ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

А. А. МАМИКОНЯН

АТТРАКТОРЫ ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

В данной работе изучается поведение траекторий решений начально-краевой задачи для одного класса уравнений типа Соболева

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+Bu=0, \\ u\big|_{t=0}=u_0, \\ u\big|_{\Sigma}=0, \end{cases}$$

где нелинейные операторы A и B имеют следующий вид:

$$Au=-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_j(x,u,\nabla u),\quad Bu=-\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}b_j(x,u,\nabla u).$$

При некоторых условиях, которым удовлетворяют функции $a_j(x,u,\nabla u)$ и $b_j(x,u,\nabla u)$, доказывается существование аттрактора полугруппы операторов $\{S_t,t\geq 0\}$, порожденной этой задачей, а также его ограниченность в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Одной из основных проблем теории эволюционных дифференциальных уравнений является изучение поведения траекторий их решений при $t\to+\infty$. Когда операторы A и B линейные, поведение этих траекторий зависит от спектра пространственной части такого уравнения. В случае нелинейных эволюционных уравнений указанная проблема значительно сложнее. При исследовании таких уравнений важную роль играют аттракторы.

В работе [1] изучаются аттракторы эволюционных уравнений вида $\partial_t u = Au$ (параболические уравнения с монотонной главной частью, уравнения типа систем химической кинетики и др.). Доказано существование аттракторов, порожденных этими уравнениями, а также изучены их свойства. В работах [2,3] изучены аттракторы уравнений того же типа с дифференциальным оператором A общего вида. В работе [3] кроме этого приведен пример модельного уравнения порядка $2m$, часто встречающегося в приложениях. Доказано существование аттрактора, его ограниченность и компактность в пространстве $L_2(\Omega)$. В работе [4] рассмотрены аттракторы задачи

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+Bu=0, \\ u\big|_{t=0}=u_0, \\ u\big|_{\Sigma}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где A – линейный, а B – нелинейный дифференциальные операторы.

Пусть $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ. Обозначим $\Sigma=[0,T]\times\Gamma$, $T>0$. В данной работе изучается поведение траекторий решений задачи (1) с нелинейными дифференциальными операторами A и B следующего вида:

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_j(x,u,\nabla u), \quad Bu=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}b_j(x,u,\nabla u).$$

Пусть функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$, $\xi=(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n)$, непрерывны по переменным x,ξ, непрерывно дифференцируемы по ξ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left|a_i(x,\xi)\right|\le c_1\sum_{i=0}^{n}\left|\xi_i\right|, \quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_j(x,\xi)\eta_i\ge c_2\sum_{i=0}^{n}\xi_i\eta_i, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial\xi_j}\eta_i\eta_j\ge c_3\sum_{i=1}^{n}\eta_i^{\,2}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial\xi_j}\right|\le c_4, \quad i,j=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$\left|b_j(x,\xi)\right|\le c_5\sum_{i=0}^{n}\left|\xi_i\right|, \quad j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial b_i(x,\xi)}{\partial\xi_j}\right|\le c_6, \quad i,j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Имеет место следующая

Теорема 1 (см. [5]). Пусть функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$ непрерывны по переменным x,ξ, непрерывно дифференцируемы по ξ и удовлетворяют условиям (2), (4)–(7). Тогда задача (1) имеет единственное решение в пространстве $L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ для любого $u_0\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Пусть X – некоторое банахово пространство. Через $L_p(0,\infty,X)$ обозначим пространство функций $u(t,x)$, которые для каждого числа $T\ge0$ принадлежат пространству $L_p(0,T,X)$.

Полугруппой, отвечающей уравнению (1), называется семейство операторов $\{S_t,t\ge0\}$, $S_t:X\to X$, причем $S_tu_0=u(t)$, где $u(t)$ – решение задачи (1).

При этом предполагается, что задача (1) однозначно разрешима. Максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$ или уравнения (1) называется такое замкнутое ограниченное множество $\aleph \subset X$, которое имеет свойства:

1) инвариантность, т. е. $S_t\aleph = \aleph \quad \forall t \geq 0$,

2) свойство притяжения, т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ расстояние $dist(S_t B, \aleph) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для краткости в дальнейшем максимальные аттракторы будем называть просто аттракторами. Имеет место следующая теорема [1, 7].

Теорема А. Пусть полугруппа $\{S_t\}$ удовлетворяет условиям:

1) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена, т. е. $\forall R > 0 \ \exists C(R)$ такое, что $\|S_t u\| \leq C$, если $\|u\| \leq R, \ \forall t \in [0, +\infty)$;

2) существует ограниченное (компактное) в X поглощающее множество B_0, т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое число T, что при $t \geq T \ S_t B \subset B_0$;

3) операторы $S_t : X \to X$ непрерывны при $t \geq 0$.

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный (компактный) в X максимальный аттрактор.

В дальнейшем нам понадобится следующее дифференциальное неравенство. Пусть для неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на $[t_0, t_1]$ функции $y(t)$ выполнено неравенство $y'(t) + \gamma\, y(t) \leq h(t)$, где $h(t)$ является неотрицательной и непрерывной функцией на $[t_0, t_1]$, а $\gamma \geq 0$ – константа. Тогда имеет место оценка

$$y(t) \leq \int_{t_0}^{t_1} e^{-\gamma(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau + y(0) e^{-\gamma t}. \tag{8}$$

Лемма 1 (Гронуолл). Пусть $y(t)$ и $a(t)$ – неотрицательные функции, $a \in L_1[t_0, t_1]$, и выполнено неравенство $y(t) \leq C + \int_{t_0}^{t_1} y(s) a(s)\, ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1$, где C – константа. Тогда при $t_0 \leq t \leq t_1$ имеет место неравенство $y(t) \leq C \exp \int_{t_0}^{t_1} a(s)\, ds.$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2)–(7), а также для любого $u \in L_2(0, \infty, \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ имеет место *условие эллиптичности*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} b_j(x, u, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \geq c_7 \|u(t)\|^2 - k(t), \tag{9}$$

где $k(t)$ – непрерывная, неотрицательная на $[0, +\infty)$ функция, для которой $\int_0^{+\infty} e^{\frac{2c_7}{c_2} t} k(t)\, dt = R_0 < +\infty$. Тогда решение задачи (1) удовлетворяет следующему неравенству:

$$\|u(t)\| = e^{-\gamma_1 t}\left(\|u_0\|^2 + \gamma_2 \int_0^t e^{\gamma_1 \tau} k(t) d\tau\right), \qquad (10)$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ – константы, зависящие от c_2 и c_7.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1). Тогда $(Au',u)+(Bu,u)=0$, т.е. $\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_j(x,u',\nabla u')\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} b_j(x,u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = 0.$
Из неравенств (3) и (9) получаем

$$c_2 \sum_{i=0}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial u'}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx + c_7\|u(t)\|^2 \leq k(t), \quad \frac{1}{2}c_2\frac{\partial}{\partial t}\|u(t)\|^2 + c_7\|u(t)\|^2 \leq k(t).$$

Пользуясь неравенством (8), если взять $y(t)=\|u(t)\|^2$, $\gamma = \frac{2c_7}{c_2}$, $h(t)=\frac{2k(t)}{c_2}$, будем иметь $\|u(t)\|^2 \leq e^{-\frac{2c_7}{c_2}t}\left(\|u_0\|^2 + \frac{2}{c_2}\int_0^t e^{\frac{2c_7}{c_2}\tau}k(\tau)d\tau\right)$, т.е. получаем неравенство (10), где $\gamma_1 = \frac{2c_7}{c_2}$, $\gamma_2 = \frac{2}{c_2}$.

Лемма доказана.

Замечание 1. Из доказанной леммы следует равномерная ограниченность полугруппы $\{S_t\}$. Действительно, пусть $\|u_0\| \leq R$ и $t \geq 0$, тогда

$$\|S_t u_0\|^2 = \|u(t)\|^2 \leq e^{-\gamma_1 t}\left(\|u_0\|^2 + \gamma_2\int_0^t e^{\gamma_1\tau}k(\tau)d\tau\right) \leq R^2 + \gamma_2 R_0 = C(R).$$

Лемма 3. Полугруппа $\{S_t\}$ имеет ограниченное в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ поглощающее множество.

Доказательство. Обозначим $B_0 = \left\{u \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega);\ \|u\| \leq R_0\right\}$. Докажем, что B_0 является поглощающим множеством, т.е. для каждого ограниченного множества $B \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ существует такое постоянное число $T>0$, что $\forall t \geq T \ \ S_t B \subset B_0$. Действительно, пусть $B \subset \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – любое ограниченное множество, $B = \left\{u \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega);\ \|u\| \leq R < +\infty\right\}$.

Докажем, что $S_t B \subset B_0$. Если $u \in S_t B$, то существует $u_0 \in B$ такое, что $u(t)$ является решением задачи (1) с начальным значением $u_0 \in B$, т.е. $\|u_0\| \leq R$, следовательно,

$$\|u(t)\|^2 = \|S_t u_0\|^2 \leq e^{-\gamma_1 t}\left(\|u_0\|^2 + \gamma_2\int_0^t e^{\gamma_1\tau}k(\tau)d\tau\right) \leq e^{-\gamma_1 t}\left(R^2 + \gamma_2 R_0\right).$$

Теперь, чтобы $e^{-\gamma_1 t}(R^2+\gamma_2 R_0)\le R_0^2 \quad \forall t\ge T$, достаточно взять $T=\dfrac{1}{\gamma_1}\ln\left(\dfrac{R^2+\gamma_2 R_0}{R_0^2}\right)$. Тогда получаем, что $\forall t\ge T \quad u(t)\in B_0$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Операторы $S_t:\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\to\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ непрерывны.

Доказательство. Пусть имеем $u_1^0,u_2^0\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$. Решение задачи (1) представим в виде $u(t)=u_0-\int\limits_0^t Gu(s)ds$, где $Gu=-A^{-1}Bu$ является липшиц-непрерывным оператором (см. [6]). Для фиксированного t оценим норму:

$$\left\|S_t u_1^0-S_t u_2^0\right\|=\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|=\left\|u_1^0-u_2^0+\int\limits_0^t\big(Gu_1(s)-Gu_2(s)\big)ds\right\|\le\left\|u_1^0-u_2^0\right\|+$$

$$+\left\|\int\limits_0^t\big(Gu_1(s)-Gu_2(s)\big)ds\right\|\le\left\|u_1^0-u_2^0\right\|+\int\limits_0^t M\left\|u_1(s)-u_2(s)\right\|ds.$$

Далее, если применим лемму Гронуолла, взяв $y(t)=\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|$, получим

$$\left\|u_1(t)-u_2(t)\right\|\le\left\|u_1^0-u_2^0\right\|e^{\int\limits_0^t Mds}=\left\|u_1^0-u_2^0\right\|e^{tM}.$$

Лемма доказана.

Из теоремы A, замечания 1 и лемм 3, 4 следует

Т е о р е м а 2. Пусть функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$ непрерывны по переменным x,ξ, непрерывно дифференцируемы по ξ и удовлетворяют условиям (2)–(8). Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1), обладает аттрактором, ограниченным в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Кафедра теории оптимального управления и приближенных методов

Поступила 19.04.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабин А.В., Вишик М.И.** – УМН, 1983, т. 38, № 4 (232), с. 133–185.
2. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1992, т. 27, № 4, с. 59–69.
3. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1996, т. 31, № 3, с. 5–29.
4. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1994, т. 29, № 5, с. 27–37.
5. **Мамиконян А.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2006, № 2, с. 33–40.
6. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
7. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.

Հ. Ա. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ

ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՏԻՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԱՌԱՋԱՑՐԱԾ ԿԻՍԱԽՄԲԵՐԻ ԱՏՐԱԿՏՈՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում է Սոբոլևի տիպի մի դասի հավասարումների համար սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդրի լուծումների հետագծերի վարքը.

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \\ u\big|_{\Sigma} = 0, \end{cases}$$

որտեղ A-ն և B-ն ոչ գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են և ունեն հետևյալ տեսքը. $Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(x, u, \nabla u)$, $Bu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_j(x, u, \nabla u)$:

Որոշ պայմանների դեպքում, որոնց բավարարում են $a_j(x, u, \nabla u)$ և $b_j(x, u, \nabla u)$ ֆունկցիաները, ապացուցվում է այդ խնդրով ծնված $\{S_t, t \geq 0\}$ կիսախմբի ատրակտորի գոյությունը, ինչպես նաև նրա սահմանափակությունը $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ տարածությունում:

H. A. MAMIKONYAN

ATTRACTORS OF SEMIGROUPS GENERATED BY AN EQUATION OF SOBOLEV TYPE

Summary

In this paper the behavior of solutions of the following initial boundary value problem for a class of Sobolev type equations is considered.

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \\ u\big|_{\Sigma} = 0, \end{cases}$$

where A and B are nonlinear operators of the following form:

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(x, u, \nabla u), \quad Bu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_j(x, u, \nabla u).$$

It's proved that when functions $a_j(x, u, \nabla u)$ and $b_j(x, u, \nabla u)$ specify some conditions, the semigroup generated by this equation has attractor, which is bounded in $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.