ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2007 Естественные науки

Механика

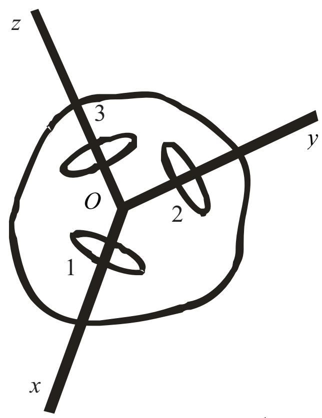
УДК 517.934

В. Н. ГРИШКЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В данной работе рассматривается механическая система – твердое тело с маховиками внутри. Система находится под действием диссипативных сил. Показано, что положение равновесия системы, независимо от вращения маховиков, асимптотически устойчиво. А также исследована устойчивость системы при полной и частичной диссипации, когда система вращается вокруг одной оси.

Введение. Задачи устойчивости динамических систем при разных возмущающих факторах были рассмотрены многими авторами. Одними из первых были Н.Г. Четаев [1], И.Г. Малкин [2], Н.Н. Красовский [3] и др., которые придали большое теоретическое и прикладное значение теории устойчивости при возмущающих факторах. В работе [1] рассмотрено влияние малых возмущающих сил на устойчивость движения динамической системы. В [2] доказана теорема об устойчивости при постоянно действующих малых возмущениях. В [3] определены достаточные условия, при которых решается задача устойчивости при постоянно действующих ограниченных возмущениях. В работах [4, 5] изучается влияние структуры сил на устойчивость движения, в [4] также получены условия устойчивости при параметрических возмущениях.



1. Рассмотрим твердое тело с точкой O, расположенной в его центре масс. Пусть на главных осях инерции тела x, y, z расположены три однородных симметричных маховика (см. рисунок). Предположим, что маховики вращаются с постоянными угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Пусть p, q, r – проекции абсолютной мгновенной угловой скорости вращения тела на оси x, y, z соответственно. Попробуем найти условия, при выполнении которых вращательное движение системы будет устойчиво.

Проекции моментов количества движения этой системы на x, y, z имеют следующий вид:

$$\begin{cases} G_x = I_{xx} p + I_{1xx}(\omega_1 + p), \\ G_y = I_{yy} q + I_{2yy}(\omega_2 + q), \\ G_z = I_{zz} r + I_{3zz}(\omega_3 + r), \end{cases} \tag{1}$$

где $I_{1xx}, I_{2yy}, I_{3zz}$ – моменты инерции маховиков, а I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции тела. Запишем динамические уравнения Эйлера [6] для движения рассматриваемой системы:

$$\begin{cases} I_{xx}\dfrac{dp}{dt} + I_{1xx}\dfrac{d(\omega_1 + p)}{dt} + (I_{zz} + I_{3zz} - I_{yy} - I_{2yy})qr = I_{2yy} r\omega_2 - I_{3zz} q\omega_3, \\ I_{yy}\dfrac{dq}{dt} + I_{2yyx}\dfrac{d(\omega_2 + q)}{dt} + (I_{xx} + I_{1xx} - I_{zz} - I_{3zz})pr = I_{3zz} p\omega_3 - I_{1xx} r\omega_1, \\ I_{zz}\dfrac{dr}{dt} + I_{3zz}\dfrac{d(\omega_3 + r)}{dt} + (I_{yy} + I_{2yy} - I_{xx} - I_{1xx})pq = I_{1xx} q\omega_1 - I_{2yy} p\omega_2. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагая, что величины $I_{1xx}, I_{2yy}, I_{3zz}$ малы по сравнению с I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, можем принять $I_{xx} \pm I_{1xx} \approx I_{xx}, I_{yy} \pm I_{2yy} \approx I_{yy}, I_{zz} \pm I_{3zz} \approx I_{zz}$. Тогда динамические уравнения Эйлера примут следующий вид:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = br\omega_2 - cq\omega_3, \\ B\dot{q} + (A - C)pr = cp\omega_3 - ar\omega_1, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = aq\omega_1 - bp\omega_2, \end{cases}$$

(3)

где $A = I_{xx}$, $B = I_{yy}$, $C = I_{zz}$, $a = I_{1xx}$, $b = I_{2yy}$, $c = I_{3zz}$. Добавим к системе компоненты диссипативных сил $-k_1 p, -k_2 q, -k_3 r,$ действующих на систему, где $-k_i$, $i = 1,2,3$, – коэффициенты диссипации. Получим

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = br\omega_2 - cq\omega_3 - k_1 p, \\ B\dot{q} + (A - C)pr = cp\omega_3 - ar\omega_1 - k_2 q, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = aq\omega_1 - bp\omega_2 - k_3 r. \end{cases}$$

(4)

Дифференциальные уравнения возмущенного движения, соответствующие решению (4) $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} A\dot{x}_1 + (C - B)x_2 x_3 = bx_3\omega_2 - cx_2\omega_3 - k_1 x_1, \\ B\dot{x}_2 + (A - C)x_1 x_3 = cx_1\omega_3 - ax_3\omega_1 - k_2 x_2, \\ C\dot{x}_3 + (B - A)x_1 x_2 = ax_2\omega_1 - bx_1\omega_2 - k_3 x_3, \end{cases}$$

(5)

где $x_1 = p,\ x_2 = q,\ x_3 = r.$

Линейное приближение системы (5) будет

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{b\omega_2}{A}x_3 - \dfrac{c\omega_3}{A}x_2 - \dfrac{k_1}{A}x_1, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{c\omega_3}{B}x_1 - \dfrac{a\omega_1}{B}x_3 - \dfrac{k_2}{B}x_2, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{a\omega_1}{C}x_2 - \dfrac{b\omega_2}{C}x_1 - \dfrac{k_3}{C}x_3. \end{cases} \tag{6}$$

Запишем характеристическое уравнение для (6) в открытом виде:

$$\lambda^3+\lambda^2\left(\frac{k_1}{A}+\frac{k_2}{B}+\frac{k_3}{C}\right)+\lambda\left(\frac{\omega_1^2a^2}{BC}+\frac{\omega_2^2b^2}{AC}+\frac{\omega_3^2c^2}{BA}+\frac{A^2a}{BC}+\frac{k_1k_2}{AB}+\frac{k_1k_3}{AC}+\frac{k_2k_3}{BC}\right)+$$
$$+\frac{a^2k_1\omega_1^2}{ABC}+\frac{c^2k_3\omega_3^2}{ABC}+\frac{b^2k_2\omega_2^2}{ABC}+\frac{k_1k_2k_3}{ABC}=0. \tag{7}$$

Чтобы все корни уравнения (7) удовлетворяли условиям $\mathrm{Re}\,\lambda_i<0, i=1,2,3$, достаточно выполнение критерия Рауса–Гурвица. Для уравнения (7) это условие таково:

$$\left(\frac{k_1}{A}+\frac{k_2}{B}+\frac{k_3}{C}\right)\cdot\left(\frac{\omega_1^2a^2}{BC}+\frac{\omega_2^2b^2}{AC}+\frac{\omega_3^2c^2}{BA}+\frac{A^2a}{BC}+\frac{k_1k_2}{AB}+\frac{k_1k_3}{AC}+\frac{k_2k_3}{BC}\right)>$$
$$>\frac{a^2k_1\omega_1^2}{ABC}+\frac{c^2k_3\omega_3^2}{ABC}+\frac{b^2k_2\omega_2^2}{ABC}+\frac{k_1k_2k_3}{ABC}. \tag{8}$$

Очевидно, что неравенство (8) всегда выполняется. Откуда следует, что равновесие системы асимптотически устойчиво [2].

2. Теперь рассмотрим случай, когда $\omega_1=\omega_2=\omega_3=0$, а тело вращается вокруг оси x со скоростью α. Тогда динамические уравнения Эйлера запишутся в следующем виде:

$$\begin{cases}A\dot{p}+(C-B)qr=-k_1(p-\alpha),\\ B\dot{q}+(A-C)pr=-k_2q,\\ C\dot{r}+(B-A)pq=-k_3r.\end{cases}$$

(9)

Уравнения (9) допускают частное решение $p=\alpha$, $q=0$, $r=0$, при котором дифференциальные уравнения возмущенного движения примут следующий вид:

$$\begin{cases}A\dot{y}_1+(C-B)y_2y_3=-k_1y_1,\\ B\dot{y}_2+(A-C)(y_1+\alpha)y_3=-k_2y_2,\\ C\dot{y}_3+(B-A)(y_1+\alpha)y_2=-k_3y_3,\end{cases}$$

(10)

где $y_1=p-\alpha,\ y_2=q,\ y_3=r$.

Линейное приближение системы (10) будет

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-\dfrac{k_1}{A}y_1,\\ \dot{y}_2=-\dfrac{C-A}{B}\alpha y_3-\dfrac{k_2}{B}y_2,\\ \dot{y}_3=-\dfrac{A-B}{C}\alpha y_2-\dfrac{k_3}{C}y_3.\end{cases} \tag{11}$$

Характеристическое уравнение для (11) получим в виде

$$\lambda^3+\lambda^2\left(\frac{k_1}{A}+\frac{k_2}{B}+\frac{k_3}{C}\right)+\lambda\left(a^2-\frac{Aa^2}{B}+\frac{Aa^2}{C}+\frac{A^2a}{BC}+\frac{k_1k_2}{AB}+\frac{k_1k_3}{AC}+\frac{k_2k_3}{BC}\right)+$$

$$+\frac{a^2k_1}{A}+\frac{a^2k_1}{B}+\frac{a^2k_1}{C}+\frac{Aa^2k_1}{BC}+\frac{k_1k_2k_3}{ABC}=0. \qquad (12)$$

Решая уравнение (12), получим:

$$\lambda_1=-\frac{k_1}{A},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2BC}\left(-Ck_2-Bk_3-\sqrt{\left(Ck_2+Bk_3\right)^2-4BC\left(A^2\alpha^2-AB\alpha^2-AC\alpha^2+BC\alpha^2+k_2k_3\right)}\right),$$

$$\lambda_3=\frac{1}{2BC}\left(-Ck_2-Bk_3+\sqrt{\left(Ck_2+Bk_3\right)^2-4BC\left(A^2\alpha^2-AB\alpha^2-AC\alpha^2+BC\alpha^2+k_2k_3\right)}\right).$$

Если:

а) $(A-B)(A-C)=-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$, то $4BC(A^2\alpha^2-AB\alpha^2-AC\alpha^2+BC\alpha^2+k_2k_3)=0$, тогда получим $\lambda_1=-\frac{k_1}{A}<0$, $\lambda_2=-\frac{Ck_2+Bk_3}{BC}<0$, $\lambda_3=0$, следовательно, система (11) устойчива [2];

б) $4BC(A^2\alpha^2-AB\alpha^2-AC\alpha^2+BC\alpha^2+k_2k_3)>0$ (имеет место только при $(A-B)(A-C)>-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$ или $A\geq B$ и $A\geq C$), тогда получим $\lambda_1<0$, $\operatorname{Re}\lambda_2<0$, $\operatorname{Re}\lambda_3<0$, следовательно, система (11) асимптотически устойчива [2];

в) $(A-B)(A-C)<-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$, то $4BC(A^2\alpha^2-AB\alpha^2-AC\alpha^2+BC\alpha^2+k_2k_3)<0$, тогда получим $\lambda_3>0$, следовательно, система (11) неустойчива [2].

Теперь допустим, что

1) $k_1=0$, $k_2\neq 0$, $k_3\neq 0$. Тогда, если:

а) $(A-B)(A-C)=-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$, имеем $\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2<0$. Так как

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-k_2}{B} & -\frac{C-A}{B}\alpha\\ 0 & -\frac{A-B}{C}\alpha & \frac{-k_3}{C}\end{bmatrix}=2,$$ то система неустойчива [2];

б) $(A-B)(A-C)>-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$, имеем $\lambda_1=0$, $\operatorname{Re}\lambda_2<0$, $\operatorname{Re}\lambda_3<0$, следовательно, система устойчива [2];

в) $(A-B)(A-C)<-\frac{k_2k_3}{\alpha^2}$, имеем $\lambda_3>0$, следовательно, система неустойчива [2].

2) $k_2=0$, $k_1\neq 0$, $k_3\neq 0$. Тогда, если:

а) $(A-B)(A-C)=0$, получим $\lambda_1=-\dfrac{k_1}{A}<0$, $\lambda_2=-\dfrac{k_3}{C}<0$, $\lambda_3=0$, следовательно, система устойчива [2];

б) $(A-B)(A-C)>0$, получим $\lambda_1<0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2<0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_3<0$, следовательно, система асимптотически устойчива [2];

в) $(A-B)(A-C)<0$, получим $\lambda_3>0$, следовательно, система неустойчива [2].

Аналогичные результаты получаются и в случае $k_3=0,\ k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$.

3) $k_3\neq 0,\ k_1=k_2=0$. Тогда, если:

а) $(A-B)(A-C)=0$, получим $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\dfrac{k_3}{C}<0$, $\lambda_3=0$. Так как

$$\det\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{C-A}{B}\alpha \\ -\dfrac{C-A}{B}\alpha & -\dfrac{k_3}{C}\end{bmatrix}=-\frac{(A-B)(A-C)}{BC}\alpha^2=0, \text{ то}$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{C-A}{B}\alpha \\ 0 & -\dfrac{A-B}{C}\alpha & \dfrac{-k_3}{C}\end{bmatrix}=1,$$ следовательно, система устойчива [2];

б) $(A-B)(A-C)>0$, получим $\lambda_1=0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_2<0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_3<0$, следовательно, система устойчива [2];

в) $(A-B)(A-C)<0$, получим $\lambda_3>0$, следовательно, система неустойчива [2].

Такие же результаты получим и в случае, когда $k_2\neq 0,\ k_1=k_3=0$.

Кафедра теоретической механики

Поступила 22.05.2006,
после доработки – 27.11.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. М.: Наука, 1990, 176 с.
2. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 530 с.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 211 с.
4. **Матросов В.М.** – Труды Казанского авиационного института, 1959, вып. 45, с. 63–76.
5. **Меркин Д.Р.** Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987, 309 с.
6. **Бухгольц Н.Н.** Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969.

Վ. Ն. ԳՐԻՇԿՅԱՆ

ՊԻՆԴ ՄԱՐՄՆԻ ՊՏՏԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է դիմադրող միջավայրում մեխանիկական համակարգ. պինդ մարմին – ներսում՝ թափանիվներ: Ցույց է տրված, որ համակարգի հավասարակշռության դիրքը, անկախ թափանիվների պտույտից, ասիմպտոտիկորեն կայուն է: Ուսումնասիրված է նաև համակարգի շարժման կայունությունը լրիվ և մասնակի դիսիպացիաների դեպքում, երբ համակարգը պտտվում է առանցքներից մեկի շուրջը:

V. N. GRISHKYAN

ABOUT THE STABILITY OF RIGID BODY ROTATION

Summary

In this work the mechanical system of rigid body with flywheels inside is considered. The system is under the operation of dissipative forces. It is shown, that irrespective of rotation of flywheels, the position of equilibrium of the system is asymptotically steady. It is also investigated the stability of the system at a full and partial dissipation, when the system rotates around one axis.