ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2007 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

З. Р. БАГДАСАРЯН

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

В настоящей работе на основе классической теории Кирхгофа и уточненной теории С.А.Амбарцумяна рассмотрены задачи изгиба прямоугольной пластинки.

Показано, что в случае, когда пластинка по двум сторонам оперта свободно, а по двум другим закреплена шарнирно, точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной пластинки по сравнению с единицей. Получены формулы для прогиба, моментов, а также для перерезывающих сил. В случаях узких и широких (относительно шарнирно закрепленных сторон) пластин сделаны приближения для максимального прогиба, перерезывающих и обобщенных перерезывающих сил.

1. На основе классической теории пластин [1] рассматривается шарнирно закрепленная по всему контуру тонкая прямоугольная пластинка с размерами $2a$, $2b$ и толщиной $2h$, которая изгибается под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки q_o $(q_o = const)$.

Прямоугольная декартовая система координат выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью Oxy, а ось Oz нормальна к этой плоскости $(-a \le x \le a,\ -b \le y \le b,\ -h \le z \le h)$.

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки и граничные условия в рассматриваемом случае соответственно имеют вид:

$$\Delta^2 W(x,y) = \frac{q_o}{D}, \tag{1.1}$$

$$W(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \tag{1.2}$$

$$W(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \tag{1.3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} = \dfrac{4Gh^3}{3(1-\nu)}$, $W(x,y)$ – прогиб пластинки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

Как известно, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), имеет вид [1]:

$$W(x,y)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^{\ 4}}\left[1+\frac{\lambda_n x}{2}\frac{sh\lambda_n x}{ch\alpha_n}-\left(1+\frac{\alpha_n}{2}th\alpha_n\right)\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\right]\cos\lambda_n y\,, \tag{1.4}$$

где $d_n=\dfrac{4(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)}$, $\lambda_n=\dfrac{\pi}{2b}(2n-1)$, $\alpha_n=\lambda_n a$ (n=1,2,...).

Из формулы (1.4) для максимального прогиба имеем

$$W(0,0)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^{\ 4}}\left(1-\frac{2+\alpha_n th\alpha_n}{2ch\alpha_n}\right). \tag{1.4'}$$

В формуле (1.4') принимая $\alpha_n \ll 1$, т.е. рассматривая приближение для широкой пластинки (относительно краев $y=\pm b$), получим

$$W(0,0)=\frac{q_0 a^4}{4D}. \tag{1.5}$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае перерезывающие силы $N_x(x,y)$, $N_y(x,y)$, обобщенные перерезывающие силы $\tilde{N}_x(x,y)$, $\tilde{N}_y(x,y)$ и моменты $M_x(x,y)$, $M_y(x,y)$ соответственно выражаются формулами:

$$N_x(x,y)=-q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\frac{sh\lambda_n x}{ch\alpha_n}\cos\lambda_n y\,, \tag{1.6}$$

$$N_y(x,y)=q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\left(\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}-1\right)\sin\lambda_n y\,, \tag{1.7}$$

$$\tilde{N}_x(x,y)=-\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\frac{sh\lambda_n x}{ch\alpha_n}\left[3-\nu+(1-\nu)(\alpha_n th\alpha_n-\lambda_n x cth\lambda_n x)\right]\cos\lambda_n y\,, \tag{1.8}$$

$$\tilde{N}_y(x,y)=-\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\left[2\left(\frac{ch\alpha_n}{ch\lambda_n x}-1\right)+(1-\nu)(\alpha_n th\alpha_n-\lambda_n x th\lambda_n x)\right]\sin\lambda_n y\,, \tag{1.9}$$

$$M_x(x,y)=-q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^{\ 2}}\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\left[\frac{1-\nu}{2}(\lambda_n x th\lambda_n x-\alpha_n th\alpha_n)+\nu\left(1-\frac{ch\alpha_n}{ch\lambda_n x}\right)\right]\cos\lambda_n y\,, \tag{1.10}$$

$$M_y(x,y)=-q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^{\ 2}}\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\left[1-\frac{ch\alpha_n}{ch\lambda_n x}+\frac{1-\nu}{2}(\alpha_n th\alpha_n-\lambda_n x th\lambda_n x)\right]\cos\lambda_n y\,, \tag{1.11}$$

получим $N_x(x,\pm b)=0$, $\tilde{N}_x(x,\pm b)=0$, $N_y(\pm a,y)=0$, $\tilde{N}_y(\pm a,y)=0$, $M_x(\pm a,y)=0$, $M_y(\pm a,y)=0$.

Далее, при $\alpha_n \gg 1$ имеем

$$N_x(a,y)=-q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\cos\lambda_n y\,,\quad \tilde{N}_x(a,y)=-\frac{(3-\nu)q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\cos\lambda_n y\,, \tag{1.12}$$

а при $\alpha_n \ll 1$ –

$$N_x(a,y)=-q_0 a\,,\quad \tilde{N}_x(a,y)=-q_0 a\,. \tag{1.13}$$

Легко проверить также, что имеет место следующее соотношение:

$$2\int_{-a}^{a}\tilde{N}_y(x,-b)dx+2\int_{-b}^{b}\tilde{N}_x(-a,y)dy=4q_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^2}\left[(1-\nu)(1+\alpha_n th\alpha_n)th\alpha_n+\nu\alpha_n\right], \quad (1.14)$$

из которого следует, что на основе классической теории нарушается условие равновесия для обобщенных перерезывающих сил $\tilde{N}_x(x,y)$ и $\tilde{N}_y(x,y)$ [2].

С другой стороны, имеем

$$2\int_{-a}^{a}N_y(x,-b)dx+2\int_{-b}^{b}N_x(-a,y)dy=-q_0\int_{-a}^{a}\left(\int_{-b}^{b}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos\lambda_n y dy\right)dx=-4q_0 a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^2}, \quad (1.15)$$

откуда следует, что для перерезывающих сил $N_x(x,y)$ и $N_y(x,y)$ имеет место условие равновесия.

2. На основе уточненной теории С.А. Амбарцумяна [3] система дифференциальных уравнений изгиба рассмотренной пластинки и граничные условия соответственно имеют вид [4]:

$$\begin{cases}\Delta\Phi=-\dfrac{3q_0}{4h}\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n\cos\lambda_n y,\\ \Delta W-\dfrac{8\gamma h^3}{3(1-\nu)D}\Delta\Phi+\dfrac{4h}{3D}\Phi=0,\\ \Delta\Psi-\dfrac{1}{\gamma h^2}\Psi=0,\end{cases} \quad (2.1)$$

$$W=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{2\gamma}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0 \text{ при } x=\pm a, \quad (2.2)$$

$$W=0,\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{2\gamma}{G}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0 \text{ при } y=\pm b, \quad (2.3)$$

где $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ – искомые функции, $\gamma=2/5$ по [3] и $\gamma=1/3$ по теории Рейснера–Генки–Миндлина, по варианту Васильева [5].

Как известно, решение системы (2.1), удовлетворяющее граничным условиям (2.2) и (2.3), имеет вид [6]:

$$W(x,y)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^4}\left[1+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}+\frac{\lambda_n x}{2}\frac{sh\lambda_n x}{ch\alpha_n}-\left(1+\frac{\alpha_n}{2}th\alpha_n+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\right)-\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\right]\cos\lambda_n y, \quad (2.4)$$

$$\Phi(x,y)=\frac{3q_0}{4h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^2}\left(1-\frac{ch\lambda_n x}{ch\alpha_n}\right)\cos\lambda_n y, \quad (2.5)$$

$$\Psi(x,y)=0, \quad (2.6)$$

где

$$\xi_n=\sqrt{\gamma}\lambda_n h \quad (n=1,2,\ldots). \quad (2.7)$$

Сопоставляя выражения прогиба (1.4) и (2.4), замечаем, что точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение квадратом относительной толщины пластинки по сравнению с единицей $\left(\xi_n^2 \ll 1\right)$.

Из формулы (2.4) для максимального прогиба получается

$$W(0,0)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^4}\left[1-\frac{2+\alpha_n th\alpha_n}{2ch\alpha_n}+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\left(1-\frac{1}{ch\alpha_n}\right)\right]. \qquad (2.4')$$

Замечая, что при $\alpha_n \ll 1$

$$W(0,0)=\frac{q_0 a^4}{4D}\left(1+\frac{2\gamma}{1-\nu}\frac{h^2}{a^2}\right) \qquad (2.8)$$

и сопоставляя выражение (2.8) с выражением (1.7), еще раз убеждаемся в правоте сделанного выше заключения о точности гипотезы Кирхгофа.

Далее, убеждаемся, что выражения для перерезывающих сил и моментов совпадают с соответствующими выражениями (1.6), (1.7), (1.10) и (1.11), полученными на основе классической теории, откуда в частности следует, что для перерезывающих сил имеет место условие равновесия.

3. Предположим теперь, что рассмотренная выше пластинка шарнирно закреплена по краям $y=\pm b$ и свободно оперта по краям $x=\pm a$.

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) ищем в виде:

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\cos\lambda_n y,\qquad \Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\cos\lambda_n y,$$
$$\Psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x)\sin\lambda_n y, \qquad (3.1)$$

где $f_n(x)$, $g_n(x)$ и $p_n(x)$ (n=1,2,…) – неизвестные функции.

Подставляя функции (3.1) в систему (2.1) и решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_n(x)$, $g_n(x)$ и $p_n(x)$ (n=1,2,…), с учетом равенств (3.1) и представления q_0 в виде ряда

$$q_0=q_0\sum_{n=1}^{\infty}d_n\cos\lambda_n y \qquad (3.2)$$

получим

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\grave{A}_n\mathring{a}^{-\lambda_n x}+B_n\mathring{a}^{\lambda_n x}+\frac{2hx}{3\lambda_n D}\left(C_n\mathring{a}^{-\lambda_n x}-D_n\mathring{a}^{\lambda_n x}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{q_0 d_n}{\lambda_n^4 D}\left(1+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\right)\right]\cos\lambda_n y, \qquad (3.3)$$

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathring{a}^{-\lambda_n x}+D_n\mathring{a}^{\lambda_n x}+\frac{3q_0 d_n}{4\lambda_n^2 h}\right)\cos\lambda_n y, \qquad (3.4)$$

$$\Psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\mathring{a}^{-\lambda_n\mu_n x}+F_n\mathring{a}^{\lambda_n\mu_n x}\right)\sin\lambda_n y, \qquad (3.5)$$

где

$$\mu_n=\frac{\sqrt{1+\xi_n^2}}{\xi_n}\quad (n=1,2,\ldots), \qquad (3.6)$$

а произвольные постоянные A_n, B_n, C_n, D_n, E_n и F_n (n=1,2,…) подлежат определению.

Заменяя граничные условия при $x=-a$ условиями симметрии

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial^3 W(x,y)}{\partial x^3}=0\,,\quad \Psi(x,y)=0 \quad \text{при} \quad x=0 \tag{3.7}$$

и подставляя (3.3) и (3.5) в (3.7), получим

$$A_n=B_n\,,\quad C_n=D_n\,,\quad E_n=-F_n\,. \tag{3.8}$$

С учетом (3.8) (3.3)–(3.5) запишутся:

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\grave{A}_n ch\lambda_n x-\frac{4hx}{3\lambda_n D}C_n sh\lambda_n x+\frac{q_0 d_n}{\lambda_n^{\,4} D}\left(1+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}\right)\right]\cos\lambda_n y\,, \tag{3.3'}$$

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2C_n ch\lambda_n x+\frac{3q_0 d_n}{4\lambda_n^{\,2} h}\right)\cos\lambda_n y\,, \tag{3.4'}$$

$$\Psi(x,y)=-2\sum_{n=1}^{\infty}E_n sh\lambda_n\mu_n x\sin\lambda_n y\,. \tag{3.5'}$$

Используя также граничные условия при $x=a$ [4]

$$\begin{gathered}W=0,\quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}-\frac{\gamma}{G}\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)=0,\\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{2\gamma}{G}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right]=0,\end{gathered} \tag{3.9}$$

для коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, E_n и F_n (n=1,2,…) получим:

$$\begin{aligned}A_n=B_n=-\frac{q_0 d_n}{2\lambda_n^{\,4} D ch\alpha_n}&\left\{1+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}+\right.\\ &+\frac{\alpha_n}{4}\cdot\frac{\left[2(1-\nu)\xi_n\sqrt{1+\xi_n^{\,2}}\left(1+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}\right)th\alpha_n-\left(1+2\xi_n^{\,2}\right)^2 th\alpha_n\mu_n\right]sh2\alpha_n}{(1-\nu)\xi_n\sqrt{1+\xi_n^{\,2}}\left[\alpha_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}\right)sh2\alpha_n\right]-\left(1+2\xi_n^{\,2}\right)^2 ch^2\alpha_n th\alpha_n\mu_n}\left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}C_n=D_n=-\frac{3q_0 d_n ch\alpha_n}{8\lambda_n^{\,2} h}&\times\\ \times&\frac{2(1-\nu)\xi_n\sqrt{1+\xi_n^{\,2}}\left(1+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}\right)th\alpha_n-\left(1+2\xi_n^{\,2}\right)^2 th\alpha_n\mu_n}{(1-\nu)\xi_n\sqrt{1+\xi_n^{\,2}}\left[\alpha_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{2\xi_n^{\,2}}{1-\nu}\right)sh2\alpha_n\right]-\left(1+2\xi_n^{\,2}\right)^2 ch^2\alpha_n th\alpha_n\mu_n},\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$E_n=-F_n=-\frac{3q_0 d_n(1+2\xi_n^{\,2})}{16\lambda_n^{\,2} h\xi_n\mu_n ch\alpha_n\mu_n}\times$$

$$\times\frac{(1-\nu)\sqrt{1+\xi_n^2}\,(sh\alpha_n ch\alpha_n-\alpha_n)}{(1-\nu)\xi_n\sqrt{1+\xi_n^2}\left[\alpha_n+\left(\frac{1}{2}+\frac{2\xi_n^2}{1-\nu}\right)sh2\alpha_n\right]-\left(1+2\xi_n^2\right)^2 ch^2\alpha_n th\alpha_n\mu_n}. \qquad (3.12)$$

Подставляя выражения для коэффициентов A_n и C_n (n=1,2,…) в формулу (3.3'), убеждаемся, что в рассмотренном случае точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной пластинки по сравнению с единицей.

В рассмотренном случае в приближении $\xi_n^2 << 1$ для максимального прогиба имеем

$$W(0,0)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^4}\left[1-\frac{1}{ch\alpha_n}-\frac{\alpha_n sh\alpha_n}{2}\cdot\frac{2(1-\nu)\xi_n th\alpha_n-th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}{(1-\nu)\xi_n(\alpha_n+sh\alpha_n ch\alpha_n)-ch^2\alpha_n th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}\right]. \quad (3.13)$$

Легко проверить, что при $\alpha_n << 1$ получим

$$W(0,0)=\frac{q_0 a^4}{4D}\sum_{n=1}^{\infty}d_n\frac{(1-\nu)\alpha_n\xi_n-th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}{2(1-\nu)\alpha_n\xi_n-th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}, \qquad (3.14)$$

а при $\alpha_n >> 1$ –

$$W(0,0)=\frac{q_0}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n^4}\left[1-\frac{2}{e^{\alpha_n}}-\frac{\alpha_n}{e^{2\alpha_n}}\frac{2(1-\nu)\xi_n-1}{(1-\nu)\xi_n\left(1+\dfrac{4\alpha_n}{e^{\alpha_n}}\right)-1}\right]. \qquad (3.15)$$

Далее, для перерезывающих сил в приближении $\xi_n^2 << 1$ будем иметь

$$N_x(a,y)=-\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\cdot\left\{\frac{4(1-\nu)\xi_n sh^2\alpha_n}{(1-\nu)\xi_n(sh\alpha_n ch\alpha_n+\alpha_n)-ch^2\alpha_n th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left[(1-\nu)\alpha_n-(3-\nu)sh\alpha_n ch\alpha_n\right]th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}{(1-\nu)\xi_n(sh\alpha_n ch\alpha_n+\alpha_n)-ch^2\alpha_n th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}\right\}\cos\lambda_n y, \qquad (3.16)$$

$$N_y(a,y)=-\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n\xi_n}\cdot\frac{(1-\nu)(sh\alpha_n ch\alpha_n-\alpha_n)}{(1-\nu)\xi_n(sh\alpha_n ch\alpha_n+\alpha_n)-ch^2\alpha_n th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}\sin\lambda_n y. \quad (3.17)$$

Из формул (3.16) и (3.17) найдем, что при $\alpha_n >> 1$

$$N_x(a,y) = -\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n}\cdot\frac{3-\nu-4(1-\nu)\xi_n}{1-(1-\nu)\xi_n}\cos\lambda_n y\,, \tag{3.16'}$$

$$N_y(a,y) = -\frac{q_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\lambda_n\xi_n}\cdot\frac{1-\nu}{(1-\nu)\xi_n-1}\sin\lambda_n y\,, \tag{3.17'}$$

а при $\alpha_n << 1$

$$N_x(a,y) = -q_0 a\,, \tag{3.16''}$$

$$N_y(a,y) = -\frac{q_0 a}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{\xi_n}\cdot\frac{(1-\nu){\alpha_n}^2}{2(1-\nu)\alpha_n\xi_n - th\dfrac{\alpha_n}{\xi_n}}\sin\lambda_n y\,. \tag{3.17''}$$

Из полученных формул видно, что выражения для перерезывающих сил существенно отличаются от соответствующих выражений, полученных на основе классической теории.

4. Переходим к численным расчетам, предполагая, что нагрузка задана в виде

$$q(x,y) = q_0\cos\lambda_1 y\,, \tag{4.1}$$

т.е. в представлении нагрузки (3.2) оставляем только первый член. Для максимального прогиба из (1.4'), (2.4') и (3.13) соответственно получим

$$W(0,0) = \frac{q_0}{{\lambda_1}^4 D}W_1(0,0)\,,\quad W(0,0) = \frac{q_0}{{\lambda_1}^4 D}W_2(0,0)\,,\quad W(0,0) = \frac{q_0}{{\lambda_1}^4 D}W_3(0,0)\,, \tag{4.2}$$

где

$$W_1(0,0) = \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{2+\alpha_1 th\alpha_1}{2ch\alpha_1}\right), \tag{4.3}$$

$$W_2(0,0) = \frac{4}{\pi}\left[1-\frac{2+\alpha_1 th\alpha_1}{2ch\alpha_1}+\frac{2{\xi_1}^2}{1-\nu}\left(1-\frac{1}{ch\alpha_1}\right)\right], \tag{4.4}$$

$$W_3(0,0) = \frac{4}{\pi}\left[1-\frac{1}{ch\alpha_1}-\frac{\alpha_1 sh\alpha_1}{2}\cdot\frac{2(1-\nu)\xi_1 th\alpha_1 - th\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1+sh\alpha_1 ch\alpha_1)-ch^2\alpha_1 th\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}}\right]. \tag{4.5}$$

Таблица 1

a/b \ ξ_1		0	0,1	0,2	0,3
$\frac{1}{\pi}$	$W_1(0,0)$	0,0136	–	–	–
	$W_2(0,0)$	0,0136	0,0178	0,0301	0,0507
	$W_3(0,0)$	0,0136	0,0184	0,0314	0,0526
1	$W_1(0,0)$	0,4002	–	–	–
	$W_2(0,0)$	0,4002	0,4221	0,4878	0,5972
	$W_3(0,0)$	0,4002	0,4401	0,5237	0,6489
π	$W_1(0,0)$	1,2096	–	–	–
	$W_2(0,0)$	1,2096	1,2454	1,3530	1,5322
	$W_3(0,0)$	1,2096	1,2487	1,3595	1,5416

В таблице 1 приводятся безразмерные значения $W_1(0,0)$, $W_2(0,0)$,

$W_3(0,0)$, вычисленные при $\nu = 0{,}3$ для различных значений параметра ξ_1 и отношения a/b.

Как видно из табл. 1, с увеличением ξ и a/b значения $W_2(0,0)$ и $W_3(0,0)$ монотонно возрастают (при увеличении a/b монотонно возрастают также значения $W_1(0,0)$). Замечаем также, что значения $W_3(0,0)$ несколько превышают соответствующие значения $W_2(0,0)$, что и следовало ожидать.

Далее, предполагая, что нагрузка задана в виде (4.1), в табл. 2 представим безразмерные значения $N_x^0(a,0)$ и $\tilde{N}_x^0(a,0)$, вычисленные по формулам:

$$N_x^0(a,0) = \frac{4}{\pi} th\alpha_1, \tag{4.6}$$

$$\tilde{N}_x^0(a,0) = \frac{4}{\pi}\left[3 - \nu - \frac{2(1-\nu)\alpha_1}{sh2\alpha_1}\right] th\alpha_1 \tag{4.7}$$

при $\nu = 0{,}3$ для различных значений a/b.

Таблица 2

a/b	$1/\pi$	1	π
$N_x^0(a,0)$	0,5883	1,1675	1,2731
$\tilde{N}_x^0(a,0)$	0,4438	1,5054	1,7186

Как видно из табл. 2, с увеличением a/b как значения $N_x^0(a,0)$, так и значения $\tilde{N}_x^0(a,0)$ монотонно возрастают.

В конце представим еще одну таблицу, в которой соответственно приведены безразмерные значения перерезывающих сил $N_x^0(a,0)$ и $N_y^0(a,b)$, вычисленные по формулам:

$$N_x^0(a,0) = \frac{2}{\pi}\frac{4(1-\nu)\xi_1 sh^2\alpha_1 + \left[(1-\nu)\alpha_1 - (3-\nu)sh\alpha_1 ch\alpha_1\right] th\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}}{(1-\nu)\xi_1(sh\alpha_1 ch\alpha_1 + \alpha_1) - ch^2\alpha_1 th\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}}, \tag{4.8}$$

$$N_y^0(a,b) = \frac{2}{\pi\xi_1}\cdot\frac{(1-\nu)(sh\alpha_1 ch\alpha_1 - \alpha_1)}{(1-\nu)\xi_1(sh\alpha_1 ch\alpha_1 + \alpha_1) - ch^2\alpha_1 th\dfrac{\alpha_1}{\xi_1}} \tag{4.9}$$

при $\nu = 0{,}3$ для различных значений параметра ξ_1 и a/b.

Сравнивая таблицы 2 и 3, замечаем, что по мере уменьшения параметра ξ_1 безразмерные значения перерезывающих сил $N_x^0(a,0)$, вычисленные по формуле (4.8), приближаются к соответствующим значениям $\tilde{N}_x^0(a,0)$, вычисленным по формуле (4.7).

Таблица 3

a/b \ ξ_1		0,1	0,2	0,3
$1/\pi$	$N_x^0(a,0)$	0,6177	0,6152	0,6122
	$N_y^0(a,b)$	0,3158	0,1544	0,1001
1	$N_x^0(a,0)$	1,4282	1,3842	1,3421
	$N_y^0(a,b)$	3,1324	1,5642	1,0022
π	$N_x^0(a,0)$	1,6505	1,5750	1,5055
	$N_y^0(a,b)$	4,6311	2,2906	1,4611

Кафедра маханики сплошной среды *Поступила 26.02.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки, М.: Физматгиз, 1963, 636 с.
2. **Васильев В.В.** – Изв. РАН МТТ, 1995, № 4, с. 140–150.
3. **Амбарцумян С.А.** Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987, 360 с.
4. **Белубекян М.В.** Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ер.: Гитутюн, НАН РА, 2002, с. 67–88.
5. **Reissner E.** – J. Applied Mech., 1945, v. 12, p. 69–77.
6. **Мелконян А.П.**, **Хачатрян А.А.** – Изв. АН Арм. ССР. Физ-мат. науки, 1965, т. 18, № 1, с. 43–52.

Զ. Ռ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ՆՈՐՄԱԼ ԲԵՌՈՎ

Ամփոփում

Ներկայացվող աշխատանքում Կիրխհոֆի դասական տեսության և Ս.Ա. Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկված են ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրներ:

Ցույց է տրված, որ երկու եզրերում հոդակապորեն ամրակցված, իսկ մյուս երկուսում ազատ հենված սալի պարագայում՝ Կիրխհոֆի վարկածի ճշտությունը սալի հարաբերական հաստության արհամարհումն է մեկի նկատմամբ:

Ստացված են բանաձևեր ճկվածքի, մոմենտների, ինչպես նաև կտրող ուժերի համար:

Նեղ և լայն (հողակապորեն ամրակցված եզրերի նկատմամբ) սալերի դեպքում մաքսիմալ ճկվածքի, կտրող և ընդհանրացված կտրող ուժերի համար կատարված են մոտավորություններ:

Z. R. BAGHDASARYAN

BENDING OF RECTANGULAR PLATE IN HOMOGENEOUS DISTRIBUTED TRANSVERSAL LOADING

Summary

In this work, on the basis of classical theory by Kirchhoff and S.A. Ambartsumyan's specified theory problems on the bending of the plate are investigated.

It is shown that in a case when the plate is leaned free from both sides, and on two others is leaned in a way of mobile connection of two parts, so the accuracy of Kirchhoff's hypothesis is the neglecting of related thickness in comparison with unit.

Formulas for deflection, moments, also for cutting forces are received.

In case of narrow and wide plates the approaches for maximal deflection, cutting and generalized cutting forces are made.