ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

Л. В. АКОПЯН

НЕЧИСЛОВЫЕ КОРНИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье изучаются нечисловые корни алгебраических уравнений. Установлена связь между числовыми и нечисловыми корнями алгебраических уравнений любых степеней.

В работе под алгеброй будем понимать множество с операциями сложения и умножения.

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_l, ...$ – множество математических объектов, каждый из которых представляет собой таблицу чисел определенного количества N $(N = 1, 2, ...)$. Здесь исследуются алгебры указанных объектов, которые допускают существование правой или левой единицы относительно умножения. Элементы таких алгебр назовем лианитами.

Лианит, все элементы которого нули, будем считать нулевым. Все дальнейшее изложение мы построим в системе правой единицы, если $e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N)$ – правая единица, то $\sigma \cdot e = (x_1, x_2, ..., x_N) \cdot (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N) = = (x_1, x_2, ..., x_N)$.

Из общего определения вытекает, что сложение и умножение лианитов в общем случае некоммутативно и неассоциативно. Из определения следует также, что любое число имеет свой лианитовый аналог, а именно, если единица определена как таблица $e(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$, то число a представимо как $a \cdot e = (\varepsilon_1 a, \varepsilon_2 a, ..., \varepsilon_N a)$. В системе правой единицы для выражения $\sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_n a$ имеет место следующая последовательность умножения $\sigma_1(\sigma_2(\sigma_3 ...(\sigma_n a)))$, т.е. умножение происходит последовательно справа налево. Пусть задан алгебраический многочлен степени n: $f^n(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$. Под коэффициентами α_i будем понимать лианитовые аналоги чисел α_i, а под $x^k (k = 0, 1, ..., n)$ – различные степени искомого σ, существующего в пределах заданной алгебры. Начнем с рассмотрения двухэлементных лианитов. Пусть сложение имеет коммутативную форму:

$$\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\,. \tag{1}$$
Операцию умножения можно определить по следующим правилам [1, 2]:
$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=\left(x_1(y_1+y_2),x_2y_1\right),\ e=(1,0)\,, \tag{2}$$
$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=\left(x_1y_1\pm x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1\right),\ e=(1,0)\,, \tag{3}$$
$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=\left(x_1(y_1+y_2)+x_2y_1,x_2y_2-x_1y_1\right),\ e=(0,1)\,. \tag{4}$$
Определения (2–4) дистрибутивны, но (2) неассоциативно. В случае трехэлементных лианитов можно воспользоваться другими определениями:
$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1y_2+x_2y_3,x_2y_1,x_3y_2),\ e=(1,1,0)\,, \tag{5}$$
$$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1y_2+x_2y_1,x_2(y_1+y_3),x_3y_2)\,,\ e=(0,1,1)\,. \tag{6}$$

Для четырехэлементных лианитов можно взять алгебру матриц, либо иные конструкции:
$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1y_3+x_4y_2 & x_3y_1+x_2y_4\\ x_3y_3+x_2y_2 & x_1y_1+x_4y_4\end{pmatrix},\ e=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если сложение взять в некоммутативной форме, то, очевидно, при сложении двух и более лианитов последовательность сложения будет играть важную роль. Примерами некоммутативного сложения могут служить определения:
$$\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+\alpha y_2,x_2+\beta y_1),\ \alpha,\beta-\text{любые ненулевые числа}, \tag{8}$$
$$\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1+y_2,x_2+y_1-y_2)\,. \tag{9}$$

Определение. σ называется нечисловым корнем алгебраического уравнения $f^n(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=0,$ если в пределах заданной алгебры и при выбранной последовательности сложения членов многочлена $f^n(x)$ имеет место условие $f^n(\sigma)=0$. Очевидно, что если данная алгебра коммутативна относительно сложения, то определение нечислового корня не зависит от последовательности сложения.

Пусть $f^n(x)=x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$ – многочлен степени n. Пусть также некие $\sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$, существующие в пределах определенной алгебры (коммутативной по сложению), формально удовлетворяют соотношениям Виета для числовых корней [3]:
$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n=-a_1,\\ \sigma_1\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}\sigma_n=a_2,\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n)(-1)^n=a_n,\end{cases} \tag{10}$$
где коэффициенты a_i лианитовые аналоги чисел a_i. Тогда если все $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ коммутативны между собой $(\sigma_i\cdot\sigma_j=\sigma_j\cdot\sigma_i)$ и операция умножения дистрибутивна, то они являются корнями соответствующего уравнения $f^n(x)=0$ вне зависимости от алгебры, в пределах которой они существуют. Если же их конкретные формы некоммутативны относительно умноже-

ния, то лишь σ_1 является корнем $f^n(x)=0$. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из подстановки (10) в многочлен $f^n(x)$.

Займемся теперь выделением нечисловых корней алгебраических уравнений. Рассмотрим уравнение $x^2+px+q=0$ в алгебре с операциями (1), (2):

$$\sigma^2+p\sigma+q=0 \quad \text{или же} \quad \begin{cases} x_1(x_1+x_2)+px_1+q=0, \\ x_1x_2+px_2=0. \end{cases}$$

Взяв $x_2\neq 0$, получим

$$\sigma_1=\left(-p,q/p\right),\ p\neq 0. \tag{11}$$

Если $\sigma_2=(0,-q/p)$, то соотношения Виета удовлетворяются, но т.к. $\sigma_1\sigma_2\neq\sigma_2\sigma_1$, то лишь σ_1 является лианитовым корнем. Если умножение задано в виде

$\sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3,x_2y_1+x_1y_2,x_3y_1+x_1y_3)$, $e=(1,0,0)$, то лианитовые корни имеют вид:

$$\sigma_1=\left(-\frac{p}{2},x_2,\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q-x_2^2}\right),\ \sigma_2=\left(-\frac{p}{2},-x_2,\mp\sqrt{\frac{p^2}{4}-q-x_2^2}\right). \tag{12}$$

Так как алгебра первоначально коммутативна, то и σ_1,σ_2 коммутативны и, следовательно, они являются корнями. Если воспользоваться алгеброй матриц, то непосредственный поиск матрицы σ, для которого $f(\sigma)=\sigma^2+\rho\sigma+g=0$ (в системе правой единицы), дает

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -f(x_1)/x_2 & -p-x_1 \end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix} -p-x_1 & -x_2 \\ f(x_1)/x_2 & x_1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Хотя алгебра матриц в общем случае некоммутативна, полученные матрицы коммутативны, следовательно, они обе являются корнями $f(x)=x^2+px+q$.

Руководствуясь алгеброй (7), получим

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} \sqrt{-f(x_1)} & \sqrt{-f(x_1)} \\ x_3 & -p-x_3 \end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix} -\sqrt{-f(x_3)} & -\sqrt{-f(x_3)} \\ -p-x_3 & x_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где x_3 – любое число. Нечисловые объекты (14), существующие в пределах алгебры (7), коммутативны и, следовательно, являются корнями $f(x)$.

Рассмотрим многочлен третьей степени: $f(x)=x^3+\alpha x^2+bx+c$. При $a=0$ воспользуемся алгеброй с умножением:

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)=(x_1(y_2+y_3),x_2(y_1+y_3),x_3(y_1+y_2)),\ e=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Условие $f(\sigma)=\sigma\sigma^2+\sigma b+c=0$ можем записать в виде системы

$$\begin{cases} x_1x_2x_3=-\dfrac{c}{2}, \\ x_1(x_2+x_3)+x_2x_3+b=0. \end{cases}$$

При $x_1 = \dfrac{c}{2b} \neq 0$ получаем нечисловой корень вида

$$\sigma\left(\frac{c}{2b}, \sqrt{b}, -\sqrt{b}\right). \quad (15)$$

На приведенных примерах видна особенность нечисловых корней. При переходе к кубическим уравнениям понадобились трехэлементные лианиты. Для выяснения общей закономерности введем общую алгебру по аналогии с алгеброй (2):

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = (x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1(y_1 + y_2), x_2(y_1 + y_3), ..., x_n y_1),\ e(1,0,...,0). \quad (16)$$

Тогда любое алгебраическое уравнение степени n при $\alpha_i \neq 0$ допускает нечисловое решение вида

$$\sigma(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(-a_1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, ..., \frac{a_n}{\alpha_{n-1}}\right). \quad (17)$$

Пусть $\sigma(1,2)$ – лианит в пределах алгебры (16). Тогда существует единственное квадратное уравнение, для которого $\sigma(1,2)$ является корнем. Действительно, имеем $\sigma^2 + \sigma \cdot p + q = (1,2)(1,2) + (p, 2p) + (q, 0) = (0,0)$ или же $\begin{cases} 3 + \rho + g = 0 \\ 2 + 2\rho = 0 \end{cases}$. Следовательно, $p = -1$, $q = -2$.

Найдем множество кубических многочленов, для которых $\sigma(1,2)$ является лианитовым корнем. Имеем $\sigma^3 = \sigma \cdot \sigma^2 = (1,2) \cdot (3,2) = (5,6)$. Следовательно, для $x^3 + \dot{a}x^2 + bx + c = 0$ получим $(5,6) = (3a, 2a) + (b, 2b) + (c, 0) = (0,0)$ или же

$$\begin{cases} 3a + b + c = -5, \\ 2a + 2b = -6. \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) имеет решение вида $(a,b,c) = \left(-\dfrac{c+2}{2}, \dfrac{c-4}{2}, c\right)$, где c – любое число. Иначе, $x^3 - \dfrac{c+2}{2}x^2 + \dfrac{c-4}{2}x + c = 0 = (x^2 - x - 2)\left(x - \dfrac{c}{2}\right)$. Если $c \neq -2$ и $c \neq 4$, то последнее уравнение имеет нечисловое решение вида (17). Например, при $c = 6$ имеем $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ с $\sigma\left(4, -\dfrac{1}{4}, 6\right)$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что не существует квадратного уравнения, для которого $\sigma\left(4, -\dfrac{1}{4}, 6\right)$ – нечисловой корень. Рассмотрим матрицу

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \text{ где } i = \sqrt{-1}. \quad (19)$$

Существует бесчисленное количество кубических уравнений, включая характеристическое $x^3 + ix^2 + x + i = 0$, для которых эта матрица служит корнем, однако однозначно она определяет лишь одно квадратное уравнение: $x^2 + 1 = 0$.

Определение 1. $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ называется основным лианитовым корнем для многочлена степени *n*, если он не только удовлетворяет этому многочлену, но и однозначно определяет только его среди множества всех возможных многочленов степени n.

Определение 2. $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ называется побочным лианитовым корнем для многочлена $f^n(x)$, если этот многочлен не единственный среди множества всех многочленов степени n, для которых $f^n(\sigma) = 0$.

Из этих определений следует, например, что в пределах алгебры (18) $\sigma(1,2)$ является побочным корнем для $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, а $\sigma\left(4, -1/4,\ 6\right)$ для этого же уравнения служит основным корнем. Вышеуказанная матрица для своего характеристического уравнения является побочным корнем. Ясно, что если σ является основным корнем для многочлена $f^n(x)$, то он автоматически является побочным корнем для любого уравнения степени $n+k$, для которых $f^{n+k}(\sigma) = 0$. Именно в этом аспекте проблема поиска числовых корней алгебраических уравнений переходит в проблему поиска побочных корней этих же уравнений.

Пусть задано множество лианитов в пределах алгебры, строго коммутативной относительно сложения и дистрибутивной относительно умножения, с правой единицей $e(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l)$.

Теорема 1. Для общего алгебраического уравнения степени n число элементов основного корня не может быть ниже порядка уравнения.

Доказательство. Пусть $\sigma(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n-k})$, $k \neq 0,-$ основной корень уравнения $f^n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$ Из условия $f^n(\sigma) =$ $= \sigma^n + \sigma^{n-1} \cdot a_1 + \ldots + \sigma \cdot a_{n-1} + a_n \cdot e = 0$ получим систему $n-k$ линейных уравнений относительно коэффициентов $a_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$, причем эта система будет неоднородной: $a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = -x^n$. Так как $n-k < n$, то полученная система не может обладать единственным набором решений $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Однако, по условию теоремы, $\sigma(x_{1,1}, \ldots, x_{1,n-k})$ есть основной корень и, следовательно, набор коэффициентов α_i единственный. Полученное противоречие и доказывает, что число элементов σ больше или равно n. Для алгебры матриц эту теорему можно переформулировать: порядок основного матричного корня не может быть ниже порядка уравнения. Теорема Гамильтона–Кели утверждает, что каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического уравнения. Эту теорему необходимо переформулировать следующим образом: каждая квадратная матрица является основным матричным корнем своего характеристического уравнения, если она не удовлетворяет уравнению порядка ниже ее ранга.

Теорема 2. Пусть $f_1^n(x)$ и $f_2^m(x)$ – многочлены степени n и m $(m>n)$, и пусть $\sigma(x_{1,1},x_{1,2},...,x_{1,n})$ – основной корень $f_1^n(x)$ и одновременно побочный корень $f_2^m(x)$. Тогда у многочленов $f_1^n(x)$ и $f_2^m(x)$ ровно n общих числовых корней (алгебра дистрибутивная).

Доказательство. Для наглядности возьмем $m=n+1$. По условию теоремы, σ – основной корень $f_1^n(x)$, т.е. $f_1^n(\sigma)=0$, где $f_1^n(x)=$ $=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Также имеет место тождество $f_2^{\,n+1}(\sigma)=0$, где $f_2^{n+1}(x)=x^{n+1}+b_1x^n+...+b_nx+b_{n+1}$. То, что σ имеет ровно n элементов, а не больше, естественно не отражается на общности утверждения теоремы из-за сути основного корня. Обозначим

$$\sigma^1=(x_{1,1},x_{1,2},...,x_{1,n}),\ \sigma^2=(x_{2,1},x_{2,2},...,x_{2,n}),\ ...,\ \sigma^{n-1}=(x_{n-1,1},x_{n-1,2},...,x_{n-1,n}),$$

$$\sigma^n=(x_{n,1},x_{n,2},...,x_{n,n}),\ \sigma^{n+1}=(x_{n+1,1},...,x_{n+1,n}),\ e=(x_{0,1},x_{0,2},...,x_{0,n}).$$

Из условия $f_1^n(\sigma)=0$ имеем

$$\begin{cases} a_1x_{n-1,1}+a_2x_{n-2,1}+...+a_{n-1}x_{1,1}+a_nx_{0,1}=-x_{n,1}, \\ a_1x_{n-1,2}+a_2x_{n-2,2}+...+a_{n-1}x_{1,2}+a_nx_{0,2}=-x_{n,2}, \\ . \\ a_1x_{n-1,n}+a_2x_{n-2,n}+...+a_{n-1}x_{1,n}+a_nx_{0,n}=-x_{n,n}. \end{cases} \qquad (20)$$

Решение (20) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \chi_{n-1,1} & \chi_{n-1,2} & \chi_{n-1,3} & \cdots & \chi_{n-1,n} \\ \chi_{n-2,1} & \chi_{n-2,2} & \chi_{n-2,3} & \cdots & \chi_{n-2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_{1,1} & \chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \cdots & \chi_{1,n} \\ \chi_{0,1} & \chi_{0,2} & \chi_{0,3} & \cdots & \chi_{0,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_{n,1} \\ -x_{n,2} \\ \cdots \\ -x_{n,n-1} \\ -x_{n,n} \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Иначе, $a_i=-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\chi_{n-i,k}x_{n,k}$, $i=1,2,...,n$, $k=1,2,...,n$, где d – основной детерминант от (20), а $\chi_{n-i,k}$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов $x_{i,j}$. По условию теоремы, $f_2^{n+1}(\sigma)=0$ или же $f_2^{n+1}(\sigma)=$ $=\sigma^{n+1}+b_1\sigma^n+b_2\sigma^{n-1}+...+b_n\sigma+b_{n+1}=0$, где $b_i(i=1,...,n+1)$ – коэффициенты многочлена $f^{n+1}(x)$. Отсюда

$$\begin{cases} b_1x_{n,1}+b_2x_{n-1,1}+\cdots+b_nx_{1,1}+b_{n+1}x_{0,1}=-x_{n+1,1}, \\ b_1x_{n,2}+b_2x_{n-1,2}+\cdots+b_nx_{1,2}+b_{n+1}x_{0,2}=-x_{n+1,2}, \\ . \\ b_1x_{n,n}+b_2x_{n-1,n}+\cdots+b_nx_{1,n}+b_{n+1}x_{0,n}=-x_{n+1,n}. \end{cases} \qquad (22)$$

По условию теоремы, σ для $f_2^{n+1}(x)$ является побочным корнем. Следовательно, набор $b_i (i = 1,...,n+1)$ не единственный. Тогда один из них можно подобрать произвольно. Пусть это будет b_1. Тогда в (22) можно оставлять матрицу возле коэффициентов $b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}$ неподвижной и рассматривать новую равносильную систему:

$$\begin{cases} b_2 x_{n-1,1} + \cdots + b_n x_{1,1} + b_{n+1} x_{0,1} = -(x_{n+1,1} + b_1 x_{n,1}), \\ b_2 x_{n-1,2} + \cdots + b_n x_{1,2} + b_{n+1} x_{0,2} = -(x_{n+1,2} + b_1 x_{n,2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_2 x_{n-1,n} + \cdots + b_n x_{1,n} + b_{n+1} x_{0,n} = -(x_{n+1,1} + b_1 x_{n,n}). \end{cases} \tag{23}$$

Решение системы (23) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ \cdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{d} \begin{pmatrix} \chi_{n-1,1} & \chi_{n-1,2} & \cdots & \chi_{n-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_{1,1} & \chi_{1,2} & \cdots & \chi_{1,n} \\ \chi_{0,1} & \chi_{0,2} & \cdots & \chi_{0,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1,1} + b_1 x_{n,1} \\ \cdots \\ x_{n+1,n-1} + b_1 x_{n,n-1} \\ x_{n+1,n} + b_1 x_{n,n} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Так как рассматриваются дистрибутивные алгебры, то имеет место очевидное тождество $\sigma \cdot f_1(\sigma) = 0$, иначе, $\sigma^{n+1} + a_1\sigma^n + a_2\sigma^{n-1} + a_3\sigma^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\sigma^2 + a_n\sigma = 0$. Это равносильно системе

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = -(a_1 x_{n,1} + a_2 x_{n-1,1} + \cdots + a_{n-1} x_{2,1} + a_n x_{1,1}), \\ x_{n+1,2} = -(a_1 x_{n,2} + a_2 x_{n-1,2} + \cdots + a_{n-1} x_{2,2} + a_n x_{1,2}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1,n} = -(a_1 x_{n,n} + a_2 x_{n-1,n} + \cdots + a_{n-1} x_{2,n} + a_n x_{1,n}). \end{cases} \tag{25}$$

Или же с учетом (20) получим

$$\begin{cases} x_{n+1,1} = (a_1^2 - a_2) x_{n-1,1} + (a_1 a_2 - a_3) x_{n-2,1} + \cdots + (a_1 a_{n-1} - a_n) x_{1,1} + a_n x_{0,1} \cdot a_1, \\ x_{n+1,2} = (a_1^2 - a_2) x_{n-1,2} + (a_1 a_2 - a_3) x_{n-2,2} + \cdots + (a_1 a_{n-1} - a_n) x_{1,2} + a_n x_{0,2} \cdot a_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1,n} = (a_1^2 - a_2) x_{n-1,n} + (a_1 a_2 - a_3) x_{n-2,n} + \cdots + (a_1 a_{n-1} - a_n) x_{1,n} + a_n x_{0,n} \cdot a_1. \end{cases} \tag{26}$$

Из (24) в явной форме получим

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{d}\left(x_{n-1,1} x_{n+1,1} + \cdots + x_{n-1,n} x_{n+1,n}\right) - \frac{b_1}{d}\left(x_{n-1,1} x_{n,1} + \ldots + x_{n-1,n} x_{n,n}\right), \\ b_3 &= -\frac{1}{d}\left(x_{n-2,1} x_{n+1,1} + \cdots + x_{n-2,n} x_{n+1,n}\right) - \frac{b_1}{d}\left(x_{n-2,1} x_{n,1} + \ldots + x_{n-2,n} x_{n,n}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n+1} &= -\frac{1}{d}\left(x_{0,1} x_{n+1,1} + \ldots + x_{0,n} x_{n+1,n}\right) - \frac{b_1}{d}\left(x_{0,1} x_{n,1} + \ldots + x_{0,n} x_{n,n}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

В (27) все вторые скобки, умноженные на $\left(-\dfrac{b_1}{d}\right)$, с учетом (21) дают $a_1b_1, a_2b_1, \ldots, a_{n-1}b_1, a_nb_1$ соответственно. С учетом (25) и (26), а также того, что для любой матрицы произведение данной строки на алгебраические дополнения этой же строки дает d, а произведение алгебраических дополнений данной строки на элементы любой другой строки дает ноль, окончательно получим $b_2 = a_1b_1 + a_2 - a_1^2$, $b_3 = a_2b_1 + a_3 - a_1a_2$, ..., $b_n = b_1a_{n-1} + a_n - a_1a_{n-1}$, $b_{n+1} = a_n(b_1 - a_1)$. Следовательно, многочлен $f_2^{n+1}(x)$ представим в виде:

$$\begin{aligned} f_2^{n+1}(x) &= x^{n+1} + b_1x^n + (a_1b_1 + a_2 - a_1^2)x^{n-1} + (a_2b_1 + a_3 - a_1a_2)x^{n-2} + \\ &+ \cdots + (b_1a_{n-1} + a_n - a_1a_{n-1})x + a_n(b_1 - a_1) = \\ &= (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\big(x + (b_1 - a_1)\big). \end{aligned} \tag{28}$$

Из-за произвольности b_1, $x_0 = b_1 - a_1$ – также произвольное число. Таким образом, $f_2^{n+1}(x) = f^n(x)(x + x_0)$. Следовательно, многочлены $f_2^{n+1}(x)$ и $f_1^n(x)$ имеют ровно n общих числовых корней.

Теорема доказана.

Пусть задан многочлен степени n в общем случае. Требуется найти весь спектр его побочных и основных (нечисловых) корней в пределах наперед заданной алгебры. В следующей статье мы покажем, что такая программа не только реализуема, но и ведет к получению всех результатов, касающихся числовых корней алгебраических уравнений. Нечисловой подход дает возможность обобщить понятие корня в случае любых, в общем случае некоммутативных и неассоциативных относительно сложения алгебр.

Теорема 3. Пусть $f_1^n(x)$ и $f_2^m(x)$ – многочлены степени n и m с числовыми корнями $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_m)$ соответственно, и пусть σ является основным матричным корнем для $f_1^n(x)$. Тогда если многочлены имеют k общих числовых корней, то $f_2^m(\sigma)$ есть такая матрица, у которой все миноры порядка $n - l$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$ нулевые (верно и обратное утверждение) [1].

Доказательство. Сперва докажем, что собственные значения матрицы $f_2(\sigma)$ равны $f_2(x_1), f_2(x_2), ..., f_2(x_n)$. Имеем $f_2^m(x) = (x - y_1)(x - y_2)...(x - y_m)$, следовательно, $f_2^m(\sigma) = (\sigma - y_1)(\sigma - y_2)...(\sigma - y_m)$, тогда

$$\det f_2(\sigma) = \det(\sigma - y_1)\det(\sigma - y_2)...\det(\sigma - y_m). \tag{29}$$

Так как σ как матрица порядка n, по условию теоремы, является основным корнем для многочлена $f_1^n(x)$, то ее характеристический многочлен совпадает с $f_1^n(x)$, а это значит, что $f_1^n(x) = \det(\sigma - \lambda x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\det(\sigma - y_1) = (y_1 - x_1)(y_1 - x_2)\ldots(y_1 - x_n) = f_1(y_1),\\
&\det(\sigma - y_2) = (y_2 - x_1)(y_2 - x_2)\ldots(y_2 - x_n) = f_1(y_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\det(\sigma - y_m) = (y_m - x_1)(y_m - x_2)\ldots(y_m - x_n) = f_1(y_m).
\end{aligned} \tag{30}$$

Тогда из (29) получим

$$\begin{aligned}
\det f_2^m(\sigma) &= \big((y_1 - x_1)(y_1 - x_2)\ldots(y_1 - x_n)\ldots(y_m - x_1)(y_m - x_2)\ldots(y_m - x_n)\big) =\\
&= \big((y_1 - x_1)(y_2 - x_1)\ldots(y_m - x_1)\ldots(y_1 - x_n)(y_2 - x_n)\ldots(y_m - x_n)\big) =\\
&= f_2(x_1)\cdot f_2(x_2)\ldots f_2(x_n).
\end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим матрицу $\varphi(\sigma) = \lambda - f_2(\sigma)$. По определению, характеристический многочлен $\varphi(\sigma)$ выражается формулой $\det\varphi(\sigma) = \det\big(\lambda - f_2(\sigma)\big)$. Следовательно, $\det\big(\lambda - f_2(\sigma)\big) = \big(\lambda - f_2(x_1)\big)\cdot\big(\lambda - f_2(x_2)\big)\ldots\big(\lambda - f_2(x_n)\big)$. Это равенство имеет место для любых значений λ, из чего следует, что полученное выражение есть разложение характеристического многочлена матрицы $f_2(\sigma)$ по собственным значениям $f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_n)$. По условию теоремы, у многочленов $f_1^n(x)$ и $f_2^n(x)$ ровно k общих числовых корней: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2, \ldots, y_k = x_k$. Однако только что было доказано, что собственные значения $f_2(\sigma)$ суть $f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_k)$, а при условии $y_i = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,k) - f_2(y_1), f_2(y_2), \ldots, f_2(y_k), f_2(x_{k+1}), \ldots, f_2(x_n) = 0,0,\ldots,0, f_2(x_{k+1}), \ldots, f_2(x_n)$. По сути $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – числовые корни $f_1^n(x)$, т.е. $f_1^n(x_i) = 0$. Следовательно, при наличии k общих числовых корней матрица $f_2^m(\sigma)$ допускает k нулевых собственных значений, из чего немедленно следует, что ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-k} x^{n-k} + 0\cdot x^{n-k-1} + \cdots + 0 = \big(x - f_2(x_1)\big)\ldots\big(x - f_2(x_n)\big).$$

Коэффициенты α_i, как известно, определяются как суммы соответствующих главных миноров матрицы $f_2^m(\sigma)$. Исходя из (31), замечаем, что сумма всех главных миноров порядка $n - l$ $(l = 0,1,2,\ldots,k-1)$ равна нулю. Предстоит доказать, что все они и в отдельности нулевые. Пусть σ_0 — другой основной корень порядка n для $f_1^n(x)$, причем имеющий диагональную форму. Тогда $f_2(\sigma)$ также будет диагональной матрицей с элементами по диагонали $f_2(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_2(x_n) = 0,0,\ldots,0, f_2(x_{k+1}), \ldots, f_2(x_n)$. Но ведь матрицы σ и σ_0 имеют одинаковые ранги, следовательно, у матриц $f_2(\sigma)$ и $f_2(\sigma_0)$ ранг равен $n - k - 1$. Из этого следует, что не только сумма соответствующих миноров, но и сами отдельные миноры порядка $n - l$ $(l = 0,1,2,\ldots,k-1)$ нулевые. Легко доказать и обратную теорему. Хотя для любого многочлена степени n в качестве основного матричного корня существует бесчисленное множество матриц порядка n, наиболее удобны матрицы вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Рассмотрим ряд важных применений вышеизложенных теорем.

1. Исключить неизвестное x из системы уравнений

$$\begin{cases} f_1^n(x,y) = x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y) = 0, \\ f_2^m(x,y) = x^m + b_1(y)x^{n-1} + \ldots + b_m(y) = 0. \end{cases} \qquad (33)$$

Находя по формуле (32) основной матричный корень первого уравнения (33) и подставляя его во второе уравнение, получим матрицу порядка n, а именно: $f_2^m(\sigma,y) = \sigma^m + b_1(y)\sigma^{m-1} + \ldots + b_{m-1}(y)\sigma + b_m(y)$. Элементы этой матрицы суть некие функции от коэффициентов $a_i(y)$, $b_j(y)$. Приравнивая определитель матрицы $f_2^m(\sigma,y)$ к нулю, получим алгебраическое уравнение степени k. Пусть корни этого уравнения суть $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Для каждого из них получим совместную систему относительно переменного x. Следовательно, этим общим подходом можно выделить все возможные пары решений (x,y) системы (33) [4].

2. Найти условие, при котором многочлен степени n допускает кратные числовые корни кратности k. Пусть задан многочлен степени n: $f_1^n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Если $f_1^n(x)$ имеет числовой корень кратности k, то имеет место разложение $f_1^n(x) = (x-\alpha)^k f_2^{n-k}(x)$. Выделив один из основных лианитовых корней многочлена $G(x) = (x-a)^k$ в пределах заданной алгебры и подставив его в многочлен $f_1^n(x)$, получим лианит $f_1^n(\sigma)$, у которого все элементы являются некими алгебраическими многочленами относительно α. С другой стороны, вышеизложенная теорема 1 об основных лианитовых корнях требует, чтобы все элементы $f_1^n(\sigma)$ были нули. Следовательно, искомое условие заключается в совместности системы уравнений $\eta_i(\alpha) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где η_i – элементы $f_1^n(\sigma)$.

3. Пусть задано уравнение $x^3 + bx + c = 0$. Требуется найти квадратное уравнение, имеющее с этим кубическим уравнением один общий числовой корень.

Мы решим эту задачу посредством квадратных матриц второго порядка. Согласно теореме об основных матричных корнях, всякая матрица, характеристическое уравнение которой имеет хоть один общий числовой корень с

$x^3+bx+c=f(x)=0,$ обладает свойством $\det f(\sigma)=0.$ Пусть $\sigma=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ – искомая матрица. Подставив ее в многочлен $f(x)=x^3+bx+c$ и вычислив детерминант полученной матрицы, приходим к уравнению

$$\begin{gathered} z^3+(2b-3x_1x_4)z+\left(3x_1^2x_4^2+b^2-3c(x_1+x_4)+b(x_1+x_4)^2-4bx_1x_4\right)z^2- \\ -(x_1^3+bx_1+c)(x_4^3+bx_4+c)=0, \qquad \text{ãäå} \quad z=x_2x_3. \end{gathered} \tag{36}$$

Приравняв коэффициенты при z^2 и z к нулю, получим

$$\begin{cases} x_1+x_4=\dfrac{9c\pm\sqrt{3\left(27c^2+4b^3\right)}}{6b}, \\ x_1x_4=\dfrac{2b}{3}. \end{cases} \tag{37}$$

Свободный член в (36) является симметрической функцией x_1+x_4 и x_1x_4. Характеристическое уравнение матрицы σ имеет вид:

$$x^2-(x_1+x_4)x+(x_1x_4-x_2x_3)=0\,. \tag{38}$$

Один из его корней (числовых) заведомо является корнем и для $x^3+bx+c=0$. Обозначим $z_0=\sqrt{3(27c^2+4b^3)}$. Мы приходим к выражению, не совсем похожему на известную формулу Кардано:

$$x=\frac{(9c+z_0)\pm\sqrt{162c^2-84b^3+18cz_0+48b\cdot\sqrt[3]{\dfrac{z_0{}^4+9cz_0^3}{18}}}}{12b}. \tag{39}$$

4. Найти A^n (n – натуральное число), если $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид: $x^2-4x+3=0$. Его корни $x_1=1$, $x_2=3$, следовательно, A служит основным корнем. Рассмотрим уравнение $\varphi(x)=x^n+ax+b=0$. Вынудим диагональную матрицу $A_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ быть корнем этого уравнения (очевидно побочным).

Имеем: $\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 3a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+b=-3^n \end{cases}$. Тогда $a=\dfrac{1-3^n}{2}$, $b=\dfrac{3^n-3}{2}$. Следовательно,

$$\varphi(x)=x^n+\frac{1-3^n}{2}x+\frac{3^n-3}{2}\,. \tag{40}$$

Так как обе матрицы A и A_0 – основные корни для уравнения $x^2-4x+3=0$, то обе они вынуждены быть корнями (40), т.е. $\varphi(A)=0$ или

$A^n + \frac{1-3^n}{2} A + \frac{3^n-3}{2} = 0$. Следовательно,

$$A^n = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^n = -\frac{1-3^n}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} - \frac{3^n-3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кафедра теоретической и ядерной физики МИФИ,
кафедра алгебры и геометрии ЕГУ

Поступила 28.02.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Курош А.Г.** Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
2. **Белоусов В.Д.** Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
3. **Постников М.М.** Теория Галуа. М.: Физматгиз,1963.
4. **Ленг С.** Алгебра. М.: Мир, 1968.

Լ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՉ ԹՎԱՅԻՆ ԱՐՄԱՏՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են հանրահաշվական հավասարումների ոչ թվային արմատները: Գտնված է կամայական աստիճանի հավասարումների թվային և ոչ թվային արմատների միջև կապ:

L. V. HAKOBYAN

NONNUMERIC ROOTS OF THE ALGEBRAIC EQUATIONS

Summary

The nonnumeric roots of algebraic equations have been investigated here. A relationship between numeric and nonnumeric roots to the algebraic equations of arbitrary order has been established.