ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

С. М. НАРИМАНЯН, Т. З. ХАЧИКЯН

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЙ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Рассмотрена система надежности из n разнотипных элементов специального типа с непрерывными функциями распределения времен «жизни». Для времени безотказной работы системы построена равномерная гиперэрланговская аппроксимация и установлена устойчивость по параметрам аппроксимирующей системы.

Введение. Сложные производственные системы надежности, как правило, обладают физической устойчивостью относительно малых изменений параметров системы. При построении их математических моделей возникает вопрос математической устойчивости в том или ином смысле, адекватной физической устойчивости.

Следующая общая модель надежности имеет много применений. Модель состоит из n элементов с непрерывными функциями распределения (ФР) $G_1, G_2, ..., G_n$ их времен безотказной работы. ФР G задана в виде

$$G(x) = f\left(G_1(x), G_2(x), ... G_n(x)\right),\ x \in [0, +\infty), \tag{1}$$

при следующих предположениях:

1. ФР $G_i(x), i = \overline{1,n}$, непрерывны;

2. Функция $f(y_1, y_2 ..., y_n)$ в области $\left\{(y_1, y_2 ..., y_n) : y_i \in [0,1],\ i = \overline{1,n}\right\}$ равномерно непрерывна по совокупности аргументов.

Пример 1. Элементы в модели последовательно соединены. Система выходит из строя, если отказывает хотя бы один элемент. Тогда

$$f(x_1, x_2 ..., x_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} g_k(x_k),\ \ g_k(x) = G_k(x),\ k = \overline{1,n}\,.$$

Пример 2. Элементы в модели соединены параллельно. Система отказывает, если отказывают все элементы. Тогда

$$f(x_1, x_2 ..., x_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k),\ \ f_k(x) = G_k(x),\ k = \overline{1,n}\,.$$

В настоящей работе изучен вопрос устойчивости в равномерной метрике ФР времен безотказной работы $G(x)$ модели (1). Именно путем равномерной гиперэрланговской аппроксимации ФР $G_i(x), i = \overline{1,n}$, находится по формуле (1) равномерная аппроксимация $G(x)$. Далее, устанавливается устойчивость по параметрам аппроксимирующих гиперэрланговских распределений для $G(x)$.

В конце для примеров 1 и 2 приведена машинная реализация в среде Matlab 7 осуществляемой аппроксимации.

Гиперэрланговская аппроксимация. Пусть $n_i > 1$, $i = \overline{1,k}$, и $k \geq 1$ – целые числа; $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. ФР с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} p_i \cdot \frac{\lambda_i (\lambda_i x)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} e^{-\lambda_i x}, \ x \in R^+ = (0, +\infty), \\ 0, \qquad -\infty < x \leq 0, \end{cases} \tag{2}$$

называется *гиперэрланговским* распределением. Здесь p_i, $i = \overline{1,k}$, – весовые параметры, а $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,k}$, – параметры интенсивностей гиперэрланговского распределения.

Теорема 1. В модели (1) с условиями 1, 2 для $\varepsilon > 0$ найдутся гиперэрланговские распределения $H_1, H_2, \ldots, H_n$ такие, что

$$\sup_x | G(x) - H(x) | < \varepsilon, \tag{3}$$

где

$$H(x) = f\left(H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x)\right). \tag{4}$$

Доказательство. Мы используем следующее утверждение И.Н. Коваленко [1]. Пусть F – ФР положительной случайной величины и $\varepsilon > 0$. Найдется гиперэрланговское распределение H такое, что

$$\rho(F, H) < \varepsilon, \tag{5}$$

где $\rho(\cdot,\cdot)$ – метрика Леви для ФР. Поскольку сходимость в метрике Леви равносильна слабой сходимости ФР, то в случае, когда F – непрерывная ФР, можно в силу (5) сформулировать следующее утверждение.

В условиях утверждения И.Н. Коваленко при непрерывном F найдется последовательность $\{H_i\}$ гиперэрланговских распределений такая, что

$$\lim_{i \to +\infty} \sup_x | F(x) - H_i(x) | = 0. \tag{6}$$

В (6) использован известный факт из [2], заключающийся в том, что слабая сходимость $F_n \Rightarrow F$, $n \to +\infty$, для ФР при непрерывном F равносильна равномерной сходимости $\{F_n\}$ к F на R^1.

Далее, из-за непрерывности ФР G_i, $i = \overline{1,n}$, для числа $\left(\frac{\delta}{n}\right) > 0$, где δ будет выбрано позже, найдутся гиперэрланговские распределения $H_1, H_2, \ldots, H_n$ такие, что для всех $i = \overline{1,n}$

$$\sup_x | G_i(x) - H_i(x) | < \frac{\delta}{n}. \tag{7}$$

Из (7) следует

$$\sup_x \sum_{k=1}^{n} |G_i(x) - H_i(x)| < \delta . \quad (8)$$

Теперь по $\varepsilon > 0$ и условию 2 выбираем число $\delta > 0$ такое, что из (8) следует (3)–(4).

Теорема 1 доказана.

Устойчивость по параметрам. Пусть $F_c(x)$, где $c = (p_1,..., p_k; \lambda_1,...,\lambda_k)$, есть ФР, соответствующая плотности (2).

Пусть $F_c(x)$ и $F_{c'}(x)$ – две гиперэрланговские ФР. Обозначим через

$$\delta(c,c') = \delta(c',c) = \sup_{0 \le x < +\infty} |F_c(x) - F_{c'}(x)|$$

расстояние в равномерной метрике между ФР F_c и $F_{c'}$. Имеет место следующее утверждение относительно устойчивости по параметрам.

Пусть $\underline{p_i} \le \overline{p_i}$, $\underline{\lambda_i} \le \overline{\lambda_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\sum \underline{p_i} = \sum \overline{p_i} = 1$, $\overline{\lambda_i} \in R^+$, причем

$$\sum_{i=1}^{k} (\underline{p_i^2} + \underline{\lambda_i^2}) < \sum_{i=1}^{k} (\overline{p_i^2} + \overline{\lambda_i^2}) . \quad (9)$$

Образуем векторы $\underline{c} = (\underline{p_1},..., \underline{p_k}; \underline{\lambda_1},...,\underline{\lambda_k})$, $\overline{c} = (\overline{p_1},..., \overline{p_k}; \overline{\lambda_1},...,\overline{\lambda_k})$. Запись (9) означает $\underline{c} < \overline{c}$.

Теорема 2. Равномерно по c и c', где $\underline{c} < c < \overline{c}'$ и $\underline{c} < c' < \overline{c}$, существует предел

$$\lim_{|c-c'| \to 0} \delta(c,c') = 0 . \quad (10)$$

Условие $|c - c'| \to 0$ означает $\sum_{i=1}^{k} \left(|p_i - p_i^{'}| + |\lambda_i - \lambda_i^{'}| \right) \to 0.$

Доказательство. Перепишем (2) в виде

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i p_i(x), \quad (11)$$

где плотность $p_i(x)$ имеет вид

$$p_i(x) = \frac{\lambda_i (\lambda_i x)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} e^{-\lambda_i x} \quad (12)$$

и ей соответствует ФР $F_{(\lambda_i)}(x)$. Тогда $F_c(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i F_{(\lambda_i)}(x)$.

Теперь нетрудно видеть, что

$$\delta(c,c') = \sup_{0 \le x < +\infty} \left| \sum_{i=1}^{k} (p_i F_{(\lambda_i)}(x) - p_i^{'} F_{(\lambda_i^{'})}(x)) \right| \le \sum_{i=1}^{k} \sup_{0 \le x < +\infty} \left| p_i F_{(\lambda_i)}(x) - p_i^{'} F_{(\lambda_i^{'})}(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \left| p_i - p_i^{'} \right| + \sum_{i=1}^{k} p_i \sup_{0 \le x < +\infty} \left| F_{(\lambda_i)}(x) - F_{(\lambda_i^{'})}(x) \right| .$$

Отсюда следуют неравенства

$$0 \le \delta(c,c') \le \sum_{i=1}^{k} \theta(\lambda_i, \lambda_i^{'}) + \sum_{i=1}^{k} \left| p_i - p_i^{'} \right|, \quad (13)$$

где обозначено

$$\theta(\lambda,\lambda') = \sup_{0\le x<+\infty}\left|F_{(\lambda)}(x) - F_{(\lambda')}(x)\right|. \tag{14}$$

Так как $|p_i - p_i^{'}| \to 0$ и $|\lambda_i - \lambda_i^{'} \to 0|$, $i=\overline{1,k}$, то в силу (13), (14) доказательство теоремы сводится к установлению следующего утверждения.

Пусть $0<\underline{\lambda}<\overline{\lambda}<+\infty$. Тогда равномерно по $\lambda,\lambda'\in[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$

$$\lim_{|\lambda-\lambda'|\to 0}\theta(\lambda,\lambda') = 0. \tag{15}$$

Докажем (15). Произведем оценки, считая $\lambda'<\lambda$.

$$0\le\theta(\lambda,\lambda') = \sup_{0<x<+\infty}\left|\int_{\lambda' x}^{\lambda x}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y}dy\right| \le \sup_{0<x<+\infty}\left(\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\left(e^{(\lambda-\lambda')x}-1\right)\right)\le$$

$$\le|\lambda-\lambda'|\sup_{0<x<+\infty}\left(\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}xe^{-\lambda x}\right).$$

Так как $\sup_{0<x<+\infty}\left(\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}xe^{-\lambda x}\right)\le M<+\infty,$ то получена оценка $0\le\theta(\lambda,\lambda')\le|\lambda-\lambda'|\cdot M$, откуда следует утверждение.

Теорема 2 доказана.

Машинная реализация аппроксимации. Программа, которая реализована в среде Matlab 7, выдает для каждой ФР $G_i(x)$ с плотностью $g_i(x)$ $(g_1(x)=2x\exp(-x^2),\ g_2(x)=0,4\exp(-x)+0,3\exp(-0,5x))$ гиперэрланговскую аппроксимирующую ФР $F_i(x)$ (рис. 1). $F(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_i(x))$ есть аппроксимирующая ФР для ФР $G(x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-G_i(x))$ (рис. 2).

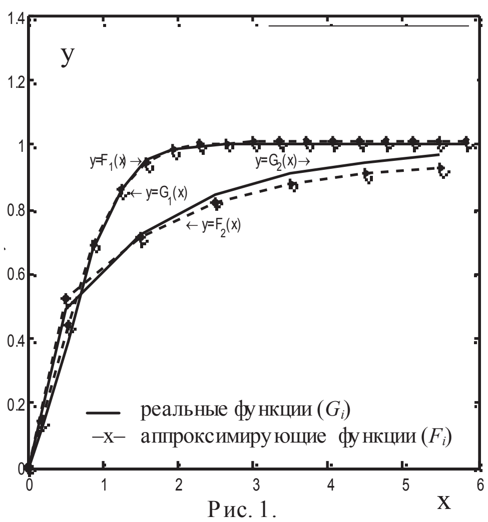

Рис. 1.

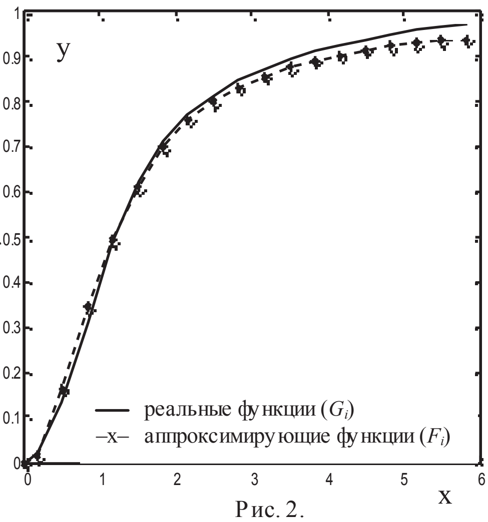

Рис. 2.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

Поступила 06.11.2006

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коваленко И.Н., Филиппова А.А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1973.
2. **Петров В.В.** Суммы независимых случайных величин. М.: Наука,1972.

Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ, Տ. Զ. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ՀՈՒՍԱԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՄՈԴԵԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է հատուկ տիպի հուսալիության մի համակարգ, որը կազմված է *n* տարբեր տիպի տարրերից: Տարրերի կյանքի ժամանակի բաշխման ֆունկցիաները անընդհատ են: Համակարգի անխափան աշխատանքի համար կառուցված է հավասարաչափ հիպերէրլանգյան մոտարկում և հաստատված է մոտարկող համակարգի կայունությունն ըստ պարամետրերի:

S. M. NARIMANYAN, T. Z. KHACHIKYAN

THE STABILITY OF ONE RELIABILITY MODEL

Summary

A special class of reliability system with different elements and with continuous distribution function of non-failure operation times of elements is considered. Under the given conditions the non-failure operation time distribution functions of any system from this class is also continuous. The uniform hyper Erlang approximation for the distribution function of non-failure operation time is constructed. Then the stability of the system in uniform metrics by parameters of hyper Erlang approximation is established.