ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

Х. В. КЕРОБЯН

МОДЕЛЬ $M|G|1|\infty$ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ И «ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ» ЗАПРОСАМИ

Рассматривается модель $M|G|1|\infty$ с ненадежным прибором и «отрицательными» запросами, которые уничтожают находящиеся в модели регулярные запросы. Исследуются распределения длины очереди, периода занятости и периода регенерации модели.

Введение. В области теории очередей наблюдается интерес к моделям с «отрицательными» запросами (negative customer), которые уничтожают накопленную рабочую нагрузку [1]. В применениях часто прибытие «отрицательного» запроса интерпретируют как поломку прибора или поступление вируса, который уничтожает накопленную информацию [2]. В литературе такие запросы упоминаются также как «смывание очереди» [2], «массовое бегство» [3], «катастрофа» [4–6]. Модели и сети очередей с «отрицательными» запросами предложены и исследованы Джеленбе [7]. Это G-сети с различными механизмами взаимодействия «отрицательных» и регулярных запросов.

При анализе G-сетей и очередей с «отрицательными» запросами часто считают, что они в сети не накапливаются и не обслуживаются, а лишь воздействуют на регулярные запросы: уничтожают, перемещают, преобразовывают или генерируют их [1, 7]. Моделям очередей и G-сетей с «отрицательными» запросами посвящено много работ (см., напр., [1, 8]). Модели $M|G|1|\infty$ $MAP|G|1|\infty$ и $BMAP|G|1|\infty$ с «отрицательными» запросами и с восстановлением прибора после их поступления при различных стратегиях накопления регулярных запросов исследованы в [4, 9–11].

Модели с ненадежным прибором и приоритетами мало исследованы. Отметим работу [2] по модели $M/M/1$ с «отрицательными» запросами и приоритетами, где такие модели используют для анализа распределенной базы данных с поврежденными участками, в [4, 7] – для анализа компьютерных сетей и систем с вирусами, в [12] – для моделирования поведения вирусов в сети, оценки размера нанесенного ими ущерба и уровня защищенности сети, в [13] – для оптимального управления сетевыми ресурсами.

В настоящей работе рассмотрена очередь $M|G|1|\infty$ с ненадежным прибором и «отрицательными» запросами. Исследованы распределения длины очереди регулярных запросов, периода занятости (ПЗ) и периода регенерации (ПР) модели.

Описание модели. Рассмотрим модель $M|G|1|\infty$ с ненадежным прибором и двумя пуассоновскими потоками. Первый поток – регулярные запросы, которые могут накапливаться в очереди и обслуживаться. Второй – «отрицательные» запросы, которые в модели не накапливаются и не обслуживаются. Запросы первого потока имеют параметр λ, а второго – ν. Прибор выходит из строя только в свободном состоянии. При отказе прибора восстановление начинается немедленно. Время между отказами прибора имеет экспоненциальное распределение с параметром α. Поступающие за период восстановления прибора запросы накапливаются и обслуживаются после восстановления.

«Отрицательный» запрос действует следующим образом. Если при его поступлении прибор свободен и исправен, то он теряется. Если прибор занят обслуживанием то он уничтожает все регулярные запросы. Если прибор неисправен и восстанавливается, то он прерывает восстановление и уничтожает регулярные запросы. Модель продолжает работу со свободного состояния. Регулярные запросы в модели обслуживаются по дисциплине FIFO (first in–first out).

Длительности обслуживания регулярных запросов и восстановления прибора – независимые одинаково распределенные случайные величины (СВ) β и γ с произвольными функциями распределения (ФР) $B(x)=P(\beta<x)$ и $C(x)=P(\gamma<x)$, плотностями $b(x)$, $c(x)$ и конечными средними значениями $\overline{\beta}$ и $\overline{\gamma}$ соответственно. Число мест для ожидания в модели неограниченно. В момент $t=0$ модель свободна и исправна.

Длина очереди. Рассмотрим случайный процесс (СП) $<L(t),x(t),I(t)>$, где $L(t)$ – количество регулярных запросов в модели в момент t. Если в момент t прибор исправен, то $I(t)=0$, в противном случае $I(t)=1$. Если в момент t модель свободна и исправна, т.е. $L(t)=0$, то полагаем $x(t)=0$. При $L(t)\geq 1$ полагаем $x(t)$ равным времени, которое прошло до момента t с начала обслуживания запроса, находящегося в момент t на приборе. Если в момент t прибор восстанавливается, то $x(t)$ полагаем равным времени, которое прошло с начала восстановления прибора до момента t. Введем обозначения:

$$P(n,x,t)=\frac{\partial}{\partial x}P(I(t)=0,L(t)=n,x(t)<x),\ K(n,x,t)=\frac{\partial}{\partial x}P(I(t)=1,L(t)=n,x(t)<x),$$

$$P_0(t)=P(I(t)=0,L(t)=0),\ P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t),\ P(n,x)=\lim_{t\to\infty}P(n,x,t),\ K(n,x)=\lim_{t\to\infty}K(n,x,t),$$

$$P(z,x,t)=\sum_{n\geq 1}z^nP(n,x,t),\quad K(z,x,t)=\sum_{n\geq 0}z^nK(n,x,t),\quad |z|\leq 1,$$

$$\overline{F}(x)=1-F(x),\ \tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}F(x)dx,\ f_1=\int_0^\infty \overline{F}(x)dx\ ,$$

$$\eta(x)=\frac{b(x)}{1-B(x)},\quad h(x)=\frac{c(x)}{1-C(x)},\quad B(x)=1-e^{-\int_0^x \eta(t)dt},\quad C(x)=1-e^{-\int_0^x h(t)dt}.$$

Теорема 1. Преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) производящих функций (ПФ) $\tilde{P}(z,x,s)$, $\tilde{K}(z,x,s)$, $\tilde{P}(z,s)$, $\tilde{K}(z,s)$ и вероятности свободного состояния модели $\tilde{P}_0(s)$ можно определить из следующих соотношений:

$$\tilde{P}(z,x,s)=\frac{(\nu+s)z}{s\left\{z-\tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}}\left[\frac{z-R(s)+\alpha\left\{\tilde{C}[\varphi(s,z)]-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))]\right\}}{\varphi(s,R(s))+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))])}\right]e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{K}(z,x,s)=\frac{\alpha(\nu+s)}{s\{\varphi(s,R(s))+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))])\}}e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1-C(x)],$$

$$\tilde{P}_0(s)=\frac{\nu+s}{s\{\varphi(s,R(s))+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))])\}},$$

$$\tilde{P}(z,s)=\frac{(\nu+s)z\left\{1-\tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}}{s\left\{z-\tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}\varphi(s,z)}\cdot\left[\frac{z-R(s)+\alpha\left\{\tilde{C}[\varphi(s,z)]-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))]\right\}}{\varphi(s,R(s))+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))])}\right],$$

$$\tilde{K}(z,s)=\frac{\alpha(\nu+s)\left\{1-\tilde{C}[\varphi(s,z)]\right\}}{s\{\varphi(s,R(s))+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,R(s))])\}\varphi(s,z)}.$$

Доказательство. Для $P(n,x,t)$ и $K(n,x,t)$ составим уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial}{\partial t}P_0(t)+(\lambda+\alpha)P_0(t)=\int_0^t P(1,x,t)\eta(x)dx+\int_0^t K(0,x,t)h(x)dx+$$
$$+\nu\left[\sum_{n\geq 1}\int_0^t P(n,x,t)dx+\sum_{n\geq 0}\int_0^t K(n,x,t)dx\right],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)P(n,x,t)+[\lambda+\nu+\eta(x)]P(n,x,t)=(1-\delta_{n,1})\lambda P(n-1,x,t),\quad n\geq 1,\quad (1)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)K(n,x,t)+[\lambda+\nu+h(x)]K(n,x,t)=(1-\delta_{n,0})\lambda K(n-1,x,t),\quad n\geq 0.$$

Запишем граничные условия:

$$P(n,+0,t)=\int_0^t P(n+1,x,t)\eta(x)dx+\int_0^t K(n,x,t)h(x)dx+\lambda\delta_{n,1}P_0(t),\quad n\geq 1,$$
$$K(0,0,t)=\alpha P_0(t),\quad K(n,0,t)=0,\quad n>0. \quad (2)$$

Также запишем начальные условия: $P_0(0)=1$, $P(n,x,0)=0$, $n>0$, $K(n,x,0)=0$, $n\geq 0$, и условие нормировки:

$$P_0(t)+\sum_{n>0}\int_0^t P(n,x,t)dx+\sum_{n\geq 0}\int_0^t K(n,x,t)dx=1,\quad t\geq 0.$$

В (2) $\delta_{n,1}=\begin{cases}1 & \text{при } n=1,\\ 0 & \text{при } n\neq 1.\end{cases}$

Переходя в (1) и (2) к ПФ и ПЛС по t, имеем:

$$\begin{gathered}\tilde{P}_0(s)(s+\lambda+\alpha)=1+\int_0^\infty \tilde{P}(1,x,s)\eta(x)dx+\int_0^\infty \tilde{K}(0,x,s)h(x)dx+\\ +\nu\left[\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty P(n,x,s)dx+\sum_{n\geq 0}\int_0^\infty K(n,x,s)dx\right],\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{P}(z,x,s)=-[s+\lambda(1-z)+\nu+\eta(x)]\tilde{P}(z,x,s),\\ \frac{\partial}{\partial x}\tilde{K}(z,x,s)=-[s+\lambda(1-z)+\nu+h(x)]\tilde{K}(z,x,s),\end{gathered} \tag{4}$$

$$\tilde{K}(0,0,s)=\alpha\tilde{P}(s), \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\tilde{P}(z,+0,s)=z^{-1}\int_0^\infty \tilde{P}(z,x,s)\eta(x)dx+\int_0^\infty \tilde{K}(z,x,s)h(x)dx+\tilde{P}_0(s)z\lambda-\\ -\int_0^\infty \tilde{P}(1,x,s)\eta(x)dx-\int_0^\infty \tilde{K}(0,x,s)h(x)dx.\end{gathered} \tag{6}$$

Решения уравнений (4) записываем в виде

$$\begin{gathered}\tilde{P}(z,x,s)=\tilde{P}(z,+0,s)e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1-B(x)],\\ \tilde{K}(z,x,s)=\tilde{K}(z,+0,s)e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1-C(x)].\end{gathered} \tag{4'}$$

Из условия нормировки имеем $\frac{1}{s}-\tilde{P}_0(s)=\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{P}(n,x,s)dx+\sum_{n\geq 0}\int_0^\infty \tilde{K}(n,x,s)dx$.

Из (3) и (6) получаем

$$\int_0^\infty \tilde{P}(1,x,s)\eta(x)dx+\int_0^\infty \tilde{K}(0,x,s)h(x)dx=\left\{1+\frac{\nu}{s}\right\}-\tilde{P}_0(s)[s+\alpha+\nu+\lambda]. \tag{7}$$

Из (5) находим $\tilde{K}(z,0,s)=\sum_{n\geq 0}z^n\tilde{K}(n,0,s)=\tilde{K}(0,0,s)=\alpha\tilde{P}_0(s)$.

Подставляя (7) в (6), получаем

$$\tilde{P}(z,+0,s)=z^{-1}\int_0^\infty \tilde{P}(z,x,s)\eta(x)dx+\int_0^\infty \tilde{K}(z,x,s)h(x)dx-[s+\alpha+\nu+\lambda(1-z)]\tilde{P}_0(s)+\left\{1+\frac{\nu}{s}\right\}. \tag{8}$$

Подставляя (4') в (8), после упрощений находим

$$\tilde{P}(z,+0,s)\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}=1+\frac{\nu}{s}-\tilde{P}_0(s)\left\{\varphi(s,z)+\alpha(1-\tilde{C}[\varphi(s,z)])\right\}, \tag{9}$$

где $\varphi(s,z)=s+\nu+\lambda(1-z)$, $\tilde{B}[\varphi(s,z)]=\int_0^\infty e^{-\varphi(s,z)x}dB(x)$.

Пусть $R(s)$ – наименьший неотрицательный корень уравнения $z=\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]$. Тогда из условия ограниченности ПФ $\tilde{P}(z,+0,s)$ при $|z|\leq 1$ находим $\tilde{P}_0(s)$:

$$\tilde{P}_0(s) = \frac{\nu + s}{s\{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])\}}. \qquad (10)$$

В [13, 15] получены выражения для $\tilde{P}_0(s)$ и $R(s)$ при $\alpha = 0$ для модели $M|G|1|\infty$ с дисциплинами обслуживания регулярных запросов FIFO и LIFO (last in–first out).

Как следует из [15], полученное для $\tilde{P}_0(s)$ выражение верно для моделей с консервативными дисциплинами [16].

Из (5) имеем $\tilde{K}(0,0,s) = \dfrac{\alpha(\nu + s)}{s\{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])\}}$.

Подставляя в (8) выражение (10), находим

$$\tilde{P}(z, +0, s) = \frac{(\nu + s)z}{s\left\{z - \tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}} \left[\frac{z - R(s) + \alpha\left\{\tilde{C}[\varphi(s,z)] - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))]\right\}}{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])} \right],$$

$$\tilde{P}(z,x,s) = \frac{(\nu+s)z}{s\left\{z - \tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}} \left[\frac{z - R(s) + \alpha\left\{\tilde{C}[\varphi(s,z)] - \tilde{C}[\varphi(s,R(s))]\right\}}{\varphi(s,R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s,R(s))])} \right] e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1 - B(x)],$$

$$\tilde{K}(z,x,s) = \frac{\alpha(\nu + s)}{s\{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])\}} e^{-[s+\lambda(1-z)+\nu]x}[1 - C(x)].$$

Проинтегрировав $\tilde{P}(z, x, s)$ и $\tilde{K}(z,x,s)$, получаем

$$\tilde{P}(z,s) = \frac{(\nu + s)z\left\{1 - \tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}}{s\left\{z - \tilde{B}[\varphi(s,z)]\right\}\varphi(s,z)} \cdot \left[\frac{z - R(s) + \alpha\left\{\tilde{C}[\varphi(s,z)] - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))]\right\}}{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])} \right],$$

$$\tilde{K}(z,s) = \frac{\alpha(\nu + s)\left\{1 - \tilde{C}[\varphi(s,z)]\right\}}{s\{\varphi(s, R(s)) + \alpha(1 - \tilde{C}[\varphi(s, R(s))])\}\varphi(s,z)}.$$

Период занятости модели. Для определения ПЗ модели воспользуемся методом введения дополнительной переменной [13, 15]. Введем плотности вероятностей:

$$q(n,x,t) = \frac{\partial}{\partial x} P\{I(t) = 0,\ L(t) = n,\ x(t) < x,\ L(t_1) = 0 \text{ для всех } t_1\ (0 < t_1 < t) \,|\, L(0) = 0\},$$
$$n > 0,\ x \ge 0,\ t \ge 0,$$

$$g(n,x,t) = \frac{\partial}{\partial x} P\{I(t) = 1,\ L(t) = n,\ x(t) < x,\ L(t_1) = 0 \text{ для всех } t_1\ (0 < t_1 < t) \,|\, L(0) = 0\},$$
$$n \ge 0,\ x \ge 0,\ t \ge 0,$$

$$q(z,x,t) = \sum_{n\ge 1} z^n q(n,x,t), \quad \tilde{q}(z,x,s) = \int_0^\infty e^{-st} q(z,x,t)dt,$$

$$g(z,x,t) = \sum_{n\ge 0} z^n g(n,x,t), \quad \tilde{g}(z,x,s) = \int_0^\infty e^{-st} g(z,x,t)dt.$$

Теорема 2. Для ПЛС ФР и среднего значения ПЗ модели, ПФ количества запросов внутри ПЗ модели справедливы соотношения:

$$\tilde{\pi}_\nu(s)=\frac{\nu}{\nu+s}+\frac{s}{(\lambda+\alpha)(s+\nu)}\cdot\left\{\lambda R(s)+\alpha\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]\right\},$$

$$\bar{\pi}_\nu=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\cdot\frac{1-\tilde{B}(\nu)}{\nu}+\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\cdot\frac{1-\tilde{C}(\nu)}{\nu}, \tag{11}$$

$$\tilde{q}_a(z,x,s)=\frac{z[1-R(s)]}{z-\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]}e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{q}_b(z,x,s)=\frac{\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]}{\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]\right\}}e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{g}_b(z,x,s)=e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-C(x)]$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned}&a)\ q(n,x,0)=\delta(x)\delta_{n,1},\ \ g(n,x,0)=0,\quad n\ge 0,\ x\ge 0,\\&b)\ g(n,x,0)=\delta(x)\delta_{n,0},\ \ q(n,x,0)=0,\quad n\ge 1,\ x\ge 0,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$.

Доказательство. Составим дифференциально-разностные уравнения Колмогорова для плотностей $q(n,x,t)$, $g(n,x,t)$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)q(n,x,t)+[\lambda+\nu+\eta(x)]q(n,x,t)=(1-\delta_{n,1})\lambda q(n-1,x,t),\ \ n\ge 1,\ x>0,\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)g(n,x,t)+[\lambda+\nu+h(x)]g(n,x,t)=(1-\delta_{n,0})\lambda g(n-1,x,t),\ \ n\ge 0,\ x>0,\\&q(n,+0,t)=\int\limits_0^t q(n+1,x,t)\eta(x)dx+\int\limits_0^t g(n,x,t)h(x)dx,\qquad n\ge 1,\ t>0,\\&g(n,+0,t)=0,\qquad n\ge 1,\ t\ge 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Переходя к ПФ, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)q(z,x,t)=-[\lambda(1-z)+\nu+\eta(x)]q(z,x,t),\qquad x>0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)g(z,x,t)=-[\lambda(1-z)+\nu+h(x)]g(z,x,t),$$

$$q(z,+0,t)=\frac{1}{z}\int\limits_0^t q(z,x,t)\eta(x)dx+\int\limits_0^t g(z,x,t)h(x)dx-\int\limits_0^t q(1,x,t)\eta(x)dx-\int\limits_0^t g(0,x,t)h(x)dx. \tag{14}$$

Далее, переходя в (13) к ПЛС, с учетом начальных условий (12) для $\tilde{q}(z,x,s)$ и $\tilde{q}(z,+0,s)$ в случае а) имеем

$$\tilde{q}_a(z,x,s)=[\tilde{q}_a(z,+0,s)+z]e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{q}_a(z,+0,s)=\frac{1}{z}\int_0^\infty \tilde{q}_a(z,x,s)\eta(x)dx-\int_0^\infty \tilde{q}_a(1,x,s)\eta(x)dx. \qquad (15)$$

Подставляя выражение для $\tilde{q}_a(z,x,s)$ в (15), находим

$$\tilde{q}_a(z,+0,s)\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]\right\}=\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\int_0^\infty \tilde{q}_a(1,x,s)\eta(x)dx\ .$$

Введем обозначение: $\int_0^\infty \tilde{q}_a(1,x,s)\eta(x)dx=R(s)$. Пусть $R(s)$ – наименьший неотрицательный корень уравнения $z=\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]$. Из-за ограниченности ПФ $\tilde{q}(z,+0,s)$ при $|z|\le 1$ имеем $R(s)=\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]$. Отсюда следует, что $\tilde{q}_a(z,+0,s)=\dfrac{\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]}{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]}$. Далее находим $\tilde{q}_a(z,x,s)=\dfrac{z[1-R(s)]}{z-\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]}e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)]$.

В случае b) имеем

$$\tilde{q}_b(z,x,s)=\tilde{q}_b(z,+0,s)e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{g}_b(z,x,s)=e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-C(x)]\ ,$$

$$\begin{aligned}\tilde{q}_b(z,+0,s)=&\frac{1}{z}\int_0^\infty \tilde{q}_b(z,x,s)\eta(x)dx+\int_0^\infty \tilde{g}_b(z,x,s)h(x)dx-\int_0^\infty \tilde{g}_b(0,x,s)h(x)dx-\\&-\int_0^\infty \tilde{q}_b(1,x,s)\eta(x)dx-\int_0^\infty \tilde{g}_b(0,x,s)h(x)dx.\end{aligned} \qquad (16)$$

Подставляя в (16) ПФ $\tilde{g}_b(z,x,s)$ и $\tilde{q}_b(z,x,s)$, находим

$$\begin{aligned}\tilde{q}_b(z,+0,s)\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]\right\}=\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\\-\int_0^\infty \tilde{q}_b(1,x,s)\eta(x)dx-\int_0^\infty \tilde{g}_b(0,x,s)h(x)dx.\end{aligned}$$

Из условия ограниченности ПФ $\tilde{q}_b(z,+0,s)$ имеем

$$\tilde{q}_b(z,+0,s)=\frac{\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]}{\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]\right\}}\ .$$

Подставляя ПФ $\tilde{q}_b(z,+0,s)$ в (14), получаем

$$\tilde{q}_b(z,x,s)=\frac{\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-z)]-\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]}{\left\{1-\frac{1}{z}\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-z)]\right\}}e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-B(x)],$$

$$\tilde{g}_b(z,x,s)=e^{-[s+\nu+\lambda(1-z)]x}[1-C(x)]\ .$$

Пусть $\tilde{\pi}_\nu(s)$ – ПЛС ФР ПЗ модели. ПЗ определим как промежуток времени, начавшийся либо с обслуживания запроса, поступившего в свободную и исправную систему, либо с восстановления прибора до следующего момента, когда модель свободна от запросов и прибор исправен. Тогда для $\tilde{\pi}_\nu(s)$ запишем:

$$\tilde{\pi}_\nu(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{q}_a(n,x,s)dx + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\left\{\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{q}_b(n,x,s)dx + \sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{g}_b(n,x,s)dx\right\}, \quad (17)$$

где имеем

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{q}_a(n,x,s)dx = \int_0^\infty \tilde{q}_a(1,x,s)dx = \int_0^\infty \frac{[1-R(s)]}{1-\tilde{B}[s+\nu]}e^{-[s+\nu]x}[1-B(x)]dx = \frac{1-R(s)}{s+\nu},$$

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{q}_b(n,x,s)dx = \int_0^\infty \tilde{q}_b(1,x,s)dx = \frac{\tilde{C}[s+\nu]-\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-R(s))]}{s+\nu},$$

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty \tilde{g}_b(n,x,s)dx = \int_0^\infty \tilde{g}_b(n,x,s)dx = \int_0^\infty e^{-[s+\nu]x}[1-C(x)]dx = \frac{1-\tilde{C}[s+\nu]}{s+\nu}.$$

Отсюда для ПЛС ФР $\tilde{\pi}_\nu(s)$ и среднего значения ПЗ получаем искомые формулы (11). Из (11) в случае надежного прибора ($\alpha = 0$) находим $\tilde{\pi}_\nu(s) = \dfrac{sR(s)+\nu}{\nu+s}$ (см. [4]). ПЛС ФР ПЗ $\tilde{\pi}_\nu(s)$ можно определить также методом дополнительного события [15].

Период регенерации модели. ПР определим как промежуток времени между двумя соседними переходами модели в свободное и исправное состояние.

Пусть $\tilde{\gamma}_\nu(s)$ – ПЛС ФР ПР. Методом дополнительного события [15] находим

$$\tilde{\gamma}_\nu(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+s}\cdot\frac{\nu+s\tilde{B}[s+\nu+\lambda(1-\tilde{\pi}(s))]}{\nu+s} + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+s}\cdot\frac{\nu+s\tilde{C}[s+\nu+\lambda(1-\tilde{\pi}(s))]}{\nu+s}.$$

Приоритетные модели $M_r| G_r|1|\infty$ с «отрицательными» запросами. Как показано в [13, 15], посредством модели $M|G|1|\infty$ с ненадежным прибором в свободном состоянии можно изучать также приоритетные модели $M_r|G_r|1|\infty$. Пусть необходимо исследовать характеристики запросов i-го приоритета в модели $M_r|G_r|1|\infty$ с абсолютными приоритетами. Тогда, согласно [13], в модели $M|G|1|\infty$ с ненадежным прибором необходимо произвести следующие замены: $\lambda = \lambda_i$, $B(t) = H_i(t)$, $E(t) = 1 - e^{-\sigma_{i-1}t}$, $C(t) = \Pi_{i-1}(t)$. Здесь λ_i – интенсивность потока запросов i-го приоритета; $\sigma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j$ – интенсивность запросов приоритета i–1 и выше; $\Pi_{i-1}(t)$– ФР ПЗ модели с запросами приоритета i–1 и выше; $H_i(t)$ – ФР промежутка времени, начинающегося с поступления в свободную модель запроса i-го приоритета и кончающегося непосредственно первым моментом освобождения от запросов приоритета i и выше.

Соотношения для ПЛС ФР $\Pi_{i-1}(t)$ и $H_i(t)$ $(\tilde{\pi}_{i-1}(s), \tilde{h}_i(s))$ для различных модификаций абсолютного приоритета приведены в работах [13, 15].

Кафедра теории вероятностей и математической статистики *Поступила 26.12.2006*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Artalejo J.R.** – European J. Oper. Res., 2000, v. 126, p. 233–249.
2. **Towsley D., Tripathi S.K.** – Operations Research Letters, 1991, № 10, p. 353–362.
3. **Chen A., Renshaw E.** – J. of Applied Probability, 1997, № 34, p. 192–207.
4. **Kerobyan Kh.V., Vardanyan Kh.L., Kostanyan N.G.** Proc. of Int. NATO Conf. «Data Fusion for Situation Monitoring», Kluwer Academic Publ., 2003.
5. **Kyriakidis E.G., Abakuks A.** – J. of Applied Probability, 1989, № 27, p. 873–879.
6. **Chao X.** – Operations Research Letters, 1995, № 18, p. 75–79.
7. **Gelenbe E., Pujolle G.** Introduction to Queuing Networks, Wiley, Chichester, 1998, 326p.
8. **Бочаров П.П., Вишневский В.М.** – АиТ, 2003, №5, с. 46–75.
9. **Dudin A.N., Karolik A.V.** – Perf. Eval., 2000, v. 895, p. 1–13.
10. **Li Q.L., Zhao Y.Q.** – J. Austral. Math. Soc., 1998, Ser. B 40, p. 207–221.
11. **Jain G., Sigman K.** – J. of Applied Probability, 1996, № 33, p.1191–1200.
12. **Керобян Х.В., Товмасян А.С.** Труды международной конф. «КНИТ-2003», Ер., 2003.
13. **Керобян Х.В.** Труды международной конф. «Стат. физика и динамич. сист.». Нор-Амберд, 2003.
14. **Климов Г.П.** Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966, 245с.
15. **Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А.** и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: Изд-во МГУ, 1973, 448 с.
16. **Даниелян Э.А., Симонян А.Р.** Введение в теорию очередей. Часть 1. Ер.: Изд-во РАУ, 2005, 198с.

Խ. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ԱՆՀՈՒՍԱԼԻ ՍՊԱՍԱՐԿՄԱՆ ՍԱՐՔՈՎ ԵՎ «ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ» ՀԱՅՏԵՐՈՎ $M|G|1|\infty$ ՄՈԴԵԼ

Ամփոփում

Դիտարկվում է անհուսալի սպասարկման սարքով $M|G|1|\infty$ մոդելը, որում «բացասական» հայտերը ոչնչացնում են իրենց գալու պահին մոդելում եղած սովորական հայտերը: Հետազոտվում են հերթի երկարության բաշխումը, զբաղվածության և ռեգեներացիայի պարբերությունները:

Kh. V. KEROBYAN

THE MODEL $M|G|1|\infty$ WITH UNRELIABLE SERVER AND «NEGATIVE» CUSTOMERS

Summary

The model $M|G|1|\infty$ with unreliable server and «negative» customers, which destroy regular customers, is considered. Distribution number of customer, the busy period and the period of regeneration of model are investigated.