ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

С. С. ДАВИДОВ

КОММУТАТИВНЫЕ АБЕЛЕВЫЕ АЛГЕБРЫ

В данной статье изучаются коммутативные абелевые алгебры, к которым применяется конструкция алгебры полутермов. Найдено необходимое условие выполнимости произвольного сверхтождества (т.е. $\forall(\forall)$-тождества) в классе коммутативных абелевых алгебр.

Бинарная алгебра называется абелевой, если в ней выполняется сверхтождество абелевости

$$X(Y(x,y),Y(u,v)) = Y(X(x,u),X(y,v)). \quad (1)$$

Абелевые алгебры изучались различными авторами (Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) [1–6] под различными названиями: энтропийная, медиальная, бикоммутативная, бисимметричная алгебры. Абелевые алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации [5] и находят также приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В полиномиальной алгебре любой коммутативной группы (полугруппы) выполняется сверхтождество (1). Сверхтождеству абелевости удовлетворяет точное бинарное представление коммутативной полугруппы [1]. Тривиальному сверхтождеству абелевости (т.е. при $X = Y$) удовлетворяют точные бинарные представления моноида, полугруппы и идемпотентной полугруппы.

Бинарная алгебра тогда и только тогда абелева, когда в ней суммируемы гомоморфизмы $(\varphi,\tilde{\psi})$ [3, 5]. Сверхтождеству абелевости удовлетворяют модические алгебры, связанные с аффинной и проективной геометриями [4].

Пример 1. Пусть $Q(+,\cdot)$ – поле, и для любых $x, y \in Q$

$$A_t(x,y) = tx + (1-t)y,$$

где $t \in Q$ и 1 – единица поля. Если $\sum = \{A_t | t \in Q\}$, то в соответствующей бинарной алгебре $(Q,\sum)$ выполняется сверхтождество абелевости.

Пример 2. Пусть $G(\cdot)$ – коммутативная полугруппа, и для любых $x, y \in G,\ n \in N$

$$A_n(x,y) = x^n y^n.$$

Если $\Sigma = \{A_n | n \in N\}$, то в соответствующей бинарной алгебре (Q, Σ) выполняется сверхтождество абелевости.

В алгебре из примера 2 выполняется также сверхтождество коммутативности

$$X(x, y) = X(y, x).$$

Такие алгебры называются коммутативными.

Лемма 1. В коммутативной и абелевой алгебре (Q, Σ) выполняются сверхтождества

$$X_1(X_2(x_1, x_2), X_2(x_3, x_4)) = X_{\varphi(1)}(X_{\varphi(2)}(x_{\psi(1)}, x_{\psi(2)}), X_{\varphi(2)}(x_{\psi(3)}, x_{\psi(4)})).$$

Для любых $\varphi \in S_2, \psi \in S_4$, где S_n, $n \in N$, – симметрическая группа.

Доказательство. Непосредственной проверкой.

Зафиксируем произвольное число символов двух сортов $\{\alpha_i | i \in I\}$ и $\{\beta_i | i \in I\}$, которые в дальнейшем будем рассматривать как унарные символы операций. Свободный моноид над множеством $\{\alpha_i, \beta_i | i \in I\}$ обозначим через *E*. Каждый элемент $e \in E$ может быть однозначно выражен в виде $e = \prod_{i=1}^{n} a_i$, где $n \in N$, $a_i \in \{\alpha_i, \beta_i | i \in I\}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Число *n* будем называть глубиной *e* и обозначим через $\partial(e)$. Для каждого $n \geq 0$ возьмем

$$E_n = \{e \in E | \partial(e) = n\}.$$

Положим $\overline{\alpha_i} = \beta_i$ и $\overline{\beta_i} = \alpha_i$, $]\alpha_i[= i$ и $]\beta_i[= i$.

Пусть X – произвольное множество. Через SW_X^* обозначим свободную алгебру над *X* в многообразии алгебр сигнатуры $\{+; 0; \alpha_i, \beta_i | i \in I\}$ (т.е. состоящую из одной бинарной операции, одной нульарной и $2|I|$ унарных операционных символов), определяемую следующими тождествами:

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$
$$x + y = y + x,$$
$$x + 0 = 0,$$
$$\alpha_i(x + y) = \alpha_i x + \alpha_i y, \quad \beta_i(x + y) = \beta_i x + \beta_i y,$$
$$\alpha_i 0 = 0, \qquad \beta_i 0 = 0 \quad \forall i \in I.$$

Элементы SW_X^* будем называть полутермами над X. Очевидно, что каждый полутерм $s \in SW_X^*$ может быть выражен в виде $s = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$, где $r \in N$, $e_i \in E$, $x_i \in X$; это выражение однозначно с точностью до порядка слагаемых. Целое число *r* называется длиной *s* и обозначается через $\lambda(s)$. Если $e = a_1 \ldots a_n \in E_n$, то $]e^{(k)}[=]a_k[$ для $k = 1, \ldots, n$.

Пусть $\Sigma = \{X_i | i \in I\}$ – множество арифметического типа $T = \{2\}$. Определим бинарные операции на SW_X^* следующим образом:

$$X_i(s,t) = \alpha_i s + \beta_i t \quad \text{для всех } i \in I.$$

Полученную *T*- алгебру будем обозначать через $SW_X^\Sigma = (SW_X^*, \Sigma)$ и называть алгеброй полутермов над парой (X, Σ). Элементы главной подалгебры (в смысле [6]) алгебры SW_X^Σ, порожденной множеством *X*, называются термами. Пусть $s = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$ – терм над (X, Σ), через $I^*(s)$ и $I(s)$ обозначим следующие множества:

$$I^*(s) = \{e_i | i = 1,...,r\},\ I(s) = \{e \in E | ef \in I^*(s),\ f \in E\},\ I_n(s) = E_n \cap I(s).$$

Предложение 1. Пусть *t* – терм над (X, Σ) и $e \in I(t)$. Тогда существует единственная пара (*w,u*) такая, что *w* – полутерм над (X, Σ), *u* – терм над (X, Σ) и $t = w + eu$. Более того, если *v* – произвольный терм над (X, Σ), то $w + ev = \sigma_{e:v}(t)$ – также терм над (X, Σ).

Доказательство в [7].

Пусть $n \in N$, $t_0, t_1, ..., t_n$ – термы над (X, Σ) и $a_1, ..., a_n$ – некоторые элементы из $\{\alpha_i, \beta_i | i \in I\}$. Определим терм $[t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n]$ над (X, Σ) индукцией по *n* следующим образом: $[t_0] = t_0$; $[t_0, a_1, t_1, ..., a_{n+1}, t_{n+1}] = X_i([t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n], t_{n+1})$, если $a_{n+1} = \alpha_i$ и $[t_0, a_1, t_1, ..., a_{n+1}, t_{n+1}] = X_i(t_{n+1}, [t_0, a_1, t_1, ..., a_n, t_n])$, если $a_{n+1} = \beta_i$.

Если $t = w + eu$ – терм, то пусть $t_{[e]} = u$. Если $t = \sum_{i=1}^{r} e_i x_i$, то $t_{[e_i]} = x_i$ для всех i=1,…,*r*.

Предложение 2. Пусть *t* – терм над (X, Σ) и $e = a_1 ... a_n \in I_n(t)$ $(n \geq 0)$. Тогда:

1) $t = [t_{[e]}, a_n, t_{[a_1 ... a_{n-1} \overline{a_n}]}, a_{n-1}, t_{[a_1 ... a_{n-2} \overline{a_{n-1}}]}, ..., a_1, t_{[\overline{a_1}]}]$;

2) если *v* – терм над (X, Σ), то $\sigma_{e:v}(t) = [v, a_n, t_{[a_1 ... a_{n-1} \overline{a_n}]}, ..., a_1, t_{[\overline{a_1}]}]$.

Доказательство в [7].

Обозначим через C_X^Σ множество сверхтождеств над парой (X, Σ), выполняющихся во всех коммутативных абелевых алгебрах. C_X^Σ – наименьшая конгруэнция W_X^Σ такая, что W_X^Σ / C_X^Σ – коммутативная абелевая алгебра.

Пусть $e \in E_n$, тогда последовательность положительных целых чисел $(n_1, ..., n_i, ...)$, где $\sum_i n_i = n$, а n_i – число элементов из множества $\{\alpha_j, \beta_j | j \in I\}$, входящих в *e* с индексом *i*, будем называть весом *e*. На-пример, если $e=\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1\alpha_3\alpha_2$, то его вес равен (2,3,1,0,...,0,...). Через $I_{(n_1,\dots,n_i,\dots)}(t)$ обозначим множество коэффициентов терма t и их левых делителей, имеющих вес $(n_1,\dots,n_i,\dots)$.

Лемма 2. Пусть $n\geq 0$, $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\left\{\alpha_j,\beta_j \,\middle|\, j\in I\right\},]a_i[\,=\,]b_i[$ для всех i=1,…,n и $u_0,\dots,u_n,v_0,\dots,v_n\in W_X^{\Sigma}$. Тогда для любого $X\in\Sigma$ имеет место

$$(X([u_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],\quad [v_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n]),\quad X([v_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],$$
$$[u_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n]))\in C_X^{\Sigma}.$$

Доказательство. Индукцией по n. Пусть n =1, тогда возможны следующие случаи:

1. $a_1=\alpha_i, b_1=\alpha_i$;
2. $a_1=\alpha_i, b_1=\beta_i$;
3. $a_1=\beta_i, b_1=\beta_i$;
4. $a_1=\beta_i, b_1=\alpha_i$.

Рассмотрим случай 1. Здесь имеем:
$[u_0,a_1,u_1]=X_i(u_0,u_1)$, $[v_0,b_1,v_1]=X_i(v_0,v_1)$, $[v_0,a_1,u_1]=X_i(v_0,u_1)$, $[u_0,b_1,v_1]=X_i(u_0,v_1)$.
Поэтому

$$X([u_0,a_1,u_1],[v_0,b_1,v_1])=X(X_i(u_0,u_1),X_i(v_0,v_1));$$
$$X([v_0,a_1,u_1],[u_0,b_1,v_1])=X(X_i(v_0,u_1),X_i(u_0,v_1)).$$

Допустим, утверждение верно для n, докажем его для $n+1$:

$$\begin{aligned}
&X([u_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n,a_{n+1},u_{n+1}],[v_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n,b_{n+1},v_{n+1}])=\\
&=X(X_i([u_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],u_{n+1}),X_i([v_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n],v_{n+1}))=\\
&=X_i(X([u_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],[v_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n]),X(u_{n+1},v_{n+1}))=\\
&=X_i(X([v_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],[u_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n]),X(u_{n+1},v_{n+1}))=\\
&=X(X_i([v_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n],u_{n+1}),X_i([u_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n],v_{n+1}))=\\
&=X([v_0,a_1,u_1,\dots,a_n,u_n,a_{n+1},u_{n+1}],[u_0,b_1,v_1,\dots,b_n,v_n,b_{n+1},v_{n+1}]).
\end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Лемма 3. Пусть $t\in W_X^{\Sigma}$, $n_i\geq 0,\sum\limits_i n_i=n$ и $e,f\in I_{(n_1,\dots,n_i,\dots)}(t)$ такие, что $\left]e^{(j)}\right[=\left]f^{(j)}\right[$ для всех j. Тогда $(t,\tau_{e,f}[t])\in C_X^{\Sigma}$, где $\tau_{e,f}$ – транспозиция, определенная на $I_n(t)$ и переставляющая e и f.

Доказательство. Индукцией по длине терма t. Если $t\in X$ (т.е. если n =0), то $t=\tau_{e,f}[t]$. Пусть теперь $t=X_i(u,v)$. Положим $e=a_1\dots a_n, f=b_1\dots b_n$, они имеют одинаковый вес и $]a_1[\,=\,]b_1[,\dots,]a_n[\,=\,]b_n[$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $a_1=b_1=\alpha_i$. Тогда $a_2\dots a_n,b_2\dots b_n\in I_{n-1}(u)$ удовлетворяют условию теоремы, поэтому согласно индуктивному предположению имеем

$$(u,\tau_{a_2\ldots a_n,b_2\ldots b_n}[u])\in C_X^{\Sigma}.$$

Так как C_X^{Σ} – конгруэнция, то $(X_i(u,v),X_i(\tau_{a_2\ldots a_n,b_2\ldots b_n}[u],v))\in C_X^{\Sigma}$. Однако $\tau_{e,f}[t]=X_i(\tau_{a_2\ldots a_n,b_2\ldots b_n}[u],v)$. Поэтому $(t,\tau_{e,f}[t])\in C_X^{\Sigma}$.

2) $a_1=b_1=\beta_i$. Аналогично 1).

3) $a_1=\alpha_i, b_1=\beta_i$. Тогда $a_2\ldots a_n\in I_{n-1}(u), b_2\ldots b_n\in I_{n-1}(v)$. Имеем

$$\tau_{e,f}[t]=X_I(\sigma_{a_2\ldots a_n:t_{[f]}}(u),\sigma_{b_2\ldots b_n:t_{[e]}}(v)).$$

В силу предложения 2 (2) имеем

$$\sigma_{a_2\ldots a_i:t_{[f]}}(u)=[t_{[f]}=v_{[b_2\ldots b_n]},a_n,u_{[a_2\ldots a_{n-1}\overline{a_n}]},\ldots,a_2,u_{[\overline{a_2}]}],$$
$$\sigma_{b_2\ldots b_n:t_{[e]}}(v)=[t_{[e]}=u_{[a_2\ldots a_n]},b_n,v_{[b_2\ldots b_{n-1}\overline{b_n}]},\ldots,b_2,v_{[\overline{b_2}]}].$$

Поэтому

$$\tau_{e,f}[t]=X_i([v_{[b_2\ldots b_n]},a_n,u_{[a_2\ldots a_{n-1}\overline{a_n}]},\ldots,a_2,u_{[\overline{a_2}]}],[u_{[a_2\ldots a_n]},b_n,v_{[b_2\ldots b_{n-1}\overline{b_n}]},\ldots,b_2,v_{[\overline{b_2}]}]).$$

Аналогично в силу предложения 2 (1) имеем

$$u=[u_{[a_2\ldots a_n]},a_n,u_{[a_2\ldots a_{n-1}\overline{a_n}]},\ldots,a_2,u_{[\overline{a_2}]}],\quad v=[v_{[b_2\ldots b_n]},b_n,v_{[b_2\ldots b_{n-1}\overline{b_n}]},\ldots,b_2,v_{[\overline{b_2}]}].$$

Поэтому

$$t=X_i(u,v)=X_i([u_{[a_2\ldots a_n]},a_n,u_{[a_2\ldots a_{n-1}\overline{a_n}]},\ldots,a_2,u_{[\overline{a_2}]}],[v_{[b_2\ldots b_n]},b_n,v_{[b_2\ldots b_{n-1}\overline{b_n}]},\ldots,b_2,v_{[\overline{b_2}]}]).$$

Далее, так как $]a_2[=]b_2[,\ldots,]a_n[=]b_n[$, то согласно лемме 2 получим $(t,\tau_{e,f}[t])\in C_X^{\Sigma}$.

4) $a_1=\beta_i, b_1=\alpha_i$. Аналогично 3).

Теорема 1. Пусть $t\in W_X^{\Sigma}$, $n_i\geq 0$, $\sum_i n_i=n$ и p – подстановка множества $I_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots)}(t)$, удовлетворяющая условию: если $e\in I_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots)}(t)$, то $]e^{(i)}[=]p(e)^{(i)}[$ для любого i. Тогда $(t,p[t])\in C_X^{\Sigma}$.

Доказательство. Следует из леммы 3.

Пример. Рассмотрим терм

$$t=X_1(X_1(X_2(X_1(x_5,X_1(x_8,x_3)),x_{10}),x_7),X_1(x_6,X_2(X_1(X_1(x_2,x_1),x_4),x_9))).$$

Имеем

$$t=\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_1x_5+\alpha_1\alpha_1\alpha_2\beta_1\alpha_1x_8+\alpha_1\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_1x_3+\alpha_1\alpha_1\beta_2x_{10}+\alpha_1\beta_1x_7+\beta_1\alpha_1x_6+$$
$$+\beta_1\beta_1\alpha_2\alpha_1\alpha_1x_2+\beta_1\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_1x_1+\beta_1\beta_1\alpha_2\beta_1x_4+\beta_1\beta_1\beta_2x_9.$$

Сделав транспозицию $p(\alpha_1\alpha_1\alpha_2)=\beta_1\beta_1\beta_2, p(\beta_1\beta_1\beta_2)=\alpha_1\alpha_1\alpha_2$, получим

$$t=\beta_1\beta_1\beta_2\alpha_1x_5+\beta_1\beta_1\beta_2\beta_1\alpha_1x_8+\beta_1\beta_1\beta_2\beta_1\beta_1x_3+\alpha_1\alpha_1\beta_2x_{10}+\alpha_1\beta_1x_7+\beta_1\alpha_1x_6+$$
$$+\beta_1\beta_1\alpha_2\alpha_1\alpha_1x_2+\beta_1\beta_1\alpha_2\alpha_1\beta_1x_1+\beta_1\beta_1\alpha_2\beta_1x_4+\alpha_1\alpha_1\alpha_2x_9.$$

Следовательно, в коммутативных абелевых алгебрах выполняется сверхтождество

$$X_1(X_1(X_2(X_1(x_5,X_1(x_8,x_3)),x_{10}),x_7),X_1(x_6,X_2(X_1(X_1(x_2,x_1),x_4),x_9)))=$$
$$=X_1(X_1(X_2(x_9,x_{10}),x_7),X_1(x_6,X_2(X_1(X_1(x_2,x_1),x_4),X_1(x_5,X_1(x_8,x_3)))))\,.$$

Для любых $t \in W_X^{\Sigma}$, $x \in X$ и любой последовательности $(n_1,...,n_k,...)$, где $n_i \geq 0$, положим

$$P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,t) = Card\left\{e \in I_{(n_1,...,n_k,...)}(t) \middle| t_{[e]} = x\right\}.$$

Таким образом, $P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,t)$ – число вхождений переменной x веса $(n_1,...,n_k,...)$ в терм t.

Определим бинарное отношение S_X^{Σ} на W_X^{Σ} следующим образом: $(u,v) \in S_X^{\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,u) = P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,v)$ для всех $x \in X$ и для всех $n_i \geq 0$.

Лемма 4. Пусть $t,w \in W_X^{\Sigma}$, $n_i \geq 0$, $x \in X$. Тогда $P_{(n_1,...,n_i,...,n_k,...)}(x, X_i(t,w)) =$ $= P_{(n_1,...,n_i-1,...,n_k,...)}(x,t) + P_{(n_1,...,n_i-1,...,n_k,...)}(x,w)$, где $P_{(...,-1,...)}(x,t) = 0$.

Доказательство. Непосредственной проверкой.

Лемма 5. Пусть $t \in W_X^{\Sigma}$, $n_i \geq 0$ для всех $i \in I$ и пусть g – эндоморфизм W_X^{Σ}. Тогда $P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,g(t)) = \sum\limits_{y\in X}\sum\limits_{i_1=0}^{n_1}...\sum\limits_{i_k}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_k,...)}(y,t) \cdot P_{(n_1-i_1,...,n_k-i_k,...)}(y,g(y))$.

Доказательство. Индукцией по длине терма t. Если $\lambda(t)=1$, то утверждение следует из леммы 4. Пусть $t = X_q(u,v)$, тогда согласно лемме 4 и по предположению индукции имеем:

$$P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,g(X_q(u,v))) = P_{(n_1,...,n_k,...)}(x,X_q(g(u),g(v))) =$$
$$= P_{(n_1,...,n_q-1,...,n_k,...)}(x,g(u)) + P_{(n_1,...,n_q-1,...,n_k,...)}(x,g(v)) =$$
$$= \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q-1}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q,...,i_k,...)}(y,u)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-1-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y)) +$$
$$+ \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q-1}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q,...,i_k,...)}(y,v)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-1-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y)) =$$
$$= \sum_{y\in X}(\sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q-1}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q,...,i_k,...)}(y,u)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-1-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y)) +$$
$$+ \sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q-1}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q,...,i_k,...)}(y,v)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-1-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y))) =$$
$$= \sum_{y\in X}(\sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q-1,...,i_k,...)}(y,u)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y)) +$$
$$+ \sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...P_{(i_1,...,i_q-1,...,i_k,...)}(y,v)\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y))) =$$
$$= \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}...\sum_{i_q=0}^{n_q}...\sum_{i_k=0}^{n_k}...(P_{(i_1,...,i_q-1,...,i_k,...)}(y,u) + P_{(i_1,...,i_q-1,...,i_k,...)}(y,v))\cdot P_{(n_1-i_1,...,n_q-i_q,...,n_k-i_k,...)}(x,g(y)) =$$

$$= \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{i_q=0}^{n_q}\ldots\sum_{i_k=0}^{n_k}\ldots P_{(i_1,\ldots,i_q,\ldots,i_k,\ldots)}(y, X_q(u,v))\cdot P_{(n_1-i_1,\ldots,n_q-i_q,\ldots,n_k-i_k,\ldots)}(x, g(y)).$$

Теорема 2. S_X^Σ – вполне инвариантная сократимая конгруэнция W_X^Σ и $C_X^\Sigma \subseteq S_X^\Sigma$.

Доказательство. Очевидно, что S_X^Σ – отношение эквивалентности. Пусть $(u,v)\in S_X^\Sigma$ и $r\in W_X^\Sigma$. Тогда для любого $X_i\in\Sigma$ имеем

$$P_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_k,\ldots)}(x, X_i(r,u)) = P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,r) + P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,u) =$$
$$= P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,r) + P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,v) = P_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_k,\ldots)}(x, X_i(r,v)).$$

Следовательно, S_X^Σ – конгруэнция. Теперь пусть $(X_i(r,t), X_i(s,t))\in S_X^\Sigma$, тогда

$$P_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_k,\ldots)}(x, X_i(r,t)) = P_{(n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_k,\ldots)}(x, X_i(s,t)),$$

поэтому

$$P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,r) + P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,t) = P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,s) + P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,t),$$

следовательно,

$$P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,r) = P_{(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_k,\ldots)}(x,s).$$

И поскольку это равенство имеет место для всех $x\in X$ и любых $n_i\geq 0$, то $(r,s)\in S_X^\Sigma$, т.е. S_X^Σ – сократимая конгруэнция.

Покажем вполне инвариантность S_X^Σ. Пусть $(u,v)\in S_X^\Sigma$, а g – эндоморфизм W_X^Σ. Согласно лемме 5 имеем

$$P_{(n_1,\ldots,n_k,\ldots)}(x, g(u)) = \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n_k}\ldots P_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots)}(y,u)\cdot P_{(n_1-i_1,\ldots,n_k-i_k,\ldots)}(x, g(y)),$$

$$P_{(n_1,\ldots,n_k,\ldots)}(x, g(v)) = \sum_{y\in X}\sum_{i_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{i_k=0}^{n_k}\ldots P_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots)}(y,v)\cdot P_{(n_1-i_1,\ldots,n_k-i_k,\ldots)}(x, g(y)).$$

Так как $(u,v)\in S_X^\Sigma$, то $P_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots)}(y,u) = P_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots)}(y,v)$, и, следовательно,

$$P_{(n_1,\ldots,n_k,\ldots)}(x, g(u)) = P_{(n_1,\ldots,n_k,\ldots)}(x, g(v))$$

для всех $x\in X$ и любых $n_i\geq 0$, т.е. $(g(u), g(v))\in S_X^\Sigma$, а это означает, что S_X^Σ – вполне инвариантная конгруэнция.

Далее, фактор W_X^Σ / S_X^Σ будет коммутативной абелевой алгеброй, поэтому $C_X^\Sigma \subseteq S_X^\Sigma$.

Кафедра алгебры и геометрии

Поступила 11.04.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М.** – УМН, 1988, т. 53, с. 61–114.
2. **Jezek J., Kepka T.** Medial groupoids. Praha, 1983.

3. **Курош А.Г.** Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
4. **Romanowska A.B., Smith J.D.H.** Modes, Singapore: World Scientific, 2002.
5. **Мовсисян Ю.М.** Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1986.
6. **Mowsisyan Yu.M.** – Scientiae Mathematicae Japonicae, 2001, v. 54, № 3, p. 595–640.
7. **Давидов С.С.** – Ученые записки ЕГУ, 2004, № 1, с. 34–42.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ՏԵՂԱՓՈԽԵԼԻ ԱԲԵԼՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են տեղափոխելի երկտեղ աբելյան հանրահաշիվները: Գտնված է անհրաժեշտ պայման, որի դեպքում կամայական գերնույնություն (այսինքն $\forall(\forall)$-նույնություն) տեղի ունի տեղափոխելի երկտեղ աբելյան հանրահաշիվների դասում:

S. S. DAVIDOV

COMMUTATIVE ABELIAN ALGEBRAS

Summary

In the present paper commutative abelian binary algebras are studied by applying the construction of the algebra of semiterms. We have found the necessary condition when any hyperidentity (i.e. $\forall(\forall)$-identity) is satisfied in all abelian commutative binary algebras.