ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517. 55

А. И. ПЕТРОСЯН

ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА b_α^p ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье вводятся весовые пространства $b_\alpha^p(B)$ функций, гармонических в единичном шаре $B \subset \boldsymbol{R}^n$. Строится воспроизводящее ядро K_α, которое затем используется для интегрального представления функций из b_α^p.

Предварительные сведения. Ниже будем пользоваться следующими обозначениями: $B = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x| < 1\}$ – открытый единичный шар в $\boldsymbol{R}^n$; S – его граница, являющаяся единичной сферой; σ – борелевская мера на S, инвариантная относительно вращений и нормированная условием $\sigma(S) = 1$; $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ – множество всех комплекснозначных однородных гармонических полиномов степени m в пространстве $\boldsymbol{R}^n$; $H_m(S)$ – множество всех сферических гармоник степени m, т. е. сужений функций из $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ на сферу S. $P[f]$ означает интеграл Пуассона функции f:

$$P[f](x) = \int_S P(x,\zeta) f(\zeta)\, d\sigma(\zeta),$$

где

$$P(x,\zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|\zeta - x|^n} \tag{1}$$

есть n-мерное ядро Пуассона.

Ниже мы приводим некоторые известные сведения из теории гармонических функций, которые можно найти, например, в книге [1].

Гильбертово пространство $L^2(S)$ разлагается в прямую сумму подпространств $H_m(S)$, т. е. $L^2(S) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(S)$. Это означает следующее:

1) $H_m(S)$ является замкнутым подпространством $L^2(S)$;
2) $H_m(S)$ ортогональна к $H_k(S)$, если $m \neq k$;

3) для каждой функции $u \in L^2(S)$ существуют $u_m \in H_m(S)$ такие, что

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m, \qquad (2)$$

где ряд сходится в норме $L^2(S)$.

В частном случае, когда $n=2$, пространство $H_2(S)$ является комплексно-линейной оболочкой от $\left\{z^m, \overline{z}^m\right\}$. Следовательно, $H_2(S)$ как пространство функций от переменной $e^{i\theta}$ является комплексно-линейной оболочкой от $\left\{e^{im\theta}, e^{-im\theta}\right\}$. Таким образом, разложение на сферические гармоники (2) в случае $n=2$ является не чем иным, как разложением в ряд Фурье.

Пространство $H_m(S)$, будучи замкнутым подпространством $L^2(S)$, является гильбертовым со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int\limits_S u(\zeta)\overline{v(\zeta)}\,d\sigma(\zeta).$

Пусть точка $\eta \in S$ фиксирована. Функционал $\Lambda : H_m(S) \to C$, определяемый как значение в точке η, т.е. $\Lambda(p) = p(\eta)$, очевидно, линеен. Из общей теории гильбертовых пространств следует, что существует элемент $Z_m(\cdot,\eta) \in H_m(S)$ такой, что $p(\eta) = \int\limits_S p(\zeta)\overline{Z_m(\zeta,\eta)}\,d\sigma(\zeta).$ Функция $Z_m(\cdot,\eta)$ называется зональной гармоникой порядка m с полюсом η. Для ядра Пуассона (1) имеет место разложение $P(x,\zeta) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} Z_m(x,\zeta)$ для всех $x \in B, \zeta \in S$, причем ряд сходится абсолютно и равномерно на $K \times S$ для всякого компакта $K \subset B$. В терминах зональной гармоники разложение (2) имеет следующий вид:

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle f, Z_m(\cdot,\eta)\right\rangle.$$

Далее, размерность h_m пространства $H_m(S)$ определяется формулой

$$h_m = \binom{n+m-2}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-2},$$

из которой легко следует, что $\dfrac{h_m}{m^{n-2}} \to \dfrac{2}{(n-2)!}$ при $m \to \infty$. Поэтому

$$h_m \le C m^{n-2}, \qquad (3)$$

где C – абсолютная константа.

Пространства b_α^p. Для заданного $\alpha \in (-1,\infty)$ введем меру

$$dV_\alpha(x) = \left(1 - |x|^2\right)^\alpha dV(x), \text{ где } dV(x) - \text{ мера объема },$$

и определим $L^p(B, dV_\alpha)$ как множество всех измеримых функций, определенных в B, для которых

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left[\int_B |f(x)|^p\, dV_\alpha(x)\right]^{1/p}<+\infty, \quad 0<p<\infty.$$

Как известно, $L^p(B,dV_\alpha)$ при $1\le p<\infty$ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_{p,\alpha}$, а при $0<p<1$– полным метрическим пространством в метрике $\rho(f,g)=\|f-g\|_{p,\alpha}^p$.

Обозначим через $b_\alpha^p(B)=b_\alpha^p$ множество всех гармонических функций из $L^p(B,dV_\alpha)$. В следующем предложении утверждается непрерывность ρ – растяжения в пространстве b_α^p.

Предложение 1. Пусть $u\in b_\alpha^p(B)$, $p\ge 1$, и $u_\rho(x)=u(\rho x)$. Тогда $\|u_\rho - u\|_{p,\alpha}\to 0$ при $\rho\to 1-0$.

Доказательство. Используя выражение для элемента объема $dV(x)$ в полярных координатах

$$dV(x)=nV(B)r^{n-1}\,dr\,d\sigma(\zeta) \tag{4}$$

(см. [2]), для любого числа $\delta\in(0,1)$ будем иметь:

$$\begin{aligned}\|u_\rho-u\|_{p,\alpha}^p\le \int_{|x|<\delta} |u(\rho x)-u(x)|^p\,dV_\alpha(x)+\\ +2^p nV(B)\int_\delta^1\left\{\int_S (|u(\rho r\zeta)|^p+|u(r\zeta)|^p)d\sigma(\zeta)\right\} r^{n-1}\left(1-r^2\right)^\alpha dr\end{aligned} \tag{5}$$

с учетом элементарного неравенства $(a+b)^p\le 2^p(a^p+b^p)$, где $a>0$, $b>0$. Ввиду того, что функция $|u(x)|^p$ – субгармонична, ее среднее по сфере

$$m(\rho)=\int_S |u(\rho r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ρ, поэтому $m(\rho)\le m(1)$. Отсюда и из (5) следует

$$\|u_\rho-u\|_{p,\alpha}^p\le \int_{|x|<\delta} |u(\varrho x)-u(x)|^p\,dV_\alpha(x)+2^{p+1}\int_{\delta|x|<1} |u(x)|^p\,dV_\alpha(x),$$

откуда видно, что выбрав число δ, а затем ρ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой. □

Как известно, всякую функцию, гармоническую в окрестности $\overline{B}$, можно равномерно аппроксимировать на $\overline{B}$ гармоническими полиномами, поэтому из предложения 1 получаем следующее

Следствие 1. Гармонические полиномы плотны в $b_\alpha^p(B)$.

При фиксированном $x\in B$ отображение $u\mapsto u(x)$ является линейным функционалом в $b_\alpha^p(B)$. Как следует из следующего предложения, этот функционал непрерывен.

Предложение 2. Для всякой функции $u\in b_\alpha^p(B)$, $p\ge 1$, и любой точки $x\in B$

$$|u(x)|\le \frac{2^{n/p}}{\left(1-|x|\right)^{(n-1)/p}}\left(nV(B)\int\limits_{(1+|x|)/2}^{1} r^{n-1}\left(1-r^2\right)^{\alpha}dr\right)^{-1/p}\|u\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Следующая оценка для ядра Пуассона (1) очевидна:

$$P(x,\zeta)=\frac{1-|x|^2}{|\zeta-x|^n}\le\frac{1+|x|}{\left(1-|x|\right)^{n-1}}\le\frac{2}{\left(1-|x|\right)^{n-1}}. \tag{6}$$

Пусть $x\in B$ и $|x|<R<1$. В силу (6) и субгармоничности функции $|u(Rx)|^p$ в окрестности шара $\overline{B}$ имеем:

$$|u(Rx)|^p\le\int\limits_S|u(R\zeta)|^p\,P(x,\zeta)\,d\sigma(\zeta)\le\frac{2}{\left(1-|x|\right)^{n-1}}\int\limits_S\left|u(R\zeta)\right|^p d\sigma(\zeta). \tag{7}$$

Пусть $x=r\zeta$, где $r=|x|,\zeta\in S$. Из (4) с учетом того, что среднее $M(R)=\int\limits_S|u(R\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)$ является неубывающей величиной от R, будем иметь:

$$\begin{aligned}&nV(B)\int\limits_R^1 r^{n-1}\left(1-r^2\right)^{\alpha}dr\int\limits_S|u(R\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\le\\&\le nV(B)\int\limits_R^1\int\limits_S|u(t\zeta)|^p\,r^{n-1}\left(1-r^2\right)^{\alpha}dr\,d\sigma(\zeta)=\\&=\int\limits_{R<|x|<1}|u(x)|^p\left(1-|x|^2\right)^{\alpha}dV(x)\le\|u\|_{p,\alpha}^p.\end{aligned} \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует $|u(Rx)|^p\le\frac{2}{\left(1-|x|\right)^{n-1}}\left(nV(B)\int\limits_R^1 r^{n-1}\left(1-r^2\right)^{\alpha}dr\right)^{-1}\|u\|_{p,\alpha}^p$.

Сделав замену переменной $Rx\mapsto x$, получим

$$|u(x)|\le\frac{2^{1/p}}{\left(R-|x|\right)^{(n-1)/p}}\left(nV(B)\int\limits_R^1 r^{n-1}\left(1-r^2\right)^{\alpha}dr\right)^{-1/p}\|u\|_{p,\alpha}.$$

Взяв $R=(1+|z|)/2$, получим наше утверждение. □

Предложение 3. Для каждого $1\le p<\infty$ подпространство $b_\alpha^p(B)$ замкнуто в $L^p(B,dV_\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\|u_j-u\|_{p,\alpha}\to 0$ при $j\to\infty$, где u_j – последовательность из $b_\alpha^p(B)$, а $u\in L^p(B,dV_\alpha)$. Нужно доказать, что u эквивалентна некоторой функции, гармонической в B.

Пусть K – компактное подмножество B. Из Предложения 2 следует, что существует константа $C\equiv C(K,p,\alpha)$ такая, что $\max\limits_{x\in K}|u(x)|\le C\|u\|_{p,\alpha}$ для всех $u\in b_\alpha^p(B)$. Следовательно, $|u_j(x)-u_k(x)|\le C\|u_j-u_k\|_{p,\alpha}$ для любых

$x \in K$ и j,k. Поскольку u_j фундаментальна в $b_\alpha^p(B)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции v, гармонической в B. Помимо этого, $u_j \to u$ в $L^p(B, dV_\alpha)$. По теореме Рисса, существует подпоследовательность u_j, которая поточечно сходится к u почти всюду в B. Итак, $u = v$ почти всюду в B, поэтому $u \in b_\alpha^p(B)$. □

Следствие 2. $b_\alpha^p(B)$ является банаховым пространством.

Воспроизводящее ядро. Из следствия 2 при $p = 2$ получаем, что $b_\alpha^2(B)$ является гильбертовым пространством с внутренним произведением $\langle u,v \rangle = \int\limits_B u\overline{v}\, dV_\alpha$. Как следует из предложения 2, при всяком $x \in B$ отображение $u \mapsto u(x)$ является ограниченным линейным функционалом в $b_\alpha^2(B)$. Поэтому существует единственная функция $R_\alpha(x,\cdot) \in b_\alpha^2(B)$ такая, что $u(x) = \langle u, R_\alpha(x,\cdot) \rangle$. Рассуждения, аналогичные проводимым в [1], показывают, что R_α вещественна, поэтому

$$u(x) = \int\limits_B u(y) R_\alpha(x,y)\, dV_\alpha(y) \qquad (9)$$

для всякой $u \in b_\alpha^2(B)$. Функция R_α называется *воспроизводящим ядром* для шара B. Для построения R_α предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. Если $m \neq k$, то $H_m(\boldsymbol{R}^n)$ ортогонально к $H_k(\boldsymbol{R}^n)$ в $b_\alpha^2(B)$.

Доказательство. Пусть $p \in H_m(\boldsymbol{R}^n)$, $q \in H_k(\boldsymbol{R}^n)$ и $x = r\zeta$, где $r = |x|$, $\zeta \in S$. По формуле (4), с учетом однородности p и q имеем:

$$\int\limits_B p(x)\overline{q}(x)\, dV_\alpha(x) = nV(B)\int\limits_0^1 r^{n-1}\left(1-r^2\right)^\alpha dr \int\limits_S p(r\zeta)\overline{q}(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) =$$

$$= nV(B)\int\limits_0^1 r^{p+q+n-1}\left(1-r^2\right)^\alpha dr \int\limits_S p(\zeta)\overline{q}(\zeta)\, d\sigma(\zeta) = 0.$$

Последнее равенство следует из ортогональности сферических гармоник разных степеней. □

Теорема 1. Если $x, y \in B$, то

$$R_\alpha(x,y) = \frac{2}{nV(B)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\alpha+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\alpha+1)} Z_m(x,y). \qquad (10)$$

Ряд в правой части (10) сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^{2n} \mid |x||y| \leq q,\ 0 < q < 1\}$, в частности на $K \times \overline{B}$, где K произвольное компактное подмножество B.

Доказательство. Отметим, что в (10) предполагается, что зональные гармоники Z_m гармонически продолжены на $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$. Пусть $x = r\zeta$, $y = \rho\eta$, где $\zeta, \eta \in S$. Учитывая, что функция $Z_k(x,y)$ однородна по обоим переменным, получим

$$|Z_k(x,y)| = r^k \rho^k \, |Z_k(\zeta,\eta)| \le r^k \rho^k h_k, \tag{11}$$

где h_k – размерность пространства $H_k(S)$. Нужная сходимость следует из (11) с учетом оценки (3) для h_k и формулы Стирлинга. Обозначив через $F(x,y)$ правую часть (10), получаем, что $F(x,\cdot)$ является ограниченной гармонической функцией на B при каждом $x \in B$. В частности, $F(x,\cdot) \in b^2_\alpha(B)$ при каждом $x \in B$. Зафиксируем $x \in B$. Напомним, что зональные гармоники являются воспроизводящими ядрами для пространств $H_m(\boldsymbol{R}^n)$. Поэтому для $u \in H_m(\boldsymbol{R}^n)$

$$u(x) = \int_S u(\zeta) Z_m(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta) \tag{12}$$

при каждом $x \in \boldsymbol{R}^n$. Проинтегрировав подынтегральное выражение по мере dV_α получим аналог (12):

$$\int_B u(y) Z_m(x,y)\, dV_\alpha(y) = nV(B) \int_0^1 r^{n-1} \left(1-r^2\right)^\alpha \int_S u(r\zeta) Z_m(x, r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, dr =$$

$$= nV(B) \int_0^1 r^{n+2m-1} \left(1-r^2\right)^\alpha \int_S u(\zeta) Z_m(x,\zeta)\, d\sigma(\zeta)\, dr = \frac{nV(B)}{2} u(x) \int_0^1 t^{\frac{n}{2}+m-1} \left(1-t\right)^\alpha dt =$$

$$= \frac{nV(B)}{2} \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+m)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+m+\alpha+1)} u(x).$$

Учитывая ортогональность в $b^2_\alpha(B)$ однородных полиномов различных степеней, заключаем, что $u(x) = \langle u, F(x,\cdot) \rangle$ для всякого гармонического полинома u. Поскольку функционал «значение в точке», как это следует из предложения 2, является непрерывным в $b^2_\alpha(B)$ и гармонические полиномы плотны в $b^2_\alpha(B)$ (см. следствие 1), получаем, что $u(x) = \langle u, F(x,\cdot) \rangle$ для всех $u \in b^2_\alpha(B)$. Это и означает, что F является воспроизводящим ядром. □

Нетрудно заметить, что интегральное представление (9) справедливо не только для $b^2_\alpha(B)$, а также для любой функции $u \in b^p_\alpha(B)$.

Теорема 2. Пусть $u \in b^p_\alpha(B)$, $1 \le p < +\infty$. Тогда

$$u(x) = \int_B u(y) R_\alpha(x,y)\, dV_\alpha(y) \,. \tag{13}$$

Правая часть в (13) определяет ортогональное проектирование из $L^2(B, dV_\alpha)$ на подпространство $b^2_\alpha(B)$, т. е. справедлива следующая

Теорема 3. Оператор

$$Q_\alpha[u](x) = \int_B u(y) R_\alpha(x,y)\, dV_\alpha(y), \quad u \in L^2(B, dV_\alpha), \quad x \in B,$$

является ортогональным проектором из $L^2(B, dV_\alpha)$ на $b_\alpha^2(B)$.

Доказательство. Так как $L^2(B, dV_\alpha) = b_\alpha^2(B) \oplus \left(b_\alpha^2(B)\right)^\perp$, то всякая функция $u \in L^2(B, dV_\alpha)$ имеет вид $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in b_\alpha^2(B)$ и $u_2 \in \left(b_\alpha^2(B)\right)^\perp$. Следовательно, $Q_\alpha[u] = Q_\alpha[u_1] + Q_\alpha[u_2]$, где $Q_\alpha[u_1] = u_1$, по теореме 2. С другой стороны,

$$Q_\alpha[u_2](x) = \int_B u_2(y) R_\alpha(x, y)\, dV_\alpha(y) = \left\langle u_2, R_\alpha(x, \cdot)\right\rangle_\alpha = 0,$$

Так как, согласно теореме 1, при фиксированной точке $x \in B$ функция $R_\alpha(x, y)$ гармонична по y в области, содержащей $\overline{B}$, а u_2 ортогональна к $b_\alpha^2(B)$. Итак, $Q_\alpha[u] = u_1$, т. е. Q_α – ортогональный проектор $L^2(B, dV_\alpha) \mapsto b_\alpha^2(B)$.

Кафедра теории функций *Поступила 13.04.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Axler Sh., Bourdon P., Ramey W.** Harmonic function theory New York, Springer-Verlag, Inc., 2001.
2. **Rudin W.** Real and complex analysis. New York, McGraw-Hill, 1987.

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ b_α^p ԿՇՌԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ներմուծվում են $B \subset \boldsymbol{R}^n$ միավոր գնդում հոլոմորֆ ֆունկցիաների $b_\alpha^p(B)$ կշռային տարածությունններ: Կառուցվում է K_α վերարտադրող կորիզ, որի միջոցով $b_\alpha^p(B)$-ին պատկանող ֆունկցիաների համար արտածվում է ինտեգրալային բանաձև:

A. I. PETROSYAN

WEIGHTED CLASSES OF HARMONIC FUNCTIONS b_α^p

Summary

In the paper the weighted spaces $b_\alpha^p(B)$ of functions harmonic in the unit ball $B \subset \boldsymbol{R}^n$ are introduced. The reproducing kernel K_α is constructed by means of which for functions belonging to $b_\alpha^p(B)$ the integral representation is obtained.