ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 519.21

МЕЙДИ КАРИМ

СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ УОРИНГА

Распределения Уоринга широко используются в качестве частотных распределений количества появления событий в биомолекулярных системах большой размерности. В настоящей заметке получены условия сходимости моментов распределений Уоринга с точки зрения правильно меняющихся функций. Предложен способ вычисления моментов и представлены результаты для среднего значения и дисперсии.

1. Существование моментов. Распределения Уоринга $\{p_n(p,q)\}$,

$$p_0(p,q)=\left(1+\sum_{n\ge 1}\prod_{K=1}^{n}\frac{p+K-1}{q+K}\right)^{-1},$$
$$p_n(p,q)=p_0\prod_{K=1}^{n}\frac{p+K-1}{q+K},\quad n=1,2,..., \tag{1}$$

при ограничениях

$$0<p<q<+\infty, \tag{2}$$

широко используются в качестве частотных распределений количества возникновения различных событий в ряде биомолекулярных систем большой размерности. Информацию можно почерпнуть из [1].

Известно [2], что

$$p_0=1-\frac{p}{q}=p_0(p,q). \tag{3}$$

Обозначим

$$\rho=q-p+1. \tag{4}$$

Говорят, что $\{p_n\}$ правильно меняется на бесконечности с показателем $(-\rho)$, $\rho\in R^+=(0,+\infty)$, если

$$p_n=(n+1)^{-\rho}\cdot L(n),\quad n=1,2,..., \tag{5}$$

где $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{L(sn)}{L(n)}=1$ для любого $s=2,3,...$

В [3] число $(-\rho)$ интерпретируется как показатель правильного изменения распределения Уоринга $\{p_n(p,q)\}$.

Для распределений Уоринга асимптотическое поведение $L(n)$ в (5), где $n \to +\infty$, рассмотрено в [2]. Показано, что существует предел $L = \lim\limits_{n \to +\infty} L(n) \in R^+$, но простого выражения для L не найдено.

Лемма 1.

$$L = (\rho - 1)\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(\rho)}. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Говорят, что определенные на R^+ положительные функции f и g асимптотически эквивалентны, если $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. Представим эквивалентность в виде $f(t) \approx g(t),\ t \to +\infty$. Согласно (1) и (3) запишем $p_n(p,q),\ n = 1,2,...$, в виде

$$p_n(p,q) = (\rho - 1)\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q+n} \cdot \frac{\prod\limits_{m=1}^{n-1} \frac{m}{q+m}}{\prod\limits_{m=1}^{n-1} \frac{m}{p+m}}. \tag{7}$$

Применим к (7) следующую формулу (см. [4], 8.322, стр. 936)

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x}{x} \prod_{K=1}^{n} \frac{K}{x+K},\quad x \in R^+,$$

или в силу $x \cdot \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ формулу $\prod\limits_{K=1}^{n} \frac{K}{x+K} \approx \frac{\Gamma(x+1)}{n^x},\ n \to +\infty,\ x \in R^+$. При $n = 1,2,...$ получим

$$p_n \approx (\rho - 1)\frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q+n} \cdot \frac{1}{n^{q-p}} \cdot \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+1)} \approx \frac{\rho - 1}{n^\rho} \cdot \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)},\ n \to +\infty, \tag{8}$$

что влечет за собой $L(n) \approx n^{-\rho} p_n(p,q) \approx (\rho - 1)\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)},\ n \to +\infty$. Обозначим $q_n = p_n + p_{n+1} + ...,\ n = 1,2,...$

Следствие 1.

$$q_n \approx \frac{1}{n^{\rho - 1}} \cdot \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)},\ n \to +\infty. \tag{9}$$

Эквивалентность (9) следует из (8).

Для произвольного $\nu \in R^+$ обозначим через $m_\nu(p,q) = \sum\limits_{n \ge 1} n^\nu p_n(p,q)$ момент порядка ν распределения Уоринга $\{p_n(p,q)\}$.

Следствие 2.

$$m_\nu(p,q) \begin{cases} < +\infty, & \text{если} \quad 0 < \nu < \rho - 1, \\ = +\infty, & \text{если} \quad \rho - 1 \le \nu < +\infty. \end{cases} \tag{10}$$

Формула (10) вытекает из следствия 1.

В связи с (10) возникает задача явного вычисления моментов $m_\nu(p,q)$, когда $0 < p < \rho - 1$.

Ниже в пункте 2 предложен способ вычисления $m_\nu(p,q)$ при $\nu = 1,2,...,[\rho-1]$ ($[x]$ означает целую часть числа x), если ρ не является целым числом, и при $\nu = 1,2,...,\rho$, если ρ целое число.

2. Вычисление среднего значения и дисперсии. Способ вычисления моментов распределений Уоринга основан на *двух простых идеях*. Первую легко объяснить на примере вычисления *среднего значения*. Пусть

$$0 < p < q-1 < +\infty \text{ (или } 0 < p < +\infty \text{ и } 2 < \rho < +\infty). \tag{11}$$

С помощью формул (1) и (3) представим $p_{n+1}(p,q-1)$, $n = 0,1,2,...$, в виде

$$p_{n+1}(p,q-1) = \left(1 - \frac{p}{q-1}\right)\frac{1}{q}(p+n)\prod_{K=1}^{n}\frac{p+K-1}{q+K}. \tag{12}$$

Чтобы получить равенство (12), из произведения в правой части (1) вынесены из-под символа произведения последний множитель числителя и первый множитель знаменателя. В силу (1), (3) и (12) при $n = 0,1,2,...$ получим равенство

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)p_{n+1}(p,q-1) = \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{1}{q}(p+n)p_n(p,q). \tag{13}$$

Принимая во внимание формулу (3) и условия нормировки

$$\sum_{n\ge 0} p_n(p,q-1) = \sum_{n\ge 0} p_n(p,q) = 1,$$

которые имеют место для распределений Уоринга $\{p_n(p,q-1)\}$ и $\{p_n(p,q)\}$, суммируя обе стороны (13) по $n = 1,2,...$, приходим к равенству

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\frac{p}{q-1} = \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{p}{q} + \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{1}{q}\sum_{n\ge 1} np_n(p,q).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{p}{q-1} = \left(1-\frac{p}{q-1}\right)m_1(p,q),$$

что позволяет сформулировать следующий результат.

Предложение 1. Если имеет место условие (11), то

$$0 < m_1(p,q) = \frac{p}{q-p-1} = \frac{p}{\rho-2} < +\infty. \tag{14}$$

Аналогично можно посчитать *дисперсию* распределения Уоринга. Действительно, пусть

$$0 < p < q-2 < +\infty \text{ (или } 0 < p < +\infty \text{ и } 3 < \rho < +\infty). \tag{15}$$

Умножая обе стороны (13) на n и суммируя по $n = 1,2,...$, приходим к равенству

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\ge 1} np_{n+1}(p,q-1) = \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{p}{q}m_1(p,q) + \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{1}{q}m_2(p,q). \tag{16}$$

При вычислении левой части (16) воспользуемся второй идеей: число n представляем в виде $(n+1)-1$. Из (3) и (14) мы получим, что

$$\sum_{n\ge 1} np_{n+1}(p,q-1) = \sum_{n\ge 2} np_n(p,q-1) - \sum_{n\ge 2} p_n(p,q-1) =$$

$$= m_1(p,q-1) - \sum_{n\geq 1} p_n(p,q-1) = m_1(p,q-1) - (1 - p_0(p,q-1)) =$$

$$= \frac{p}{q-p-2} - \frac{p}{q-1} = \frac{p(p+1)}{(p-q-2)(q-1)}.$$

Отсюда выводим

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 1} np_{n+1}(p,q-1) = \frac{q-p}{q-p-2}\cdot\frac{p}{q-1}\cdot\frac{p+1}{q}. \tag{17}$$

Из формул (14), (16) и (17) следует равенство

$$m_2(p,q) = \frac{p}{q-p-1}\left(\frac{(q-p)(p+1)}{q-p-2} - 2\right) = m_1(p,q)\frac{q+p}{q-p-2}. \tag{18}$$

Любопытно отметить, что при условии (15), если $q-p \downarrow 2$ (что эквивалентно $\rho \downarrow 2$), то $m_1(p,q)$ остается конечным, но из-за (18) $m_2(p,q) \uparrow +\infty$.

Из (14) и (18) можно получить формулу для дисперсии:

$$\begin{aligned} m_2(p,q) - (m_1(p,q))^2 &= m_1(p,q)\left(\frac{q+p}{q-p-2} - m_1(p,q)\right) = \\ &= m_1(p,q)\frac{(q-p)(q-1)}{(q-p-1)(q-p-2)} = \frac{p(q-p)(q-1)}{(q-p-1)^2(q-p-2)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Это равенство позволяет сформулировать следующий результат.

Предложение 2. Если имеет место условие (15), то дисперсия распределения Уоринга равна: $\sigma^2(p,q) = \dfrac{(\rho-1)p(p+\rho-2)}{(\rho-2)^2(\rho-3)}$.

3. Моменты порядка $s = 3, 4$ Предложим способ вычисления моментов, который уже был частично продемонстрирован на примере определения среднего значения и дисперсии. Предположим, что

$$0 < p < q - s < +\infty \text{ (или } 0 < p < +\infty \text{ и } s+1 < \rho < +\infty\text{)}, \tag{20}$$

где $s \geq 3$ – целое число.

Умножая обе части (13) на n^{s-1} и суммируя по $n = 1,2,\ldots$, приходим к равенству

$$\left(1-\frac{p}{q+1}\right)\frac{1}{q}m_s(p,q) = \left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 1} n^{s-1}p_{n+1}(p,q-1) - \left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{p}{q}m_{s-1}(p,q). \tag{21}$$

Для получения *рекуррентного* соотношения для моментов первый член правой части (21) должен быть видоизменен. Используем вторую идею, представленную ранее. Запишем n^{s-1} в виде

$$n^{s-1} = ((n+1)-1)^{s-1} = \sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-1}{r}(-1)^{s-r-1}(n+1)^r,$$

где $\dbinom{s-1}{r} = \dfrac{(s-1)!}{r!(s-r-1)!}$, $r = 0,1,\ldots,s-1$, – так называемые биномиальные коэффициенты. Тогда

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 1} n^{s-1} p_{n+1}(p,q-1)=\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 2}\left(\sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-1}{r}(-1)^{s-r-1}n^r\right)p_n(p,q-1)=$$

$$=\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-r}{r}(-1)^{s-r-1}(m_r(p,q-1)-p_n(p,q-1))= \qquad (22)$$

$$=\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-r}{r}(-1)^{s-r-1}m_r(p,q-1),$$

так как $\sum_{r=0}^{s-1}\binom{s-1}{r}(-1)^{s-r-1}=(1-1)^{s-1}=0$. В (22) следует определить $m_0(p,q-1)$.

Из (3) получаем $m_0(p,q-1)=\sum_{n\geq 1} p_n(p,q-1)=1-p_0(p,q-1)=\dfrac{p}{q-1}$. Поэтому (22) можно переписать:

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{n\geq 1} n^{s-1} p_{n+1}(p,q-1)=(-1)^{s-1}\left(1-\frac{p}{q}\right)\frac{p}{q-1}+\left(1-\frac{p}{q}\right)m_{s-1}(p,q-1)+$$

$$+\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{r=1}^{s-2}\binom{s-1}{r}(-1)^{s-r-1}m_r(p,q-1).$$

Подставляя это равенство в (21), приходим к следующему *рекуррентному* равенству для моментов:

$$\left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{1}{q}m_s(p,q)=$$

$$=(-1)^{s-1}\left(1-\frac{p}{q}\right)\frac{p}{q-1}+\left(\left(1-\frac{p}{q}\right)m_{s-1}(p,q-1)-\left(1-\frac{p}{q-1}\right)\frac{p}{q}m_{s-1}(p,q)\right)+$$

$$+\left(1-\frac{p}{q}\right)\sum_{r=1}^{s-2}\binom{s-1}{r}(-1)^{s-r-1}m_r(p,q-1).$$

Это рекуррентное уравнение позволяет итеративно посчитать *конечные* моменты всех целых порядков распределений Уоринга, начиная с $s=3$. (14) и (18) следует брать за начальные условия.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 23.04.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kuznetsov V.A.** – Signal Process, 2003, v. 83, № 4, p. 889–910.
2. **Astola J., Danielyan E.** – Facta Universitatis (Niš), 2006, v. 19, № 1, p. 109–131.
3. **Astola J., Danielyan E.** Regularily Varying Distributions generated by Birth-Death Process. Tampere: TICSP, 2004, Series 27, p. 1–94.
4. **Granshteyn I.S., Ryznik I.M.** Table of Integrals, Series and Products. New York and London: Academic Press, 1965.
5. **Kauffman S.A.** The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolutions. New York: Oxford University Press, 1993.
6. **Feller W.** An Introduction to Probability Theory and its Applications. V. 2, First Edition, John Wiley and Sons, 1966.

ՄԵՅԴԻ ՔԱՐԻՄ

ՈՒՈՐԻՆԳԻ ԲԱՇԽՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԵՂԱՆԱԿ

Ամփոփում

Ուորինգի բաշխումները լայնորեն օգտագործվում են մեծ չափողականության կենսամոլեկուլային համակարգերում որպես պատահույթների առաջացման քանակի հաճախականային բաշխումներ: Սույն աշխատանքում կանոնավոր փոփոխվող ֆունկցիաների տեսակետից ստացված են Ուորինգի բաշխումների մոմենտների զուգամիտության պայմաններ: Առաջարկված է մոմենտների հաշվարկի եղանակ և ներկայացված են արդյունքներ միջին արժեքի և դիսպերսիայի համար:

MEHDY KARIM

A MANNER ON THE MOMENTS' EVALUATION OF WARING DISTRIBUTIONS

Summary

In the present paper conditions on moments' convergence for Waring Distributions are obtained from the point of view of regularly varying functions. Under these conditions a *manner* on the moments' evaluation is suggested and the results for mean value and variance are presented.