ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 514

Г. Ц. АКОПЯН

О ВЫПУКЛОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Определяется понятие выпуклости множества точек плоскости по некоторому направлению и доказывается, что для конечного числа произвольно заданных направлений существует простой многоугольник, который является выпуклым только по этим направлениям.

Рассмотрим плоский граф, являющийся простым циклом с n вершинами, ребра которого представляются отрезками (прямолинейная укладка простого цикла или, что то же самое (замкнутая самонепересекающаяся ломаная) [1]. Множество точек плоскости, расположенных на внутренней грани или ребрах этого графа, называется простым многоугольником (n-угольником). Ребра этого графа называются сторонами многоугольника, вершины – вершинами многоугольника. Углы внутренней (внешней) грани рассматриваемого цикла называются внутренними (внешними) углами многоугольника. Углы (внутренние или внешние), прилегающие к одной и той же стороне многоугольника, называются соседними углами. Множество точек плоскости (M) называется *выпуклым*, если для любых двух точек этого множества отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит M [2]. Множество точек плоскости (M) называется *звездно-выпуклым*, если оно содержит точку O такую, что для любой точки C этого многоугольника отрезок OC принадлежит M [3].

Внутренний угол β простого многоугольника назовем *выпуклым*, если $0<\beta<\pi$, и *вогнутым*, если $\pi<\beta<2\pi$. Для выпуклого многоугольника все внутренние углы являются выпуклыми. Простой многоугольник назовем *полувыпуклым*, если из каждой пары соседних внутренних углов хотя бы один является выпуклым.

Множество попарно параллельных прямых плоскости назовем *направлением*. Направление, прямые которого образуют с осью x угол α, $0\le\alpha<\pi$, назовем α*-направлением*. Скажем, что *две точки принадлежат заданному направлению*, если существует прямая из этого направления, проходящая через эти точки.

Направлением вогнутого угла β назовем направление, прямые которого параллельны прямой, принадлежащей углу β, проходящей через вершину и не проходящей через сторону угла β . Множество направлений вогнутого угла β обозначим через $S(\beta)$.

Определение. Множество M точек плоскости назовем *выпуклым по* α *-направлению*, если для любых двух точек C_1 и C_2 множества M , принадлежащих α -направлению, все точки отрезка C_1C_2 принадлежат M .

Лемма 1. Если многоугольник содержит вогнутый внутренний угол β , то он не является выпуклым по любому направлению угла β .

Доказательство следует из того, что для каждого направления угла β существует прямая из этого направления, пересекающая стороны угла β в точках C_1 и C_2 , такая, что ни одна внутренняя точка отрезка C_1C_2 не принадлежит многоугольнику.

Лемма 2. Для того, чтобы полувыпуклый простой многоугольник был бы выпуклым по некоторому направлению α , необходимо и достаточно, чтобы α -направление не являлось бы направлением ни для одного вогнутого угла многоугольника.

Доказательство.

Необходимость. Если многоугольник является выпуклым по некоторому α -направлению, то из леммы 1 следует, что он не имеет внутреннего вогнутого угла β , для которого α -направление принадлежит $S(\beta)$.

Достаточность. Пусть α -направление не является направлением ни для одного вогнутого внутреннего угла этого многоугольника. Покажем, что по α -направлению многоугольник будет выпуклым. Предположим противное. Тогда существуют такие точки C_1 и C_2 многоугольника, которые расположены на прямой c из α -направления, и все внутренние точки отрезка C_1C_2 не принадлежат многоугольнику. Точки C_1 и C_2 делят граничные точки многоугольника (который является циклом) на две цепи P_1 и P_2 , одна из которых (скажем P_1) вместе с отрезком C_1C_2 образует простой многоугольник, не содержащий внутренние точки заданного многоугольника. Пусть $P_1 = C_1A_1, A_2, \ldots, A_tC_2$, где $A_1, \ldots, A_t$ – вершины многоугольника, а A_k – вершина с наименьшим номером k , наиболее удаленная от прямой c . Рассмотрим внутренний угол β_k вершины A_k многоугольника. Заметим, что он является вогнутым. Если вершина A_{k+1} расположена на том же расстоянии от прямой c , что и A_k (в этом случае $A_kA_{k+1} \| c$), то внутренний соседний угол многоугольника также будет вогнутым и нарушится условие полувыпуклости многоугольника. В противном случае, вершина A_{k+1} расположена ближе к прямой c и α-направление будет направлением угла β_k.

Теорема. Для любых k заданных направлений существует звездно-выпуклый простой многоугольник, который является выпуклым только по этим заданным направлениям.

Доказательство. Не теряя общности доказательства, предположим, что заданными k направлениями являются направления $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, где

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k < \pi.$$

Рассмотрим лучи, выходящие из начала координат O, расположенные соответственно на этих направлениях. Из леммы 2 следует, что для доказательства теоремы достаточно построить полувыпуклый простой многоугольник, содержащий внутренние вогнутые углы β_i, $i=1,\ldots,t$, для которых выполняется следующее условие:

$$\bigcup_{i=1}^{t} S(\beta_i)=\{\alpha \mid \alpha \neq \alpha_1,\ldots,\alpha_k\}.$$

Если $k=1$, то полувыпуклый 7-угольник, изображенный на рис. 1, будет выпуклым только по направлению α_1. Здесь $\beta_1=\dfrac{3\pi}{2}$, $\beta_2>\dfrac{3\pi}{2}$, $A_2A_3 \parallel OA_1$, $S(\beta_1)=\left\{\alpha \mid \alpha_1<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $S(\beta_2)=\{\alpha \mid 2\pi-\beta_2<\alpha<\pi\}$. Требуемое условие выполняется, поскольку $2\pi-\beta_2<\dfrac{\pi}{2}$.

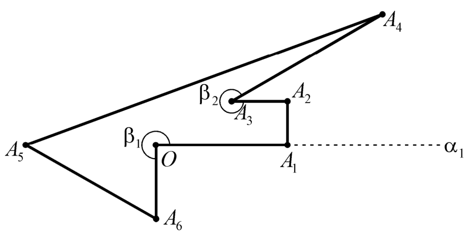

Рис. 1.

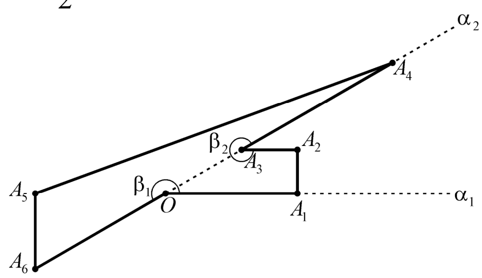

Рис. 2.

Если $k=2$, то полувыпуклый 7-угольник, изображенный на рис. 2, является выпуклым только по направлениям α_1 и α_2. Здесь $A_3A_4 \parallel OA_6$ и

$$S(\beta_1)=\{\alpha \mid \alpha_1<\alpha<\alpha_2\},\ S(\beta_2)=\{\alpha \mid \alpha_2<\alpha<\pi\}.$$

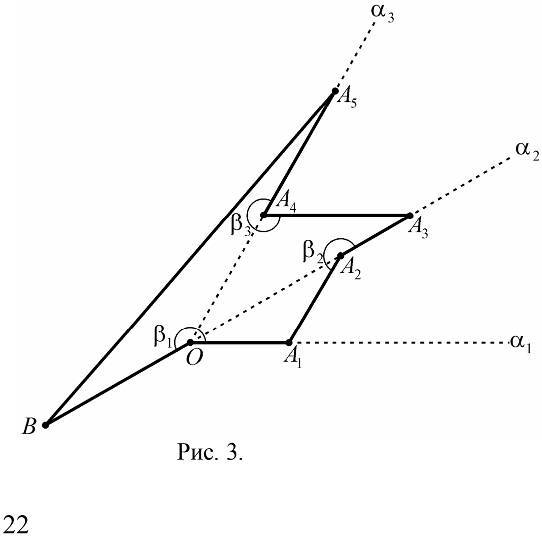

Рис. 3.

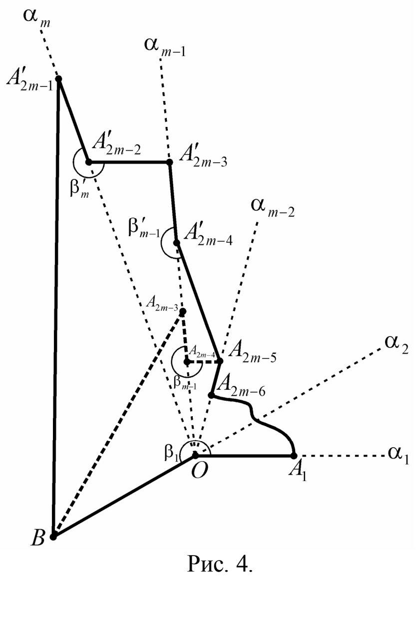

Рис. 4.

При $k \geq 3$ построим полувыпуклый простой многоугольник, содержащий k внутренних вогнутых углов (т.е. $t = k$).

Если $k = 3$, то полувыпуклый 7-угольник, изображенный на рис. 3, является выпуклым только по направлениям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Здесь точки B, O, A_2, A_3 расположены на направлении α_2, $A_1A_2 \parallel A_4A_5$, $A_3A_4 \parallel OA_1$, и

$$S(\beta_1) = \{\alpha \mid \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\},\ S(\beta_2) = \{\alpha \mid \alpha_2 < \alpha < \alpha_3\},\ S(\beta_3) = \{\alpha \mid \alpha_3 < \alpha < \pi\}.$$

Приведем метод построения полувыпуклого простого многоугольника для случая m, $m = 4, 5, \ldots, k$, если построен полувыпуклый простой многоугольник для $m-1$. Пусть $B, O, A_1, \ldots, A_{2m-5}, A_{2m-4}, A_{2m-3}$ – полувыпуклый многоугольник, который является выпуклым только по направлениям $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, и

$$S(\beta_j) = \{\alpha \mid \alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}\},\ j = 1, 2, \ldots, m-2,\ S(\beta_{m-1}) = \{\alpha \mid \alpha_{m-1} < \alpha < \pi\}.$$

Рассмотрим полувыпуклый простой многоугольник

$$B, O, A_1, \ldots, A_{2m-5}, A'_{2m-4}, A'_{2m-3}, A'_{2m-2}, A'_{2m-1}, B,$$

изображенный на рис. 4. Здесь вершины A'_{2m-2} и A'_{2m-1} принадлежат α_m-направлению, вершины A'_{2m-4}, A'_{2m-3} принадлежат α_{m-1}-направлению,

$$A'_{2m-3}A'_{2m-2} \parallel OA_1 \text{ и } S(\beta_j) = \{\alpha \mid \alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}\},\ j = 1, 2, \ldots, m-2,$$

$$S(\beta_{m-1}) = \{\alpha \mid \alpha_{m-1} < \alpha < \alpha_m\},\ S(\beta_m) = \{\alpha \mid \alpha_m < \alpha < \pi\}.$$

Заметим также, что построенный многоугольник является звездно-выпуклым относительно точки O.

Теорема доказана.

Следствие. Для любых k заданных направлений, где $k \geq 3$, существует простой $(2k+1)$-угольник, который является выпуклым только по этим заданным направлениям.

Доказательство следует из метода построения требуемого многоугольника, приведенного в доказательстве теоремы.

Кафедра дискретной математики и теоретической информатики

Поступила 21.02.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. **Рокафеллер Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. **Препарата Ф., Шеймос Н.** Вычислительная геометрия. Введение. М.: Мир, 1989.

Հ. Ց. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՌՈՒՑԻԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Սահմանվում է հարթության կետերի բազմության որոշ ուղղության նկատմամբ ուռուցիկության գաղափարը և ապացուցվում է, որ կամայական տրված վերջավոր քանակությամբ ուղղությունների համար գոյություն ունի պարզ բազմանկյուն, որն ուռուցիկ է միայն այդ ուղղություններով:

H. Ts. HAKOBYAN

ABOUT CONVEXITY OF POLYGONS

Summary

The concept of convexity of the set of points of the plane in certain sense of direction is defined and it is proved that for the finite number of the given directions there exists a prime polygon which is convex only for those directions.