ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 519.50

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ИНТУИТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИИ

Статья посвящена выяснению причин появления известных парадоксов в интуитивной теории множеств. Доказывается, что процесс образования множеств является незавершаемым, а причина появления известных парадоксов заключается в представлении процесса образования множеств как завершаемого процесса (иначе говоря, причиной появления парадоксов является отождествление понятий множества и класса). Ставится под сомнение возможность полноценной формализации интуитивной теории множеств.

В интуитивной теории множеств из каких-то объектов образуются множества (совокупности объектов), которые принимаются за объекты. Затем из имеющихся объектов образуются множества, которые, в свою очередь, принимаются за объекты и т.д. Для выяснения причин появления известных парадоксов в интуитивной теории множеств докажем, что процесс образования множеств является незавершаемым, т.е. после образования какой угодно совокупности множеств можно образовать новое множество (ниже мы приведем дополнительное пояснение относительно понятия незавершаемого процесса).

Пустое множество обозначим символом $\varnothing$, а множество всех подмножеств множества X – через 2^X. Объединение и пересечение совокупности множеств Y обозначим через $\bigcup Y$ и $\bigcap Y$ соответственно (считается $\bigcup\varnothing=\varnothing$, а $\bigcap\varnothing$ не определяется).

Теорема 1. Пусть X – множество. Тогда $2^X\notin 2^X$.

Доказательство. Предположим $2^X\in 2^X$. Тогда $2^X\subset X$. Обозначим через S множество тех элементов из 2^X, каждый из которых не является своим элементом. Так как $S\subset 2^X\subset X$, то $S\in 2^X$. В силу этого, соотношения $S\in S$ и $S\notin S$ могут выполняться лишь одновременно. Но это противоречие. Поэтому $2^X\notin 2^X$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается более общая

Теорема 2. Пусть Y – такая совокупность множеств, что $2^y\subset Y$ для каждого $y\in Y$. Тогда $Y\notin Y$.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть Y – некоторая совокупность множеств, а $X = \bigcup Y$. Тогда $Y \subset 2^X$ и, значит, $2^X \notin Y$.

Следствие 1 показывает, что процесс образования множеств является незавершаемым, а выражение «все множества» – бессмысленным. Оно опровергает укоренившееся представление о том, что процесс образования множеств является завершаемым (т. е. все множества могут быть образованы), а появление в интуитивной теории множеств известных парадоксов связано с самим интуитивным понятием множества (по этому поводу см. [1], с. 39–63; [2], стр. 224; [3], стр. 17–55; [4], стр. 357; [5], стр. 332–341; [6], стр. 348–350). На самом деле, причина появления этих парадоксов заключается в неправильном представлении о характере процесса образования множеств. При восприятии этого процесса как незавершаемого (с учетом также доказанной ниже теоремы 5) интуитивная теория множеств становится свободной от парадоксов Рассела, Кантора и Бурали–Форти (тем самым эти парадоксы перестают быть препятствием для построения теории множеств на интуитивной основе (см. [7], стр. 14)).

Объект, который используется при образовании множеств и интуитивно не воспринимается как множество, удобно формально считать множеством таким, что оно само является единственным своим элементом. Его будем называть атомом (пустое множество также является формально введенным понятием). Итак, атом есть такое множество a, что $a \in a$ и $b \notin a$ при $b \neq a$. Это понятие атома отличается от используемого в теории множеств понятия с таким же названием (см. [8], стр. 122). С введением понятия атома каждый элемент множества становится множеством, а каждое множество Y становится совокупностью множеств и к нему применимы обозначения $\bigcup Y$ и $\bigcap Y$. Подмножествами атома a являются только a и $\varnothing$, причем $\bigcup a = \bigcap a = a$. Теорема 2 и следствие 1 верны также для совокупности Y, среди элементов которой имеются атомы.

Для множества, состоящего только из элемента x, используется запись $\{x\}$, а множество, состоящее только из элементов x и y, принято записывать в виде $\{x, y\}$ и называть неупорядоченной парой. При этом считается $\{x, x\} = \{x\}$. Очевидно, множество a является атомом тогда и только тогда, когда $\{a\} = a$. Упорядоченной парой $\langle x, y\rangle$ называется множество $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ясно, что $\langle x, x\rangle = \{\{x\}\}$, а для атома a имеют место равенства $\langle a, y\rangle = \{a, \{a, y\}\}$ и $\langle a, a\rangle = a$. Если $z = \langle x, y\rangle$, то $x = \bigcup\bigcap z = \bigcap\bigcap z$ и $y = (\bigcap\bigcup z) \cup ((\bigcup\bigcup z) \setminus \bigcup\bigcap z)$. Это определение упорядоченной пары было предложено Куратовским (см. [7], стр. 67). В [5] также под упорядоченной парой понимается множество, но не уточняется какое именно и требуется лишь, чтобы из $\langle x, y\rangle = \langle u, w\rangle$ следовало $x = u$ и $y = w$.

Если множество x не является атомом, то будем считать $x \notin y$ для каждого $y \in x$ и, значит, $x \notin x$. Это соглашение вполне соответствует интуитивному понятию множества. В силу принятого соглашения отношение

«$\in$ или $=$» рефлексивно и антисимметрично. Отметим, что для построения теории множеств наличие атомов необязательно (в качестве исходного объекта можно взять только $\varnothing$).

Поскольку мы не исключаем наличие атомов, считаем нужным привести определение ординала (порядкового числа) и кардинала (кардинального числа) способом, предложенным фон Нейманом (см. [7], стр. 271; [9], стр. 109–129; [10], стр. 343–360).

Множество x называется транзитивным, если $y \subset x$ для каждого $y \in x$.

Очевидно, атом является транзитивным множеством.

Определение 1. Множество называется ординалом, если оно транзитивно, не содержит атомов и вполне упорядочено отношением «$\in$ или $=$».

Ординалами являются, например, множества $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, а также их совокупность и т. д. Если x – ординал, то $x \bigcup \{x\}$ – тоже ординал. Если x – ординал и $y \in x$, то y – тоже ординал и $y \subset x$. Если x и y – ординалы, то выполняется одно и только одно из соотношений $x = y$, $x \in y$, $y \in x$. Если x и y – ординалы и $y \subset x$, то выполняется одно и только одно из соотношений $x = y$, $y \in x$.

Для вполне упорядоченных множеств X и Y говорят, что X изоморфно Y, если существует сохраняющее порядок взаимно однозначное отображение множества X на Y (считается, что $\varnothing$ изоморфно себе).

Доказательства следующей теоремы и указанных выше свойств ординалов можно найти в [9], стр. 102–123.

Теорема 3. Каждое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому, притом единственному, ординалу.

Говорят, что множество X равномощно множеству Y, если существует взаимно однозначное отображение множества X на Y (считается, что $\varnothing$ равномощно себе). Будем говорить, что непустое множество X мощнее множества Y, если невозможно взаимно однозначно отобразить X в Y (не исключается $Y = \varnothing$).

Определение 2. Кардинал есть ординал, который мощнее каждого своего элемента ($\varnothing$ считается кардиналом).

В [5] кардинал определяется как привилегированный представитель среди равномощных множеств без уточнения, какое из них считать привилегированным (такое понятие кардинала и рассмотренное в [5] понятие упорядоченной пары могут быть содержательными лишь при наличии всех множеств).

Из теоремы 3 и теоремы Цермело о полном упорядочении вытекает

Теорема 4. Каждое множество X равномощно некоторому, притом единственному, кардиналу, который называется мощностью множества X и обозначается через $Card(X)$.

Процесс образования кардиналов, а значит, и ординалов является незавершаемым. Это доказывается с помощью рассуждений, приводящих к парадоксам Кантора и Бурали–Форти (теорема 1 также была доказана при помощи рассуждений, приводящих к парадоксу Рассела). А именно, справедлива

Теорема 5. Пусть Y – некоторая совокупность множеств, а $X = \bigcup Y$. Тогда $Card(y) \in Card(2^X)$ для каждого $y \in Y$ и, значит, $Card(2^X) \notin Y$.

Доказательство. По теореме Кантора, 2^X мощнее X. Если $y \in Y$, то $y \subset X$ и, значит, 2^X мощнее y. Отсюда и вытекают утверждения теоремы.

Легко доказывается также

Теорема 6. Пусть Y – некоторая совокупность ординалов, а $X = \bigcup Y$. Тогда X и $X \bigcup \{X\}$ являются ординалами, причем $Y \subset X \bigcup \{X\}$, и, значит, $X \bigcup \{X\} \notin Y$.

Внесем теперь некоторое уточнение в понятие незавершаемого процесса. Процесс, описываемый при помощи шагов, называется бесконечным, если после совершения какого угодно конечного количества шагов можно сделать еще один шаг. С точки зрения каких-то количеств процесс считается незавершаемым, если после совершения какого угодно находящегося в рассмотрении количества шагов можно сделать еще один шаг, иначе процесс считается завершаемым. Ясно, что понятие незавершаемого процесса носит относительный характер и зависит от количеств, с точки зрения которых рассматривается процесс. Например, процесс построения натуральных чисел с точки зрения конечных количеств (т.е. количеств, определяемых натуральными числами) является незавершаемым и ему невозможно приписать окончательный результат, являющийся натуральным числом (не имеет смысла говорить о натуральном числе всех натуральных чисел). Однако этот процесс определяет бесконечное (именно счетное) количество, с точки зрения которого процесс становится завершаемым и его окончательным результатом является множество всех натуральных чисел. Возможность завершения бесконечного процесса (т.е. существование бесконечного множества) мы должны принять, чтобы избежать парадоксов, которые могут возникнуть в математическом пространственно-временном представлении движения. К этому вопросу относится пример древнегреческого философа Зенона о преследовании Ахиллом черепахи. В начальный момент Ахилл находится в точке A_0, а черепаха – в точке A_1. Когда Ахилл доходит до точки A_1, черепаха будет находиться в точке A_2 прямой A_0A_1 и т.д. Догнав черепаху, Ахилл совершает бесконечное количество таких шагов. В этом примере мы имеем дело с завершаемым бесконечным процессом, так как в результате бесконечного количества шагов Ахилл и черепаха будут находиться в одной точке, а тогда невозможно сделать еще один шаг указанного типа. Множество выражает также смысл количества (конечного или бесконечного). Следствие 1 показывает, что с точки зрения количеств, определяемых множествами, процесс образования множеств является незавершаемым и ему невозможно приписать окончательный результат, являющийся множеством (не имеет смысла говорить о множестве всех множеств). Этот процесс определяет количество, которое не укладывается в рамки интуитивного восприятия, а с точки зрения такого количества процесс образования множеств является завершаемым. При помощи введения понятия класса как окончательного результата процесса построения объектов процессу образования множеств можно приписать окончательный результат, называемый классом всех множеств. Можно также считать, что понятие множества является обобщением понятия натурального числа, а понятие класса – обобщением понятия множества. Удобно истолковывать класс как объект, указывающий на некоторое свойство. Например, под классом всех множеств можно понимать объект, указывающий на свойство «быть множеством». Образно говоря, класс всех множеств есть само понятие множества, а понятие множества не является множеством, причем множество есть класс, который представляется в рамках интуитивного восприятия как окончательный результат завершаемого процесса и выражает смысл собрания (коллекции). В связи с этим отметим, что понятие натурального числа есть класс всех натуральных чисел, который считается множеством. Уточним еще, что выражение «имеются объекты» понимается в смысле «имеется множество объектов», а при использовании последнего выражения понимается также, что имеются все объекты, принадлежащие этому множеству. Однако при использовании выражения «имеется класс объектов», вообще говоря, нельзя понимать, что имеются все объекты, принадлежащие этому классу. В частности, говоря о классе всех множеств, нельзя считать, что имеются все множества. В отличие от класса, для множества всегда считается возможным определить, принадлежит ли ему данный объект и выполняется ли данное условие, относящееся к его элементам. Можно сказать, что причиной появления в интуитивной теории множеств известных парадоксов является отождествление понятий множества (совокупности) и класса.

При обсуждении некоторых вопросов нам понадобится

Определение 3. Замкнутой совокупностью будем называть всякое множество K, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $x \in K$, то $x \subset K$ (т. е. K транзитивно);
2) если $x \in K$, то $2^x \in K$;
3) если $x \in K$ и $y \in K$, то $\{x, y\} \in K$;
4) если $x \in K$, то $\bigcup x \in K$.

Замкнутой совокупностью считается также $\varnothing$. Пересечение непустого множества замкнутых совокупностей есть замкнутая совокупность.

Теорема 7. Каждое множество S является подмножеством некоторой замкнутой совокупности K.

Доказательство. Последовательно строим множества $S_1, S_2, \ldots$ следующим образом. Положим $S_1 = S$. Если для натурального числа n множество S_n построено, то в качестве S_{n+1} возьмем множество всех z, удовлетворяющих хотя бы одному из условий: $z \in S_n$; $z \in x$ для некоторого $x \in S_n$; $z = 2^x$ для некоторого $x \in S_n$; $z = \{x, y\}$ для некоторых $x \in S_n$ и $y \in S_n$; $z = \bigcup x$ для некоторого $x \in S_n$. Легко видеть, что требуемой замкнутой совокупностью является множество $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Теорема доказана.

Следствие 2. Для каждого множества S существует наименьшая замкнутая совокупность, для которой S является подмножеством.

Доказательство. Пусть K – некоторая замкнутая совокупность такая, что $S \subset K$. Рассмотрим подмножества K, каждое из которых является замкнутой совокупностью и содержит S как подмножество. Пересечение всех этих совокупностей является *искомым*. Следствие доказано.

Нетрудно убедиться, что построенная в доказательстве теоремы 7 замкнутая совокупность K является наименьшей замкнутой совокупностью, содержащей S как подмножество.

Следствие 3. Для каждого множества X существует наименьшая замкнутая совокупность, содержащая X как элемент.

Доказательство. В качестве искомой совокупности служит наименьшая замкнутая совокупность K, для которой $\{X\} \subset K$. Следствие доказано.

Легко проверить справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. Если множество X транзитивно, то 2^X также транзитивно, а наименьшая замкнутая совокупность K, содержащая X как элемент, определяется равенством $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_1 = X$ и $A_{n+1} = 2^{A_n}$ для каждого натурального числа n.

Теорема 9. Пусть K – замкнутая совокупность. Тогда $\bigcup K = K$, $K \notin K$ (т.е. K не является атомом), $Card(K) \notin K$ и $Card(x) \in Card(K)$ для каждого $x \in K$, а значит, $Card(x) \in K$ при $Card(K) \subset K$.

Доказательство. Пусть $x \in K$. Так как $x \subset K$, то $\bigcup K \subset K$. В силу $2^x \in K$ и $x \in 2^x$ получаем $x \in \bigcup K$ и, значит, $K \subset \bigcup K$. Поэтому $\bigcup K = K$. Очевидно, для K выполняется условие теоремы 2 и, следовательно, $K \notin K$. Если предположить $y = Card(K) \in K$, то в силу $2^y \subset K$ будем иметь $Card(2^y) \subset y$, что приводит к противоречию, так как, по теореме Кантора, $y \subset Card(2^y)$ и $y \neq Card(2^y)$. Следовательно, $Card(K) \notin K$. Из $2^x \subset K$ вытекает $Card(2^x) \subset Card(K)$, а, по теореме Кантора, $Card(x) \in Card(2^x)$. Поэтому $Card(x) \in Card(K)$.

Теорема доказана.

Пусть K_1 – наименьшая непустая замкнутая совокупность (т.е. указанная в теореме 8 совокупность K при $X = \varnothing$). Множество K_1 счетно и каждый его элемент является конечным множеством, причем $Card(K_1) \subset K_1$. Обозначим через K_2 наименьшую замкнутую совокупность, для которой счетный кардинал $\square = Card(K_1)$ является элементом (т.е. указанную в теореме 8 совокупность K при $X = \square$). Ординалы и кардиналы, принадлежащие K_2, конечны или счетны, а объединение этих ординалов (или, что то же самое, множество этих ординалов) является счетным ординалом, не принадлежащим K_2. При этом $2^{\square} \in K_2$ и $Card(2^{\square}) \notin K_2$. Обозначим через $K_2^{'}$ наименьшую замкнутую совокупность такую, что $Card(K_2) \subset K_2^{'}$. С учетом теорем 8, 9 и доказательства теоремы 7 нетрудно убедиться, что $K_2 \subset K_2^{'}$, $Card(K_2) = Card(K_2^{'})$ и $Card(x) \in K_2^{'}$ для каждого $x \in K_2^{'}$.

Нам понадобятся еще два понятия из теории множеств.

Множество U называется универсальным (см. [10], стр. 18), когда оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если $x \in U$, то $x \subset U$;

2) если $x \in U$, то $2^x \in U$;

3) если $x \in U$ и $y \in U$, то $\{x, y\} \in U$;

4) если $I \in U$ и $z_i \in U\ (i \in I)$, то $\bigcup\limits_{i \in I} z_i \in U$.

Разница между определениями замкнутой совокупности и универсального множества заключается в различии условий 4 (в определении универсального множества условие 3 является следствием остальных). Примером универсального множества, элементы которого являются конечными множествами, может служить замкнутая совокупность K_1 ($\varnothing$ можно считать универсальным множеством). На вопрос о существовании универсального множества, содержащего в качестве элемента бесконечное множество, мы склонны дать отрицательный ответ, считая, что в процессе образования замкнутых совокупностей не может появиться замкнутая совокупность, содержащая в качестве элемента бесконечное множество и удовлетворяющая условиям определения универсального множества (этим условиям удовлетворяет класс всех множеств). Этот ответ мы отнесем к числу утверждений, которые уточняют суть интуитивного понятия множества и принимаются без доказательства, как, например, утверждение о том, что отличное от атома множество не является элементом своего элемента.

Кардинал C называется недостижимым (см. [9], стр. 154), если:

1) $Card(2^c) \in C$ для любого кардинала $c \in C$;

2) для любых кардиналов $I \in C$ и $c_i \in C\ (i \in I)$ множество $X = \{\langle i, x \rangle :$ $x \in c_i, i \in I\}$ удовлетворяет соотношению $Card(X) \in C$.

Счетный кардинал недостижим ($\varnothing$ можно считать недостижимым кардиналом). Примером несчетного кардинала, удовлетворяющего условию 1, может служить $Card(K_2)$, а примером несчетного кардинала, удовлетворяющего условию 2, – множество всех конечных или счетных ординалов. На вопрос о существовании недостижимого несчетного кардинала мы склонны снова дать отрицательный ответ, считая, что в процессе образования кардиналов не может появиться несчетный кардинал, удовлетворяющий условиям определения недостижимого кардинала, даже если в условии 2 требование $Card(X) \in C$ заменить на $\bigcup\limits_{i \in I} c_i \in C$ (этим условиям удовлетворяет класс всех кардиналов).

В основу аксиоматического построения теории множеств заложено восприятие процесса образования множеств как завершаемого, а именно: считается, что все объекты теории, называемые множествами, заданы и для них определено бинарное отношение, называемое отношением принадлежности и обозначаемое знаком $\in$, относительно которого требуется выполнение некоторых аксиом. Аксиомы позволяют образовывать множества с требованием, чтобы они были в числе заданных множеств. Противоречиво это требование или нет – зависит от позволенных аксиомами возможностей образования множеств. При отсутствии ограничений на образование множеств, как в интуитивном случае, указанное требование противоречиво. А если сильно ограничить возможности образования множеств, то можно обеспечить непротиворечивость указанного требования, но это может привести к потере некоторых существенных результатов интуитивной теории. Обсудим это на примере системы аксиом Цермело–Френкеля (см. [7], стр. 53–66; [9], стр. 87–102).

1. *Аксиома объемности* (*или экстенсиональности*):

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y) .$$

2. *Аксиома существования пустого множества*:

$$\exists \varnothing \forall y (y \notin \varnothing) .$$

3. *Аксиома неупорядоченной пары*:

$$\forall x \forall y \exists z \, \forall w \, (w \in z \to w = x \vee w = y) .$$

4. *Аксиома объединения* (*или суммы*):

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \,\&\, z \in t)) .$$

5. *Аксиома бесконечности*:

$$\exists x (\varnothing \in x \,\&\, \forall y (y \in x \to y \bigcup \{y\} \in x)) .$$

6_Φ. *Аксиома замены* (*или подстановки*) *для высказывательной функции* Φ. Если для каждого x существует единственное y такое, что $\Phi(x,y)$ истинно, то для каждого множества u существует множество w, состоящее из тех элементов r, для каждого из которых $\Phi(s,r)$ истинно при некотором $s \in u$:

$$\forall x \exists! y \, (\Phi(x,y)) \to \forall u \exists w \forall r (r \in w \leftrightarrow \exists s \, (s \in u \,\&\, \Phi(s,r))) .$$

7. *Аксиома степени*:

$$\forall x \exists y \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \subset x) .$$

8. *Аксиома выбора*:

$$\forall X \, (\forall x ((x \in X \to x \neq \varnothing) \,\&\, \forall z (z \in X \,\&\, z \neq x \to z \bigcap x = \varnothing)) \to$$
$$\to \exists Y (Y \subset \bigcup X \,\&\, \forall u (u \in X \to \exists! y (y \in u \bigcap Y)))) .$$

9. *Аксиома регулярности*:

$$\forall x \, (x \neq \varnothing \to \exists y (y \in x \,\&\, \forall z (z \in x \to z \notin y))) .$$

Аксиома регулярности исключает наличие атомов.

Указанную систему аксиом обозначим через Σ, а систему без аксиомы бесконечности – через Σ_1. Замкнутая совокупность K_1 является моделью для Σ_1, значит, система аксиом Σ_1 относительно непротиворечива. Обозначим через Σ_2 систему аксиом, получаемую из Σ заменой аксиомы 6_Φ следующей аксиомой, дающей более слабую возможность для образования множеств (см. [7], стр. 62; [9], стр. 98).

$6'_{\Phi}$. *Аксиома выделения для высказывательной функции* Φ. Для каждого множества x существует множество y, состоящее из тех элементов $z \in x$, для которых $\Phi(z)$ истинно:

$$\forall x \exists y \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \in x \& \Phi(z)).$$

Каждая из замкнутых совокупностей K_2 и K'_2 является моделью для Σ_2 и, значит, система аксиом Σ_2 относительно непротиворечива. Модель K_2 показывает, что теоремы 3 и 4 не вытекают из системы аксиом Σ_2, а модель K'_2 показывает, что эти теоремы не противоречат Σ_2.

Вопрос, может ли интуитивное множество служить моделью для Σ при интерпретации отношения принадлежности формальной теории как интуитивного отношения принадлежности, связан с вопросом о существовании недостижимого несчетного кардинала или универсального множества, содержащего в качестве элемента бесконечное множество. В [9], стр. 165–177 (см. также [8]), утверждается, что класс всех конструктивных множеств является моделью для Σ. Однако в связи с этим возникает вопрос: являются ли вполне осмысленными понятие истинности без наличия всех элементов модели и общее понятие отображения класса в класс (а именно, можно ли считать проверяемой в такой модели выполнимость условия аксиомы 6_{Φ}).

Заметим, что интуитивная теория множеств образует объекты на основании заданного отношения, а аксиоматическая теория вводит отношение между заданными объектами. Этим также объясняется наличие различных аксиоматических теорий множеств (см. [7], стр. 64–66; [9], стр. 140–145). Для формализации интуитивной теории множеств, так чтобы аксиомы описали этап процесса образования множеств и класс всех интуитивных множеств служил моделью для формальной теории, можно поступить следующим образом: считать заданными лишь пустое множество и, быть может, атомы, а также одно бесконечное множество, и образовать новые множества по правилам, указанным в системе аксиом, выбранной по образцу какой-либо известной системы аксиом с подходящими изменениями, используя при этом дополнительный квантор, указывающий на новое множество. Однако при такой формализации остается открытым вопрос: получится ли множество всех подмножеств бесконечного множества как вполне сформированный объект, или оно будет находиться в процессе своего становления. Изложенное ставит под сомнение возможность полноценной формализации интуитивной теории множеств (по мнению автора, интуитивная теория множеств не поддается полноценной формализации).

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 25.09.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Клини С. К.** Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
2. **Клини С. К.** Математическая логика. М.: Мир, 1973.
3. **Карри Х. Б.** Основания математической логики. М.: Мир, 1969.
4. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
5. **Бурбаки Н.** Теория множеств. М.: Мир, 1965.
6. **Шенфилд Дж.** Математическая логика. М.: Наука, 1975.
7. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970.
8. **Йех Т.** Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
9. **Коэн П. Дж.** Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
10. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1968.
11. **Кон П.** Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆԵՐԶԳԱՅԱԿԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ՁԵՎԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է բազմությունների ներզգայական տեսությունում հայտնի պարադոքսների առաջացման պատճառների բացահայտմանը: Ապացուցվում է, որ բազմություններ կազմելու պրոցեսն ավարտ չունեցող է, իսկ պարադոքսների առաջացման պատճառը բազմություններ կազմելու պրոցեսը որպես ավարտ ունեցող պրոցես ընկալելն է (այլ կերպ ասած, պարադոքսների առաջացման պատճառը բազմության և դասի գաղափարների նույնացումն է): Կասկածի տակ է դրվում բազմությունների ներզգայական տեսության լիարժեք ձևականացման հնարավորությունը:

I. G. KHACHATRYAN

ON THE INTUITIVE SET THEORY AND ITS FORMALIZATION

Summary

The present paper investigates the reasons of occurrence of known paradoxes in the intuitive set theory. We have proved that the process of formation of sets is non-finishing, and the reason of occurrence of paradoxes consists in representation of formation of sets as a finishing process (in other words, the reason of occurrence of paradoxes is the identification of concepts of a set and a class). The possibility of full formalization of the intuitive set theory is suspected.