ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

Л. В. АКОПЯН

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Статья посвящена практическому нахождению побочных нечисловых и числовых корней алгебраических уравнений разных степеней. На базе некоммутативных относительно сложения алгебраических операций обобщено понятие корня.

Классическое понятие и определение корня алгебраического уравнения исходит из требований числовой алгебры, а именно: операция сложения должна быть строго коммутативной и ассоциативной, а что до операции умножения, то условие ассоциативности берется в обязательном порядке. На основе этих требований корень многочлена $f^n(x)$ как число обладает двумя специфическими свойствами: он не только тождественно превращает в ноль заданный многочлен, но и может служить корнем для иных многочленов, причем это последнее утверждение по умолчаниию предполагает условие $f_i^m(x_0)=0$, где x_0 есть этот корень. Между тем, идея нечисловых корней алгебраических уравнений не только сводит проблему решения этих уравнений (нахождение числовых корней) к поиску любых побочных корней нечислового происхождения [1], но и приводит к необходимости пересмотра классической сути понятия корня вообще. Пусть множество двухэлементных лианитов определено в пределах алгебры

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+2y_1,x_2+2y_2), \\ \sigma_1\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=\big(x_1(y_1+y_2),x_2y_1\big), \end{cases} \qquad e=(1,0). \tag{1}$$

Очевидно, что правило сложения некоммутативное и неассоциативное, т.е. $\sigma_1+\sigma_2\neq\sigma_2+\sigma_1$, $(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_3\neq\sigma_1+(\sigma_2+\sigma_3)$. Правило умножения пока что дистрибутивное (знак равенства употребляется в смысле тождественности соответствующих элементов). Пусть требуется решить уравнение $f_1^2(x)=x^2+px+q=0$ в пределах алгебры (1).

Сложение выполняется слева направо по цепочке 1+(2+3):

$$(x_1(x_1+\overset{1}{x_2}),x_1x_2)+(p\overset{2}{x_1},px_2)+(\overset{3}{q},0)=(0,0),$$

$$(x_1(x_1+x_2),x_1x_2)+(px_1+2q,px_2)=(x_1(x_1+x_2)+2px_1+4q,x_1x_2+2px_2).$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1(x_1+x_2)+2px_1+4q=0, \\ x_1x_2+2px_2=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Если взять $x_2 \neq 0$, то приходим к решению $\sigma\left(-2p, 2q/p\right)$.

Пусть многочлен $f_2^3(x)=x^3+ax^2+bx+C$ имеет два общих числовых корня с $f_1^2\left(x\right)=x^2+px+q=0$. Тогда имеем тождество $x^3+ax^2+bx+c=$ $=\overset{1}{x^3}+\overset{2}{(p-x_0)x^2}+\overset{3}{(q-px_0)x}-\overset{4}{qx_0}$, где x_0 – третий числовой корень многочлена $f_2^3(x)$, т.е. $qx_0=-c$. Выполняя сложение по цепочке $1+(2+(3+4))$, будем иметь

$$\begin{aligned} &(x_1(x_1^2+2x_1x_2), x_1x_2(x_1+x_2))+((p-x_0)x_1(x_1+x_2),(p-x_0)x_1x_2)+ \\ &+((q-px_0)x_1,(q-px_0)x_2)+(-qx_0,0)=(x_1(x_1^2+2x_1x_2),x_1x_2(x_1+x_2))+ \\ &+((p-x_0)x_1(x_1+x_2)+2x_1(q-px_0)-4qx_0,(p-x_0)x_1x_2+2x_2(q-px_0))= \qquad (3) \\ &=(x_1(x_1^2+2x_1x_2),x_1x_2(x_1+x_2))+ \\ &+(px_1(x_1+x_2)+2qx_1-x_0(x_1(x_1+x_2)+2px_1+4q),px_1x_2+2qx_2-x_0(x_1x_2+2px_2)). \end{aligned}$$

С учетом условий (2) получаем

$$\begin{aligned} &(x_1(x_1^2+2x_1x_2),x_1x_2(x_1+x_2))+(px_1(x_1+x_2)+2qx_1,px_1x_2+2qx_2)= \\ &=(x_1(x_1^2+2x_1x_2)+2px_1(x_1+x_2)+4qx_1,x_1x_2(x_1+x_2)+2px_1x_2+4qx_2)= \qquad (4) \\ &=(x_1(x_1^2+2x_1x_2+2p(x_1+x_2)+4q),x_2(x_1^2+x_1x_2+2px_1+4q))=(0,0). \end{aligned}$$

Можно доказать, что этот же результат получается для многочленов любых степеней в пределах того же алгоритма сложения, причем алгоритм умножения можно менять, оставляя его дистрибутивным. Итак, алгебра (1), будучи некоммутативной, неассоциативной относительно сложения, допускает существование такой последовательности сложения, а именно $1+(2+(\ldots+(n-1+n)\ldots))$, что если σ является основным корнем $f_1^n(x)$, т.е. $f_1^n(\sigma)=0$, то любой многочлен, имеющий ровно n общих числовых корней с $f_1^n(x)$, сохраняет классическую суть корня: $f_2^m(\sigma)=0$. Пусть в пределах той же алгебры (1), по той же цепочке $(1+(2+3))$ уравнение $f_1^2(x)=x^2+px+q=0$ имеет основной корень вида $\sigma(-2p,2q/p)$. Пусть кубический многочлен $f_2^3(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет два общих числовых корня с $f_1^2(x)$. Представляя $f_2^3(x)$ в виде $x^3+ax^2+bx+c=\overset{1}{x^3}+\overset{2}{(p-x_0^2)x^2}+$ $+\overset{3}{(q-px_0)x}-\overset{4}{qx_0}$ и выполняя сложение по цепочке $2+((3+4)+1)$, получим лианит

$$f_2^3(\sigma)=(x_1(p(x_1+x_2)+2g+4(x_1^2+2x_1)),x_2(px_1+2g+4x_1(x_1+x_2))). \qquad (5)$$

Так как из (2) p и q однозначно выражаются через x_1 è x_2, то окончательно получаем

$$f_2^3(\sigma)=\left(7x_1^2\left(\frac{x_1}{2}+x_2\right),\frac{7x_1x_2}{2}\left(x_1+x_2\right)\right), \tag{6}$$

следовательно, $f_2^3(\sigma)\neq 0$. Но важнее следующее: элементы $f_2^3(\sigma)$ не зависят от x_0 (третьего числового корня кубического многочлена).

Пусть операция сложения задана по алгоритму

$$\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_1)\,. \tag{7}$$

Операцию умножения оставим в простейшей форме (1). Ограничимся сопоставлением многочленов 2-й и 3-й степеней. Если $f_1^2(x)=x^2+px+q$, то имеем $\overset{1}{(x_1(x_1+x_2),x_1x_2)}+\overset{2}{(px_1,px_1)}+\overset{3}{(q,0)}$. Реализация последовательности $1+(2+3)$ дает

$$\begin{cases} x_1(x_1+x_2)+px_2+q=0, \\ x_1x_2+px_1=0. \end{cases} \tag{8}$$

Следовательно, квадратный трехчлен в пределах алгебры (7) допускает существование основного корня. Пусть опять $f_2^3(x)=x^3+ax^2+bx+c$ имеет $x^2+px+q=f_1^2(x)$ в качестве сомножителя, из чего следует разложение

$$x^3+ax^2+bx+c=\overset{1}{x^3}+\overset{2}{(p-x_0)x^2}+\overset{3}{(q-px_0)x}-\overset{4}{qx_0}=(x-x_0)(x^2+px+q)\,,$$

в развернутом виде –

$$\begin{aligned} &\overset{1}{(x_1(x_1^2+2x_1x_2),x_1x_2(x_1+x_2))}+\overset{2}{((p-x_0)x_1(x_1+x_2),(p-x_0)x_1x_2)}+ \\ &\qquad+\overset{3}{((q-px_0)x_1,(q-px_0)x_2)}+\overset{4}{(-qx_0,0)}. \end{aligned}$$

Сложение по цепочке $1+[2+(3+4)]$ ничего не дает, но сложение по цепочке $[4+(1+2)]$ приводит к виду

$$\begin{aligned} f_2^3(\sigma)&=x_1x_2(x_1+x_2)+px_1(x_1+x_2)+qx_2,x_1(x_1^2+2x_1x_2)+px_1x_2+gx_1= \\ &=(x_2(x_2^2-x_1^2-x_1x_2),x_1^2x_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Элементы $f_2^3(\sigma)$ совершенно не зависят от произвольного третьего корня x_0. Кроме того, в отличие от алгебры (1), алгебра (7) даже не обеспечивает такую цепочку сложения, которая допускала бы сохранение условия классического корня: $f_2^3(\sigma)=(0,0)$. Конечно, можно найти иные цепочки, которые приведут к результату, аналогичному (9), т.е. к независимости от x_0. Иначе, множество кубических уравнений, имеющих два общих числовых корня с $f_1^2(x)=x^2+px+q$, подчиняются единому условию $f_2^3(\sigma)\neq 0$.

Как уже было сказано, общая идея нечисловых корней алгебраических уравнений сводит проблему их решения в радикалах к поиску любых побочных нечисловых корней в пределах различных алгебр (подробнее см. [1]).

Пусть задан $f_1(x)=x^2+px+q$. Требуется найти его побочные корни и их числовые аналоги. Пусть

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\\ \sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1y_1+x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1),\end{cases}\quad e=(1,0).$$

Имеем $f(\sigma)=(x_1^2+x_2^2,2x_1x_2)+(px_2)+(q,0)=(0,0)$. В развернутом виде

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+px_1+q=0,\\ 2x_1x_2+px_2=0.\end{cases}\tag{10}$$

Выбирая в (10) $x_2\neq 0$, получим $x_1=-\dfrac{p}{2}$, $x_2=\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$, т. е.

$$\sigma=\left(-\frac{p}{2},\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).\tag{11}$$

Корни $\sigma_1=\left(-\dfrac{p}{2},+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}\right)$, $\sigma_2=\left(-\dfrac{p}{2},-\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}\right)$ – основные для $f_1(x)=x^2+px+q.$ Суммируя уравнения (10), получаем $(x_1+x_2)^2+$ $+p(x_1+x_2)+q=0.$ Следовательно, сумма элементов $x_1=-p/2$ и $x_2=\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$ суть числовые корни.

Как известно, любое кубическое уравнение можно привести к виду $f(x)=x^3+bx+c=0$ [2]. Найдем побочные нечисловые корни этого уравнения в пределах алгебры

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\\ \sigma_1\cdot\sigma_2=(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=(x_1(y_1+y_2)+x_2y_1,x_2y_2-x_1y_1),\end{cases}\quad e=(0,1).\tag{12}$$

Имеем $\sigma^2=(x_1^2+2x_1x_2x_2^2-x_1^2)$,

$\sigma^3=\sigma\cdot\sigma^2=(x_1(x_2^2+2x_1x_2)+x_2(x_1^2+2x_1x_2),x_2(x_2^2-x_1^2)-x_1(x_1^2+2x_1x_2)).$

Выбирая $x_1\neq 0$ и подставляя σ в $f(x)=x^3+bx+c$, получаем систему

$$\begin{cases}3x_2^2+3x_1x_2+b=0,\\ x_2^3+bx_2+c-x_1^3-3x_1^2x_2=0.\end{cases}\tag{13}$$

После тривиальных действий получаем уравнение $-27x_2^6-27cx_2^3+b^3=0.$ Обозначая $x_2^3=z$, окончательно имеем

$$z^2+cz-\frac{b^3}{27}=0.\tag{14}$$

Решение квадратного уравнения (14) дает

$$x_2^3 = z_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}} \text{ или } x_2 = \sqrt[3]{\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} \ . \qquad (15)$$

Итак, $\sigma(x, x) = \left(-\dfrac{b+3x}{3x}, x \right)$ (x_2 определяется из (15)) является побочным корнем уравнения $x^3 + bx + c = 0$, ибо у этого лианита всего два элемента. Следовательно, в пределах алгебры (12) существует квадратное уравнение, для которого $\sigma(x_1, x_2)$ есть основной корень. Тогда два числовых корня этого квадратного уравнения заведомо являются и числовыми корнями нашего кубического уравнения.

Пусть задано уравнение $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$, которое получается из общего уравнения $z^4 + a_0 z^3 + b_0 z^2 + c_0 z + d_0 = 0$ подстановкой $x = z - \dfrac{a}{4}$. Выделим двухэлементный побочный корень этого уравнения посредством алгебры

$$\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = \left(x_1(y_1 + y_2), x_2 y_1\right), \end{cases} \quad e = (1, 0) .$$

Имеем $\sigma^2 = [x_1(x_1 + x_2), x_1 x_2]$, $\sigma^3 = \sigma \cdot \sigma^2 = (x_1(x_1^2 + 2x_1x_2), x_1x_2(x_1 + x_2))$, $\sigma^4 = \sigma \cdot \sigma^3 = (x_1(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_2^2x_1), x_1x_2(x_1^2 + 2x_1x_2))$. Подставляя это в уравнение $f(x) = x^4 + bx^2 + cx + d = 0$, приходим к системе

$$\begin{cases} x_1(x_1^3 + 3x_1^2x_2 + x_2^2x_1) + bx_1(x_1 + x_2) + cx_1 + d = 0, \\ x_1x_2(x_1^2 + 2x_1x_2) + bx_1x_2 + cx_2 = 0, \end{cases} \qquad (16)$$

из второго уравнения (16) имеем

$$x_2 = -\frac{x_1^3 + bx_1 + c}{2x_1^2}. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в первое уравнение (16), получим: $x_1^6 + 2bx_1^4 + {}$ $+(b^2 - 4d)x_1^2 - c^2 = 0$. Обозначая $x_1^2 = z$, получаем известную резольвенту Лагранжа для уравнения четвертой степени:

$$z^3 + 2bz^2 + \left(b^2 - 4d\right)z - c^2 = 0 . \qquad (18)$$

Для одного из числовых корней (18) будем иметь два значения $x_1 = \pm\sqrt{z}$, а с учетом (17) – $\sigma_1\left(\sqrt{z}, x_2'\right)$ и $\sigma_2\left(-\sqrt{z}, x_2'\right)$, т.е. два побочных корня.

Получим формулу Феррари. Так как $\sigma(x_1, x_2)$ служит корнем для конкретного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то по алгебре $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) =$ $= (x_1(y_1 + y_2), x_2 y_1)$ получим

$$\begin{cases} x_1(x_1 + x_2) + px_1 + q = 0, \\ x_1x_2 + px_2 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q = -x_1x_2 = \dfrac{x_1^3 + bx_1 + c}{2x_1}, \\ p = -x_1. \end{cases}$$

Искомое уравнение имеет вид:

$$x^2 - x_1 x + \frac{x_1^3 + bx_1 + c}{2x_1} = 0. \tag{19}$$

Числовые корни (19) также являются корнями $x^4 + bx^2 + cx + 1 = 0$. Следовательно,

$$x = \frac{x_1 \pm \sqrt{-(x_1^3 + 2bx_1 + 2c)/x_1}}{2}. \tag{20}$$

Предположим, требуется решить уравнение $x^4 + 3x - 2 = 0$ (рациональных корней нет). (18) примет вид $z^3 + 8z - 9 = 0$ ($b = 0,\ c = 3,\ d = 2$). Один из корней $z = 1$, следовательно, $x_1^2 = 1,\ x_1 = \pm 1$. С методической точки зрения для вычисления корней выражением (20) даже не следует пользоваться. Лучше выписать лианитовые $\sigma\left(x_1, -\dfrac{c + bx_1 + x_1^3}{2x_1^2}\right)$, которые для $x^4 + 3x - 2 = 0$ дают $\sigma_1(1,-2)$ и $\sigma_2(-1,-1)$. В пределах нашей алгебры они являются корнями квадратных трехчленов $x^2 - x + 2 = 0$ и $x^2 + x - 1 = 0$, т.е. $x^4 + 3x - 2 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1)$.

Переходим к уравнению пятой степени в нормальной форме: $f(x) = x^5 + ax + b = 0$. Воспользуемся той же самой алгеброй $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1(y_1 + y_2), x_2 y_1)$, $e = (1,0)$. Подстановка в $f(x) = x^5 + ax + b$ дает $\sigma \cdot \sigma^4 + \sigma a + b \cdot e = 0$ или

$$\begin{cases} x_1^5 + 4x_1^4 x_2 + 3x_1^3 x_2^2 + ax_1 + b = 0, \\ x_1^4 x_2 + 3x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_1^2 + ax_2 = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Сокращая второе уравнение на $x_2 \neq 0$ и исключая из (2) x_1, получим

$$\begin{cases} x_2^2 + \dfrac{4}{3} x_1 x_2 + \dfrac{x_1^5 + ax_1 + b}{3x_1^3} = 0, \\[2ex] x_2^2 + 3x_1 x_2 + \dfrac{x_1^4 + a}{x_1^2} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Из (22) следует

$$x_2 = \frac{b - 2x_1^5 - 2ax_1}{5x_1^4}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в любое из уравнений (22), приходим к конечному результату:

$$x_1^{10} - 3ax_1^6 - 11bx_1^5 - 4a^2 x_1^2 + 4abx_1 - b^2 = 0. \tag{24}$$

Следовательно, если известно x_1, то в сочетании с (23) мы получаем побочный корень $\sigma(x_1, x_2)$ для уравнения пятой степени. Можно, конечно, найти и уравнение относительно x_2 методом исключения неизвестного посредством основных матричных корней. Получим

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2b-ax_2}{x_2} & \dfrac{b-ax_2}{x_2^2} & -x_2^2 \\ ax_2-b & \dfrac{2b-ax_2}{x_2} & \dfrac{b-ax_2+x_2^5}{x_2^2} \\ \dfrac{(b-ax_2)(b-ax_2+x_2^5)}{x_2^4} & ax_2-b & \dfrac{b-x_2^5}{x_2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (25)$$

или

$$\begin{gathered} b^2x_2^{10}+4a^3x_2^8-16a^2bx_2^7+22ab^2x_2^6-11b^3x_2^5-a^4x_2^4+4a^3bx_2^3- \\ -ba^2b^2x_2^2+4ab^3x_2-b^4=0. \end{gathered} \qquad (26)$$

Исходя из (23) и (24), имеем: если (24) допускает нахождение хоть одного числового корня, то лианит $\sigma(x_1,x_2)=\sigma\left(x_1,\dfrac{b-2x_1^5-2ax_1}{5x_1^4}\right)$ служит побочным корнем для $x^5+ax+b=0$. Точно так же, если определитель (25) при заданных коэффициентах a и b дает ноль (это равносильно нахождению хоть одного корня (26)), то, зная x_2, из второго уравнения (22) находим x_1, следовательно, побочный корень $\sigma(x_1,x_2)$ становится известным. Наконец, приведем еще один критерий, напрямую вытекающий из свойств нечисловых корней алгебраических уравнений. Именно: любая пара (p,q), удовлетворяющая уравнению

$$bp^5-aqp^4-5bqp^3+4aq^2p^2+(ab+5bq^2)p-(q^5+2aq^3+a^2q+b^2)=0, \qquad (27)$$

соответствует уравнению $x^2+px+q=0$, которое имеет хотя бы один общий числовой корень с уравнением $x^5+ax+b=0$.

Приведем несколько интересных примеров. Пусть требуется решить уравнение $x^5+x-1=0$. У него нет рациональных корней. Уравнение (24) для этого случая примет вид $x_1^{10}-3x_1^6+11x_1^5-4x_1^2-4x_1-1=0$. Первый корень $x_1=1$, тогда из (23) получим $x_2=\dfrac{b-2x_1^5-2ax_1}{5x_1^4}=-1$. Следовательно, $\sigma(1,-1)$ в пределах алгебры (1) есть побочный корень для $x^5+x-1=0$. Лианиту $\sigma(1,-1)$ соответствует некий трехчлен $f(x)=x^2+px+q$, для которого σ является основным корнем. Имеем

$f(\sigma)=\sigma^2+\sigma p+q=(0,-1)+(p,-p)+(q,0)=(0,0)$, $\begin{cases} p+q=0, \\ -1-p=0, \end{cases}$ следовательно, $p=-1$ и $q=1$.

Итак, $f(x)=x^2-x+1$. Его числовые корни совпадают с двумя числовыми корнями $x^5+x-1=0$ (для $x^5+x+1=0$, $x_1=-1$). Отметим несколько случаев, когда уравнение $x^5+ax+b=0$ эффективно решается в радикалах: $a^5=b^4$, $b^4=-9a^5$, $104a\sqrt[4]{4a}=-b$.

Пусть задано $x^5+x+6=0$. Тогда детерминант (25) при $x_2=2$ дает ноль. Из второго уравнения (22) получим одно из возможных значений x_1, а именно $x_1=-1$. Итак, $\sigma(-1,2)$ – корень, что соответствует уравнению $x^2+x+2=0$. Следовательно, $x^5+x+6=(x^2+x+2)(x^3-x^2-x+3)$.

Особо следует отметить уравнение вида $x^5\pm1=0$. Пусть задано $x^5-1=0$. Подставляя в (24) $a=0$ и $b=1$, получаем $x_1^{10}+11x_1^5-1=0$. Отсюда $x_1=\sqrt[5]{\dfrac{-11\pm5\sqrt{5}}{2}}$. Из (23) имеем $x_2=-\dfrac{1+2x_1^5}{5x_1^4}=-\left(\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt[5]{\dfrac{-11\pm5\sqrt{5}}{2}}$. Например, один из лианитов будет $\sigma(x_1,x_2)=\left(\sqrt[5]{\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}}-\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt[5]{\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}}\right)$.

Для выбранной нами алгебры в случае квадратных уравнений имеем $p=-x_1$, $q=-x_1x_2$, т.е. корни уравнения $x^2-\sqrt[5]{\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}}x+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\sqrt[5]{\dfrac{-11+5\sqrt{5}}{2}}=0$ заведомо являются корнями $x^5-1=0$.

Отметим, что тот же самый результат, но только в квадратных радикалах, следует из (27). Действительно, подставляя в него $a=0$ и $b=-1$, приходим к уравнению

$$-p^5+5qp^3-5q^2p-(q^5+1)=0. \tag{28}$$

При $q=-1$ получаем $p(p^4+5p^2+5)=0$. Пара $(p,q)=(0,-1)$ дает $x^2-1=0$, следовательно, $x=1$ – один из корней $x^5-1=0$. Но пара (p,q), где p – один из корней $p^4+5p^2+5=0$, уже дает такие квадратные уравнения, у которых один числовой корень совпадает с одним из комплексных корней $x^5-1=0$. Имеем $p^2=\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$, $q=-1$, тогда

$$x^2+i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}x-1=0. \tag{29}$$

Одно из решений (29) есть корень

$$x=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\right). \tag{30}$$

Укажем на еще одно важное свойство нечисловых корней алгебраических уравнений в виде тезиса. Пусть задана алгебра коммутативная и ассоциативная относительно сложения и только ассоциативная относительно умножения, и пусть лианит $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – основной нечисловой корень многочлена $f_1^n(x)$ с числовыми корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда если $n-1$ числовых корней $f_1^n(x)$ являются одновременно также числовыми корнями многочленов $f_2^m(x)$ и $f_3^l(x)$, то элементы $f_2^m(\sigma)$ и $f_3^l(\sigma)$ пропорциональны. Иначе, если $f_2^m(\sigma)=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$,

$$f_3^l(\sigma)=(\eta_1, \ldots, \eta_n)\text{, то } \frac{\eta_i}{\delta_i}=const. \tag{31}$$

Посредством этого свойства можно получить уравнение (27).

Последней целью настоящей статьи является выделение неклассических побочных корней и нахождение числовых корней алгебраических уравнений. Пусть задана алгебра

$$\begin{cases}(x_1, x_2)+(y_1, y_2)=(x_1+\alpha y_2, x_2+\beta y_1),\\ (x_1 x_2)\cdot(y_1, y_2)=(x_1(y_1+y_2), x_2 y_1),\end{cases} \qquad e=(1,0). \tag{32}$$

В (32) α, β пока что не определены, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Основной лианитовый корень многочлена $f_1(x)=\overset{1}{x^2}+\overset{2}{px}+\overset{3}{g}$ попробуем найти по цепочке $1+(2+3)$.

Имеем $f_1(\sigma)=\sigma^2+p\cdot\sigma+q=(\overset{1}{x_1(x_1+x_2), x_1x_2})+(\overset{2}{px_1, px_2})+(\overset{3}{q,0})=(0,0)$. Сложение по (32) даст систему

$$\begin{cases}x_1(x_1+x_2)+\alpha p x_2+\alpha\beta q=0,\\ x_1(x_2+\beta p)=0.\end{cases} \tag{33}$$

Итак, (33) дает требуемые значения x_1, x_2. Пусть задано $f_2(x)=x^3+ax^2+bx+c$, требуется найти двухэлементный лианит $\sigma(x_1, x_2)$, который служит основным корнем уравнения $f_1(x)=x^2+px+q=0$, причем оба числовых корня $f_1(x)$ являются числовыми корнями $f_2(x)$. Иначе, требуется посредством алгебры (32) выделить обобщенный побочный нечисловой корень для $f_2(x)=x^3+ax^2+bx+c$, а именно $f_2(\sigma)\neq 0$, хотя $f_1(\sigma)=0$.

Рассмотрим случай $a=0$: $f_2(x)=x^3+bx+c$. Тождественный с $f_2(x)$ кубический многочлен имеет вид:

$$F_2(x)=(x^2+px+g)(x-x_0)=\overset{1}{x^3}+\overset{2}{(p-x_0)x^2}+\overset{3}{(g-px_0)x}-\overset{4}{gx_0}. \tag{34}$$

Если сложение вести по цепочке $1+[2+(3+4)]$, то сопоставление x^3+bc+c и $(x^2+px+q)(x-x_0)$ дает

$$\begin{cases}px_2+q\beta=b\beta,\\ x_1(x_1+x_2)+\alpha q x_2=\alpha(bx^2+\beta c).\end{cases} \tag{35}$$

Как видно из (35), третий числовой корень не фигурирует, ибо было учтено условие (33). Из системы (33) очевидно, что

$$p=-\frac{x_2}{\beta},\ q=\frac{x_2^2}{\beta^2}-\frac{(x_1+x_2)x_1}{\alpha\beta}. \tag{36}$$

Подставляя (36) в (35), приходим к новой системе:

$$\begin{cases} x_1(x_1+x_2)=-\alpha\beta b, \\ \dfrac{-2x_1x_2(x_1+x_2)}{\beta}+\dfrac{\alpha x_2^3}{\beta^2}=\alpha b x_2+\alpha\beta c. \end{cases} \tag{37}$$

Из первого уравнения (37) имеем

$$x_2=\frac{-a\beta b}{x_1}-x_1=-\left(\frac{\alpha\beta b-x_1^2}{x_1}\right), \tag{38}$$

а второе уравнение с учетом первого дает $x_2^3+\beta^2 b x_2-\beta^3 c=0$. Подставляя сюда (38), получим

$$x_1^6+c\beta^3x_1^3+(3a+p)b\beta x_1^4+(3\alpha+\beta)a\beta^2b^2x_1^2+a^3\beta^3b^3=0. \tag{39}$$

Подобрав $3\alpha+\beta=0,$ мы приходим к уравнению

$$x_1^6+c\beta^3x_1^3-\frac{\beta^6}{27}b^3=0. \tag{40}$$

Отсюда, взяв $\beta=1,$ получим

$$x_1^3=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+\dfrac{4b^3}{27}}}{2},\ x_1=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}\pm\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}. \tag{41}$$

Из (38) можно найти x_2, а между тем, как известно, для уравнения $x^3+bx+c=0$ p – один из его числовых корней (следствие теоремы Виета).

Наконец, получаем, что числовые корни $x^3+bx+c=0$ вычисляются по формуле

$$x=-x_2=\sqrt[3]{-\frac{c}{2}-\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^3}{27}}}. \tag{42}$$

Итак, лианит $\sigma(x_1,x_2)$ найден, причем $f_2(\sigma)=\sigma^3+0\cdot\sigma^2+b\sigma+c\neq 0;$ $f_1(\sigma)=\sigma^2+\sigma\cdot p+q=0.$ Алгебра (32) примет вид

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=\left(x_1-\frac{1}{3}y_2,\ x_2+y_1\right).$$

Поиск обобщенного побочного корня превратился в поиск алгебры. Можно показать, что для выбранной последовательности суммирования существуют также иные алгебры. Существование нечисловых корней в пределах всевозможных алгебр (включая неассоциативные и недистрибутивные по умножению), по-видимому, означает, что основной результат теории Галуа (см. [2]) следует воспринимать в совершенно другом аспекте: в пределах строго коммутативных и ассоциативных относительно сложения алгебр невозможно найти числовые корни алгебраических уравнений выше четвертой степени. Детальное изучение этих вопросов будет изложено в следующей статье.

Кафедра теоретической и ядерной физики МИФИ,
кафедра алгебры и геометрии ЕГУ

Поступила 28.02.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акопян Л.В.** – Ученые записки ЕГУ, 2007, № 2, с. 23–34.
2. **Постников М.М.** Теория Галуа. М.: Физматгиз, 1963.

Լ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՐՄԱՏՆԵՐԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է տարբեր աստիճանների հանրահաշվական հավասարումների ոչ թվային երկրորդային արմատների գործնական որոնմանը: Գումարման գործողության նկատմամբ ոչ կոմուտատիվ գործողությունների կիրառմամբ ընդհանրացված է արմատի գաղափարը:

L. V. HAKOBYAN

GENERALIZATION OF CONCEPT OF ROOTS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

Summary

The paper is aimed at finding the extrinsic (or secondary) non-numeric and numeric roots to the algebraic equations of various orders. Further, the idea of algebraic root is generalized by exploiting algebraic operations with noncommutative addition law.