теперь преобразуем формулу (25) для постоянной C и формулу (28) для ядра $K(x,s)$. Учитывая (23), из (25) можем записать

$$C = ich(\pi\mu_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)} \int_{-1}^{1} \varphi_{-\mu}(x) f(x) dx =$$

$$= ich(\pi\mu_0) \int_{-1}^{1} f(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{-\mu}(x)d\mu}{[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)}$$

и, обозначив

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{-\mu}(x)d\mu}{[th(\pi\mu) - th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)} \qquad (-1 < x < 1), \qquad (29а)$$

получим

$$C = ich(\pi\mu_0) \int_{-1}^{1} \Phi_0(x) f(x) dx. \qquad (29б)$$

Продолжим преобразование функции $\Phi_0(x)$ из (29а), подставив $\varphi_{-\mu}(x)$ из (10) $(a = 1, \mu \to -\mu)$:

$$\varPhi_0(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)}d\mu=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\mu}}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)}d\mu=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu\ln\frac{1-x}{1+x}}}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)}d\mu.$$

Поэтому

$$\varPhi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu y}}{[th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)]ch(\pi\mu)}d\mu,\ y=\ln\frac{1-x}{1+x}\quad(-1<x<1).$$

Или же

$$\varPhi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu y}ch(\pi\mu_0)}{sh(\pi\mu)ch(\pi\mu_0)-ch(\pi\mu)sh(\pi\mu_0)}d\mu=\frac{ch(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu y}}{sh\pi(\mu-\mu_0)}d\mu.$$

Обозначив $\mu-\mu_0=\lambda$, получим

$$\varPhi_0(x)=\frac{ch(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iy(\mu_0+\lambda)}}{sh(\pi\lambda)}d\lambda=\frac{ch(\pi\mu_0)e^{i\mu_0 y}}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda y}}{sh(\pi\lambda)}d\lambda=$$

$$=\frac{ch(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}e^{i\mu_0 y}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{i\lambda y}}{sh(\pi\lambda)}d\lambda+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda y}}{sh(\pi\lambda)}d\lambda\right],$$

и если теперь в первом слагаемом заменить λ на $-\lambda$, то находим

$$\varPhi_0(x)=\frac{2ich(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}e^{i\mu_0 y}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\lambda y)}{sh(\pi\lambda)}d\lambda.$$

Последний интеграл сможем вычислить по теории вычетов или воспользуемся известным выражением этого интеграла [13] (стр. 85, 2.9 (2)):

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\lambda y)}{sh(\pi\lambda)}d\lambda=\frac{1}{2}th\frac{y}{2}.$$

Так как $y=\ln((1-x)/(1+x))$, то

$$\varPhi_0(x)=\frac{2ich(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}e^{i\mu_0 y}\,\frac{1}{2}th\frac{y}{2}=\frac{ich(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}e^{i\mu_0\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}th\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)=$$

$$=\frac{ich(\pi\mu_0)}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\mu_0}\frac{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}-e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}}{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}+e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}}=-ich(\pi\mu_0)x\varphi_{-\mu_0}(x).$$

Итак,

$$\varPhi_0(x)=-ich(\pi\mu_0)x\varphi_{-\mu_0}(x)=-ich(\pi\mu_0)x(1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}\quad(-1<x<1).$$

Наконец, из формул (29а), (29б) получим

$$C=ch^2(\pi\mu_0)\int\limits_{-1}^{1}\varphi_{-\mu_0}(x)xf(x)dx=ch^2(\pi\mu_0)\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}xf(x)dx.\quad(30)$$

Теперь вычислим ядро $K(x,s)$ по (28). Пользуясь выражением (10), можем записать

$$K(x,s)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-s^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left((1+x)/(1-x)\right)^{i\mu}\left((1+s)/(1-s)\right)^{-i\mu}}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}d\mu=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-s^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu(u-v)}d\mu}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)},\qquad(31)$$

$$u=\ln((1+x)/(1-x)),\quad v=\ln((1+s)/(1-s)).$$

Исходя из (31), преобразуем следующий интеграл, который рассматривается в рамках теории обобщенных функций [14]:

$$K_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu t}d\mu}{th(\pi\mu)-th(\pi\mu_0)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch(\pi\mu)ch(\pi\mu_0)e^{i\mu t}}{sh\pi(\mu-\mu_0)}d\mu=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ch(\pi(\mu-\mu_0)+\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)e^{i\mu t}}{sh\pi(\mu-\mu_0)}d\mu=ch^2(\pi\mu_0)\int_{-\infty}^{+\infty}cth(\pi(\mu-\mu_0))e^{i\mu t}d\mu+$$

$$+sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\mu t}d\mu.$$

Но [14] $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\mu t}d\mu=2\pi\delta(t)$, и поэтому

$$K_0(t)=ch^2(\pi\mu_0)\int_{-\infty}^{+\infty}cth[\pi(\mu-\mu_0)]e^{i\mu t}d\mu+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t).$$

Учитывая обозначение $\mu-\mu_0=\lambda$, можем записать

$$K_0(t)=ch^2(\pi\mu_0)\int_{-\infty}^{+\infty}cth(\pi\lambda)e^{i(\mu_0+\lambda)t}d\lambda+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t)=$$

$$=e^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)\int_{-\infty}^{+\infty}cth(\pi\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t)=$$

$$=2ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)\int_{0}^{+\infty}cth(\pi\lambda)\sin(\lambda t)d\lambda+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t)=$$

$$=2ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)\int_{0}^{+\infty}[cth(\pi\lambda)-1]\sin(\lambda t)d\lambda+2ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)\int_{0}^{+\infty}\sin(\lambda t)d\lambda+$$

$$+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t).$$

Затем используем известные интегралы [11, 13, 14]

$$\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda t d\lambda=\frac{1}{t},\quad \int_{0}^{+\infty}[cth(\pi\lambda)-1]\sin\lambda t d\lambda=\frac{1}{2}cth\frac{t}{2}-\frac{1}{t},$$

с помощью которых получим

$$K_0(t)=2ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)(\frac{1}{2}cth\frac{t}{2}-\frac{1}{t})+2ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)\frac{1}{t}+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t)$$

или $K_0(t)=ie^{i\mu_0 t}ch^2(\pi\mu_0)cth\frac{t}{2}+2\pi sh(\pi\mu_0)ch(\pi\mu_0)\delta(t).$

Имея ввиду, что $t = u - v$, из (31) будем иметь

$$K(x,s) = -ich^2(\pi\mu_0)\varphi_{\mu_0}(x)\varphi_{-\mu_0}(s)\frac{1-xs}{1-x} + \pi sh(2\pi\mu_0)\delta\left(\ln\frac{1+x}{1-x} - \ln\frac{1+s}{1-s}\right) \qquad (32)$$

$$(-1 < x,s < 1).$$

Итак, ядро $K(x,s)$ выражается формулой (32), подставляя которое в (27) получим

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x) - \frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}\frac{1-xs}{s-x}\varphi_{-\mu_0}(s)f(s)ds -$$
$$- ish(2\pi\mu_0)\int_{-1}^{1}\delta\left(\ln\frac{1+x}{1-x} - \ln\frac{1+s}{1-s}\right)f(s)ds \quad (-1 < x < 1). \qquad (33)$$

Отдельно вычислим интеграл

$$F_0(x) = -ish(2\pi\mu_0)\int_{-1}^{1}\delta\left(\ln\frac{1+x}{1-x} - \ln\frac{1+s}{1-s}\right)f(s)ds.$$

Так как $\ln((1+x)/(1-x)) \sim 2x \ (x \to 0)$, $\ln((1+s)/(1-s)) \sim 2s \ (s \to 0)$, то

$$F_0(x) = -ish(2\pi\mu_0)\int_{-1}^{1}\delta(2(x-s))f(s)ds.$$

После замены переменных $x = t/2$, $s = u/2$ получим

$$F_0(x) = -ish(2\pi\mu_0)\int_{-2}^{2}\delta(t-u)f(\frac{u}{2})\frac{du}{2} = -\frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x). \qquad (34)$$

С учетом (34) формула (33) приобретает вид

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x) - \frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x) - \frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}\frac{1-xs}{s-x}\varphi_{-\mu_0}(s)f(s)ds \qquad (35)$$

$$(-1 < x < 1).$$

Теперь преобразуем выражение

$$(1-xs)/(s-x) = (1-(x-s+s)s)/(s-x) = (1-(x-s)s-s^2)/(s-x) =$$
$$= (1-s^2)/(s-x) + s,$$

с помощью которого формула (35) переходит в формулу

$$\varphi(x) = \frac{C}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x) - \frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x) - \frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}s\varphi_{-\mu_0}(s)f(s)ds -$$
$$- \frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}(1-s^2)\varphi_{-\mu_0}(s)\frac{f(s)ds}{s-x} \qquad (-1 < x < 1). \qquad (36)$$

Подставив в (36) выражение постоянной C из (30), окончательно получим

$$\varphi(x) = -\frac{i}{2}sh(2\pi\mu_0)f(x) - \frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}\varphi_{\mu_0}(x)\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)\varphi_{-\mu_0}(s)}{s-x}f(s)ds \quad (-1 < x < 1). \qquad (37)$$

Таким образом, искомое решение сингулярного интегрального уравнения (2)–(3) или (13)–(15) выражается формулой (37), причем функция $\varphi_{\mu_0}(x)$

задается формулой (10), где $\mu = \mu_0$, $a = 1$. Подставляя эту функцию в (37), приходим к формуле

$$\varphi(x) = -\frac{i}{2} sh(2\pi\mu_0) f(x) -$$
$$-\frac{ch^2(\pi\mu_0)}{\pi}(1-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+s)^{\frac{1}{2}-i\mu_0}}{s-x} f(s)ds \ (-1<x<1), \tag{38}$$

где подчеркнем еще раз, что в точке $s = x$ интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

4. Числовые результаты. Из формулы (37) функцию

$\varphi_{-\mu_0}(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+x)^{-\frac{1}{2}-i\mu_0}$ преобразуем следующим образом:

$$\varphi_{-\mu_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{i\mu_0 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\cos\left(\mu_0 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) + i\sin\left(\mu_0 \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)\right) \ (-1<x<1).$$

Отсюда следует, что функция $\varphi_{-\mu_0}(x)$, бесконечно меняя знак при $x \to \pm 1$, т.е. колеблясь, становится бесконечной. Это известно как явление осцилляции и характерно для решения сингулярного интегрального уравнения второго рода с ядром Коши. При наличии функции $\varphi_{-\mu_0}(x)$ в интегралах с ядром Коши значительно затрудняется их эффективное вычисление. Однако если в интеграле (38) положить

$$\varphi^*_{\mu_0}(x) = (1-x^2)\varphi_{-\mu_0}(x) \qquad (-1<x<1),$$

где $\varphi^*_{\mu_0}(x)$ – ограниченная на $-1 \le x \le 1$ функция, то она, опять бесконечно колеблясь, стремится к нулю при $x \to \pm 1$. Это обстоятельство дает возможность вычислить входящий в (38) интеграл при помощи квадратурной формулы Гаусса для вычисления сингулярного интеграла с ядром Коши, используя при этом корни многочлена Чебышева второго рода как узлы [15,16].

Действительно, входящий в формулу (38) интеграл

$$I(x,\mu_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s)^{\frac{1}{2}+i\mu_0}(1+s)^{\frac{1}{2}-i\mu_0}}{s-x} f(s)ds \quad (-1<x<1) \tag{39}$$

представим в виде

$$I(x,\mu_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-s^2}\,g(s)}{s-x}ds, \tag{40а}$$

$$g(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{i\mu_0} f(x). \tag{40б}$$

Затем интеграл (40а) вычислим при помощи квадратурной формулы Гаусса [16]:

$$U_M(s)=\frac{\sin((M+1)\arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}=\frac{\sin(M+1)t}{\sin t}\quad (s=\cos t,\quad M=0,1,2\ldots),$$
$$s_m=\cos(\frac{\pi m}{M+1})\quad (m=\overline{1,M}). \tag{41}$$
При этом для интеграла (39) или (40а) получим:
$$I(x_r,\mu_0)=\frac{1}{M+1}\sum_{m=1}^{M}\frac{g(s_m)\sin^2\left(\frac{\pi m}{M+1}\right)}{s_m-x_r}\quad (r=\overline{1,M+1}), \tag{42}$$
где из (40б)
$$g(s_m)=\left(\frac{1-s_m}{1+s_m}\right)^{i\mu_0}f(s_m)\quad (m=\overline{1,M}), \tag{43}$$
а узлы
$$x_r=\cos\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(M+1)}\right)\quad (r=\overline{1,M+1}) \tag{44}$$
есть корни многочлена Чебышева первого рода:
$$T_{M+1}(x)=\cos((M+1)\arccos x)=\cos((M+1)t)\quad (x=\cos t)\,.$$
Взяв в качестве M разные натуральные числа, по формуле (42) и при помощи формул (41), (43) и (44) сможем вычислить интеграл $I(x_r,\mu_0)$ в узлах x_r с достаточно большой точностью. Для простоты правую часть сингулярного интегрального уравнения возьмем в виде
$$f(x)=x^n\quad (n=0,1,2,\ldots)\,.$$
При этом, согласно (43),
$$g(s_m)=\left(\frac{1-s_m}{1+s_m}\right)^{i\mu_0}s_m^n\quad (m=\overline{1,M},n=0,1,2,\ldots).$$
Автор благодарит проф. С.М. Мхитаряна за предложенную тематику и помощь в работе, а также А.Г. Камаляна за ценные замечания при рецензировании.

Кафедра прикладного анализа

Поступила 18.11.2005,
после доработки 02.10.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. **Михлин С.Г.** Интегральные уравнения. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1949.
4. **Gohberg I., Krupnik N.** – General Theory and Applications. Birhauser Verlag, 1992, v. 11.
5. **Дудучава Р.В.** – Труды Тбилисского мат. института, 1973, т. LX, с. 12–13.
6. **Koppelman W., Pincus T.D.** – Math Z., Bd. 71, 1959, № 4, p. 399–407.
7. **Мхитарян С.М.** – Матем. исследования, 1969, т. 4, вып. 1, с. 98–109.
8. **Ицкович И.А.** – Ученые записи Кишиневского госунта, вып. физ.-мат.,1952, т.V, с.37–42.

9. **Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.** Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиница, 1973.
10. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека. М.: Наука, 1968.
11. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т II. М.: Наука, 1966.
12. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
13. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Т. I. М.: Наука, 1969.
14. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Второй спец. курс. М.: Наука, 1965.
15. **Theocaris P.S., Laokimidis N.I.** – Appl. Math, 1977, v. XXXV, № 1, p. 173–185.
16. **Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976.

Հ. Բ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ԿՈՇՈՒ ԿՈՐԻԶՈՎ ՍԻՆԳՈՒԼՅԱՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Այս աշխատանքում անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային խնդիրների տեսության մեթոդների օգնությամբ կառուցվում են վերջավոր ինտերվալում Կոշու կորիզով ինտեգրալ օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաները: Այնուհետև ըստ այդ սեփական ֆունկցիաների ստացվում են Ֆուրյեի ընդհանրացված ինտեգրալային ձևափոխության բանաձևերը և նրանց հիման վրա կառուցվում է Կոշու կորիզով և հաստատուն գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումը:

A. B. GRIGORYAN

A METHOD OF CONSTRUCTION OF THE SOLUTION OF SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH CAUCHY KERNEL

Summary

Basing on the methods of the theory of boundary-value problems for analytic functions, the paper constructs generalized eigenfunctions of integral operator generating by Cauchy kernel in a finite interval. Further formulas for generalized integral Fourier transform by these eigenfunctions are obtained. Then the results are applied to construct solutions of singular integral equations with Cauchy kernel and constant coefficients.