ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2007 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

А. В. КЕРОПЯН

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННЫХ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМИ СТРИНГЕРАМИ

В работе рассматриваются задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, границы y=0 которых (в плоскости xoy) усилены стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска. Здесь контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями в конечном участке осуществляется через слой клея (с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками), а в полубесконечных участках имеет место жесткое сцепление. Задачи определения неизвестных контактных напряжений сведены к системе интегродифференциальных уравнений на конечных интервалах при определенных граничных условиях, решение которой строится с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева. Рассмотрены некоторые возможные частные случаи и выяснен характер поведения контактных напряжений.

Для краткого изложения работы в основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость. По ходу ее решения приведены результаты для упругой бесконечной пластины по возможности с одинаковыми обозначениями.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих функциональных уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν) усилена на границе $y=0$ (в плоскости xoy) стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с модулями упругости E_1 и малыми толщинами h. Контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями при $|x|<a$ осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толщина h_k), а при $|x|>b$ они находятся в идеальном механическом контакте. Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров, т.е. в точках $x=\pm b,\ \ x=\pm a$, приложены горизонтальные силы P, а в точках $x=\pm c$ – горизонтальные силы $Q(c>b>a)$.

Аналогичная задача при отсутствии слоя клея была рассмотрена в работе [1]. Контактные задачи для упругих бесконечных тел, усиленных конечными стрингерами через слой клея, рассмотрены в работах [2–6].

Для стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [2–6].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элементов стрингеров и закона Гука получим уравнения равновесия стрингеров в следующем виде:

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{\tau(x)}{E_1h}+\frac{Q\delta(x+c)}{E_1h}, \tag{1.1}$$

$$(du^{(1)}/dx)_{x=-b-0}=P/E_1h,\ -\infty<x<-b,$$

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{\tau(x)}{E_1h}-\frac{Q\delta(x-c)}{E_1h}, \tag{1.2}$$

$$(du^{(1)}/dx)_{x=b+0}=P/E_1h,\ b<x<\infty,$$

$$\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{\tau(x)}{E_1h}, \tag{1.3}$$

$$\left(du^{(1)}/dx\right)_{x=-a+0}=P/E_1h,\ \left(du^{(1)}/dx\right)_{x=a-0}=P/E_1h\ ,\ -a<x<a,$$

которые с помощью обобщенных функций можно записать в виде двух уравнений:

$$\frac{dU_1^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1h}-\frac{Q[\delta(x-c)-\delta(x+c)]}{E_1h}+\frac{P[\delta(x-b)-\delta(x+b)]}{E_1h},\ -\infty<x<\infty, \tag{1.4}$$

$$\frac{dU_0^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_0(x)}{E_1h}-\frac{P[\delta(x-a)-\delta(x+a)]}{E_1h},\quad -\infty<x<\infty. \tag{1.5}$$

Здесь

$$U_1^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx\ ,\ U_0^{(1)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(1)}/dx\ ,$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x),\qquad \tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x), \tag{1.6}$$

$$\tau(x)=\tau_0(x)+\tau_1(x),$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ – интенсивность неизвестных касательных контактных напряжений, $\theta\left(x\right)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\overline{f}(\sigma)=F\left[f(x)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx\ ,\quad f(x)=F^{-1}\left[\overline{f}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\ .$$

Для части стрингера, находящегося на отрезке $\left[-\grave{a},a\right]$, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига, будем иметь условие [2–6]

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau(x)\,,\quad -\grave{a}\le x\le \grave{a}\,, \tag{1.7}$$

которое в обобщенных функциях можно представить так:

$$U_0^{(1)}(x)=U_0^{(2)}(x)+k\tau_0^*(x)\,,\quad -\infty<x<\infty\,, \tag{1.7*}$$

где $\tau_0^*(x)=\tau_0'(x)+\tau(a)\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$, $\tau(a)$ – значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ при нечетности $\tau(x)$, штрих означает дифференцирование по x, $k=h_k/G_k$, $G_k=E_k/2(1+\nu_k)$, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, деформацию граничных точек упругой полуплоскости, когда на ее границе $y=0$ действуют только касательные напряжения с интенсивностью $\tau(x)$, в обобщенных функциях представим в виде

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=U^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\tau_0(s)+\tau_1(s)\right]}{s-x}ds\,. \tag{1.8}$$

Здесь

$$U^{(2)}(x)=U_1^{(2)}(x)+U_0^{(2)}(x)+G_u(x)\,,\; U_1^{(2)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(2)}/dx\,,$$

$$U_0^{(2)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx\,,$$

$$G_u(x)=[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)]g_u(x)\,,$$

$$g_u(x)=du^{(2)}/dx\,,\; x\in(-b,-a)\cup(a,b)\,,\; A=E\big/2(1-\nu^2)\,. \tag{1.9}$$

При решении задачи для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (в предположении, что стрингеры расположены по линии $y=0$), в (1.8) следует A заменить на $A^*=4Ed/b_1(1+\nu)(3-\nu)$, где d – толщина пластины, в (1.4) и (1.5) h следует заменить площадями поперечных сечений стрингеров F, а в (1.7*) – k на $k^*=k/b_1$, b_1 – ширина стрингеров.

Для частей стрингеров при $|x|>b$ условие контакта в обобщенных функциях будет иметь вид

$$U_1^{(1)}(x)=U_1^{(2)}(x)\,. \tag{1.10}$$

Теперь, применив к (1.4), (1.8) и (1.10) обобщенные преобразования Фурье, а затем поступив аналогичным образом с (1.5), (1.7*) и (1.8), получим два функциональных уравнения на действительной оси $-\infty<\sigma<\infty$, которые приводятся к одному уравнению

$$\begin{gathered}(\lambda+|\sigma|)\overline{\tau}_1(\sigma)+(\lambda+|\sigma|+k\grave{A}\sigma^2)\overline{\tau}_0(\sigma)=Ai\sigma G_u(\sigma)+2iQ\lambda\sin c\sigma-\\ -2i\lambda P\sin b\sigma+2i\lambda P\sin a\sigma-2i\sigma kA\tau(a)\cos a\sigma,\quad -\infty<\sigma<\infty\,,\end{gathered} \tag{1.11}$$

где $\lambda=A/E_1h$, $\overline{\tau_i}(\sigma)=F[\tau_i(x)]$, $i=0{,}1$.

Для бесконечной пластины в (1.11) λ следует заменить на $\overline{\lambda}=A^*/E_1F$, k на k^*.

Таким образом, поставленные задачи сведены к решению фукциональных уравнений типа (1.11).

§2. Решение функционального уравнения (1.11). Для этой цели представим его в следующем виде:

$$\bar{\tau}(\sigma)+\frac{kA\sigma^2\,\bar{\tau}_0(\sigma)}{\lambda+|\sigma|}=\frac{Ai\sigma\,G_u(\sigma)}{\lambda+|\sigma|}+\bar{g}(\sigma),\quad -\infty<\sigma<\infty, \tag{2.1}$$

а после обратного преобразования Фурье представим так:

$$\tau(x)-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\tau_0{}'(s)\,ds+A\int_{-\infty}^{\infty}K'(x-s)G_u(s)\,ds=g(x)\,,\quad -\infty<x<\infty\,. \tag{2.2}$$

Здесь

$$K(x)=F^{-1}\left[K(\sigma)\right],\ \tau(x)=F^{-1}\left[\bar{\tau}(\sigma)\right],\ \ g(x)=F^{-1}\left[\bar{g}(\sigma)\right],\quad K(\sigma)=\frac{1}{\lambda+|\sigma|},$$

$$K'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\sigma}{\lambda+|\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma\,,\ \tau'(x)=\frac{d\,\tau(x)}{d\,x}, \tag{2.3}$$

$$g(x)=Q\lambda[K(x-c)-K(x+c)]-P\lambda[K(x-b)-K(x+b)]+$$
$$+P\lambda[K(x-a)-K(x+a)]+kA\tau(a)[K'(x-a)+K'(x+a)].$$

Отметим, что $K(x)\sim\ln(1/|x|)$ при $x\to 0$ и $K(x)\sim|x|^{-2}$ при $x\to\infty$.

Теперь, поскольку $\tau(x)=\tau_0(x)$ при $x\in(-a,\grave{a})$, а также $\tau(x)=0$ при $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$, $G_u(x)=0$ при $x\notin(-b,-a)\cup(a,b)$ и имеют место соотношения $\tau(-x)=-\tau(x)$, $g_u(-x)=g_u(x)$, то из (2.2) будем иметь:

$$\tau(x)-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\tau'(s)\,ds+A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds=g(x)\,,\ x\in(-a,\grave{a}),$$

$$A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\tau'(s)\,ds=g(x)\,,\ x\in(a,b)\,, \tag{2.4}$$

при условиях

$$\int_{-\grave{a}}^{\grave{a}}\tau(s)\,ds=0\,,\quad \int_{b}^{\infty}\tau(s)\,ds=Q-P\,. \tag{2.5}$$

Таким образом, задачи сведены к решению системы интегродифференциальных уравнений типа (2.4) при условиях (2.5).

После решения системы (2.4) значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из уравнения (2.2) при требовании $|x|>b$.

Отметим, что при отсутствии слоя клея, т.е. при k=0, уравнения (2.2), (2.4) при условиях (2.5) преобразуются соответственно в уравнения

$$\tau(x)+A\int_{-\infty}^{\infty}K'(x-s)G_u(s)\,ds=g_1(x)\,,\qquad -\infty<x<\infty\,, \tag{2.2*}$$

$$\tau(x)+A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds=g_1(x)\,,\quad x\in(-a,\grave{a})\,, \tag{2.4*}$$

$$A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds=g_1(x)\,,\qquad x\in(a,b)\,,$$

где $g_1(x) \equiv g(x)$ при $k = 0$.

При этом заметим, что в предельном случае, т.е. при стремлении концов стрингеров $b \to a$ и $-b \to -a$, из уравнения (2.2*) непосредственно получим известное решение задачи Мелана с бесконечным стрингером в виде

$$\tau(x) = Q\lambda[K(x-c) - K(x+c)], \quad -\infty < x < \infty .$$

Решение системы (2.4) при условиях (2.5) сведем к системе бесконечных систем алгебраических уравнений. Для этой цели заметим, что имеют место следующие представления:

$$K(x) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\lambda x|} + R_1(x), \tag{2.6}$$

$$K'(x-s) + K'(x+s) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x}\right) + \frac{\lambda}{2}[\operatorname{sgn}(x-s) + \operatorname{sgn}(x+s)] +$$
$$+\lambda\left[R_2(x-s) + R_2(x+s)\right],$$

где

$$R_1(x) = -\frac{C}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\lambda x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda x|} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - C\right) - \frac{|\lambda x|^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right],$$

$$R_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\lambda x)^{2n-1}}{\pi(2n-1)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda x|} + 1 + \dots + \frac{1}{2n-1} - C\right) + \frac{|\lambda x|^{2n}\operatorname{sgn} x}{2(2n)!}\right],$$

C – постоянная Эйлера.

Следовательно, систему (2.4) можно представить так:

$$(1 - kA\lambda)\tau(x) - \frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds - kA\lambda\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds + \frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x}\right)g_u(s)ds +$$
$$+A\lambda\int_{a}^{b}[R_2(x-s) + R_2(x+s)]g_u(s)ds = g(x), \quad x \in (-a,a), \tag{2.7}$$
$$\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s-x}g_u(s)ds - \frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s+x}g_u(s)ds + \frac{A\lambda}{2}\int_{a}^{b}[\operatorname{sgn}(x-s) + \operatorname{sgn}(x+s)]g_u(s)ds +$$
$$+A\lambda\int_{a}^{b}[R_2(x-s) + R_2(x+s)]g_u(s)ds - \frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds -$$
$$-kA\lambda\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds = g(x), \; x \in (a,b).$$

Теперь отметим, что из первого уравнения (2.7) легко получить, что $\tau(x)$ в точках $x = \pm a$ имеет ограниченные значения [2–6]. Тогда решения системы (2.7) представим в виде:

$$\tau(x) = \tau(a)\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad x \in [-a,a], \tag{2.8}$$

$$g_u(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - h^2(x)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_n T_n[h(x)], \quad |h(x)| < 1, \quad x \in (a,b), \tag{2.9}$$

где $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$, а $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$, $n=0,1,2,...$, – многочлены Чебышева первого рода, $U_{n-1}(x)=\sin(n\arccos x)/\sin(\arccos x)$, $n=1,2,...$, – многочлены Чебышева второго рода, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Отметим, что из (1.7) и (1.8) легко получить, что $g_u(x)$ и $\tau'(x)$ в точках $x=\pm a$ имеют логарифмическую особенность.

Подставляя выражения (2.8) и (2.9) в систему (2.7) и пользуясь соотношениями [6–11]

$$\int_a^b \sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]U_{m-1}[h(x)]dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi(b-a)}{4}, & n=m=1,2,...\end{cases} \quad x\in(a,b),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}0, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)], & n=1,2,...,\quad x\in(a,b),\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)]-\dfrac{T_n[h(x)]}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=1,2,...,\end{cases} \quad x>b,$$

а также первым условием из (2.5), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1-kA\lambda}{kAa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\sqrt{a^2-x^2}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}-\\
&-\frac{\lambda\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds+2\lambda\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds+\\
&+\frac{1}{k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds+\\
&+\frac{\lambda}{k}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds=\\
&=-\frac{Y_0}{k\pi}\int_a^b\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds-\\
&-\frac{\lambda Y_0}{k}\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+g_1(x),\quad x\in(-a,a),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$A\sum_{n=1}^{\infty}Y_nU_{n-1}[h(x)]-A\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{1}{(s+x)}\frac{T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]-$$

$$-\frac{A\lambda\left(b-a\right)}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n}\sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]+$$

$$+A\lambda\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n\left[h(s)\right]ds+$$

$$+A\lambda Y_0\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+ \tag{2.12}$$

$$+\frac{kA}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(s/a\right)ds}{\left(s-x\right)\sqrt{a^2-s^2}}+kA\lambda\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds-$$

$$-\frac{kA\lambda\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds=g_2(x),\qquad x\in(a,b),$$

где $g_1(x)=\dfrac{g(x)}{kA}-\dfrac{\tau(a)}{a}\left[\dfrac{\left(1-kA\lambda\right)}{kA}x-\dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{a-x}{a+x}\right]$,

$$g_2(x)=g(x)+kA\lambda\tau(a)+\frac{kA\tau(a)}{\pi a}\ln\frac{x-a}{x+a}.$$

Теперь, умножаем обе части (2.11) на $\left(1/\pi a\right)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(x/a\right)$, а (2.12) – на $4\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]\big/\pi A(b-a)$, затем проинтегрировав в соответствующих интервалах, получим следующую систему бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(1)}\right)X_n+\left(K_{m,n}^{(2)}+R_{m,n}^{(2)}\right)Y_n\right]=\alpha_m^{(1)}Y_0+R_m^{(1)}+f_m^{(1)}\ \ (m=1,2,\ldots) \tag{2.13}$$

$$Y_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(3)}+K_{m,n}^{(4)}+K_{m,n}^{(5)}\right)Y_n+\left(R_{m,n}^{(3)}+R_{m,n}^{(4)}\right)X_n\right]_n=\alpha_m^{(2)}Y_0+R_m^{(2)}+f_m^{(2)}\ \ (m=1,2,\ldots). \tag{2.14}$$

Здесь

$$K_{m,n}^{(1)}=\frac{a\left(kA\lambda-1\right)}{kA}\frac{4\left(2m-1\right)}{\pi\left[\left(2n-1\right)^2-4\left(m-1\right)^2\right]\left[\left(2n-1\right)^2-4m^2\right]}\qquad(n,m=1,2,\ldots),$$

$$R_{m,n}^{(1)}=\frac{2\lambda}{\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_{m,n}^{(2)}=\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left\{U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}[h_*(x)]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right\}\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\qquad h_*(x)=h(-x),$$

$$R_{m,n}^{(2)}=\frac{\lambda}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$\alpha_m^{(1)} = -\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}} + \lambda\int_a^b R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\right]\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_m^{(1)} = \frac{\lambda\tau(a)}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} R_2(x-s)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$f_m^{(1)} = \frac{1}{\pi a}\int_{-a}^{a} g_1(x)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\quad f_m^{(2)} = -\frac{4}{A\pi(b-a)}\int_a^b g_2(x)\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$K_{m,n}^{(3)} = \frac{4}{\pi(a-b)}\int_a^b\sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}\left[\sqrt{h_*^2(x)-1}-h_*(x)\right]^n U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$K_{m,n}^{(4)} = \frac{\lambda(a-b)}{\pi}\frac{2m\left[1+(-1)^{n-m}\right]}{\left[n^2-(m-1)^2\right]\left[n^2-(m+1)^2\right]},\quad n \ne m\pm 1,\quad K_{m,n}^{(4)} = 0,\quad n = m\pm 1,$$

$$K_{m,n}^{(5)} = \frac{4\lambda}{\pi(b-a)}\int_a^b\int_a^b\frac{[R_2(x-s)+R_2(x+s)]T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx$$

$$R_{m,n}^{(3)} = \frac{8ka^{2n}}{\pi(b-a)}\int_a^b\frac{\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}\left[h(x)\right]dx}{\sqrt{x^2-a^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}},$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{8k\lambda}{\pi(b-a)}\int_a^b\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$R_m^{(2)} = \frac{4k\lambda\tau(a)}{\pi(a-b)a}\int_a^b\int_{-a}^{a} R_2(x-s)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$\alpha_m^{(2)} = \frac{4}{\pi(a-b)}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}U_{m-1}[h(x)]dx + \right.$$

$$\left. + \lambda\int_a^b\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\right].$$

Система уравнений (2.13)–(2.14) исследуется аналогично системам из [8–10]. Оказывается, что при произвольных значениях λ эта система квазивполне регулярна. Постоянная Y_0 определяется из второго условия (2.5). После определения X_n $(n = 1,2,3...)$ и Y_n $(n = 0,1,2,...)$ значения $\tau(x)$ при $x > b$ будут определяться так:

$$\tau(x) = -\frac{2kA}{(1-kA\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\frac{a^{2n}}{\sqrt{x^2-a^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}} -$$

$$-\frac{2kA\lambda}{(1-kA\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds + \frac{kA\lambda\tau(a)}{(1-kA\lambda)a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds -$$

$$
-\frac{A}{(1-kA\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\left[U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}\left[h_*\left(x\right)\right]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right]+
$$

$$
+\frac{AY_0}{(1-kA\lambda)}\left[\frac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}-\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}-\lambda\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]-
$$

$$
-\frac{A\lambda}{(1-kA\lambda)}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+\frac{kA\tau(a)}{\pi(1-kA\lambda)a}\ln\frac{x-a}{x+a}+\frac{g(x)}{(1-kA\lambda)}.
$$

Значение $\tau(x)$ в точке a получим из уравнения (2.2), подставляя в него $x=a$. Из (2.3) и (2.6) следует, что $\tau(x)$ в точках $x=\pm c$ имеет логарифмическую особенность.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 21.11.2006*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1984, № 1, с. 46–51.
2. **Lubkin J.L. and Lewis L.C.** – Quart J. of Mech. and Applied Math., 1970, v. XXIII, p. 521.
3. **Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С.** – Изв. РАН, МТТ, 1992, № 3, с. 180–184.
4. **Саркисян В.С., Керопян А.В.** Контактные задачи для упругих тел, на границе которых приклеен линейно или нелинейно деформируемый стрингер конечной длины. Сб. научных трудов: Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела. НАН Армении, Ер., 1999, с. 126–132.
5. **Григорян Э.Х.** – Изв. НАН Армении. Механика, 2000, № 4, с. 11–16.
6. **Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С.** – Изв. НАН Армении. Механика, 2002, № 2, с. 14–23.
7. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979, 415с.
8. **Саркисян В.С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983, 259 с.
9. **Григорян Э.Х., Манукян Э.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1981, № 1, с. 51–59.
10. **Александров В.М., Мхитарян С.М.** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983, 487 с.
11. **Попов Г.Я.** Контактные задачи для линейно деформируемого основания. Киев–Одесса: Вища школа, 1982, 167 с.

Ա. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ՄԱՍԱՄԲ ՍՈՄՆՁՎԱԾ ՍՏՐԻՆԳԵՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Դիտարկված են խնդիրներ առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար, որոնց $y=0$ եզրերը (xoy հարթության մեջ) ուժեղացված են

առաձգական ստրինգերներով՝ առաձգական վերադիրների տեսքով: Ստրինգերները բաղկացած են երկու սիմետրիկ դասավորված կիսաանվերջ կտորներից և մեկ առանձնացված վերջավոր կտորից: Ենթադրվում է, որ վերջավոր տեղամասում կոնտակտային ձոխազդեցությունը իրագործվում է այլ ֆիզիկա-մեխանիկական հատկություններ ունեցող սոսնձի շերտի միջոցով, իսկ կիսաանվերջ տեղամասերում իրագործված է իդեալական մեխանիկական կոնտակտի վիճակ: Անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը բերված է վերջավոր հատվածներում ինտեգրոդիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցված է Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի կիրառմամբ: Դիտարկված են հնարավոր մասնավոր դեպքեր և հետազոտված է կոնտակտային լարումների բնույթը:

A. V. KEROBYAN

CONTACT PROBLEMS FOR THE ELASTIC HALF-PLANE AND THE INFINITE PLATE WHICH ARE STRENGTHENED TO PARTIALLY GLUED STRINGERS

Summary

This work considers contact problems for elastic half-plane and the infinite plate the boundary of which $y=0$ (in plane *xoy*) is strengthened by elastic stringers (overlays) which consist of two semi infinite parts and one separate finite part. It is supposed that contact interaction in finite part is realized by a thin layer of glue (another physicomechanical characteristic) and stringers are deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transforms the determinational problem of unknown contact stresses is reduced to the system of singular integrodifferential equations with Cauchy's Kernel within the finite intervals. The solution is constructed using Chebishev polynomials. The particular cases are considered and the character of the change contact stresses are illustrated in different contact parts.