ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 519.217

А. Р. МАРТИРОСЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ РЯДА ОДНОЙ ПЛОТНОСТИ В ТЕОРИИ ОЧЕРЕДЕЙ

В работе методом обращения Фурье получены интегральное представление и представление плотности в виде сходящегося ряда для одного предельного закона в теории очередей.

1. Пусть $\Delta(s)$ с $\Delta(0)=0$ и $\nabla(s)$ с $\nabla(0)=1$ – решения уравнений $z^\gamma+z=s$ при $z\ge 0$, $s\ge 0$ и $z^\gamma-z=s$ при $z\ge 1$, $s\ge 0$, когда $1<\gamma\le 2$ (см. [1]), обозначаемые $\Diamond=\Diamond(s)$. В [2] получены преобразования Лапласа (ПЛ) для $(1/\Diamond(s))$. Нас интересуют представления плотности $f_\Diamond$ с ПЛ $(1/\Diamond(s))$. Из равенства $\int\limits_0^\infty e^{-sx}f_\Diamond(x)dx=\dfrac{1}{\Diamond(s)}=\int\limits_0^\infty e^{-t\Diamond(s)}dt$ при $\gamma=2$ имеем $f_\Diamond(x)=(\sqrt{1/\pi x}e)^{-\frac{x}{4}}\pm(1-\Phi(-(\pm\sqrt{x/2})))$, где Φ – стандартный нормальный закон. Знак «+» выбираем при Δ, а «–» – при ∇.

2. Известны свойства $\Diamond(s)$ в области $S=\{s:\mathrm{Re}(s)\ge 0\}$ (см. [1]):

а) $z=\nabla(s)\in\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 1\}$ и $z=\Delta(s)\in\{z:\mathrm{Re}(z)\ge 0\}$ при $s\in S$;

б) непрерывные при $t\in[0;\infty)$ кривые: $z=\nabla(-it)$ ограничена прямыми $\mathrm{Im}(z)=0$, $\mathrm{Re}(z)=1$ и лучом $\{z:\mathrm{Arg}(z)=-\pi/2\gamma\}$; $z=\Delta(-it)$ ограничена лучами $\{z:\mathrm{Re}(z)=0,\mathrm{Im}(z)\le 0\}$ и $\{z:\mathrm{Arg}(z)=-\pi/2\gamma\}$ (см. рисунок).

Теорема 1. Интегральное представление имеет вид

$$f_\Diamond(x)=\pi^{-1}\mathrm{Re}\left\{i\int\limits_{-i\infty}^{0}\left(\gamma z^{\gamma-2}\pm z^{-1}\right)e^{(z^\gamma\pm z)x}dz\right\}. \tag{1}$$

Доказательство. По формуле обращения [3], $f_\Diamond(x)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty\dfrac{e^{-itx}}{\Diamond(-it)}dt$.

Положив $z=\Diamond(-it)$, имеем $f_\Diamond(x)=\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{i\int\limits_{L_\Diamond}\dfrac{\gamma z^{\gamma-1}\pm 1}{z}e^{(z^\gamma\pm z)x}dz\right\}$, где

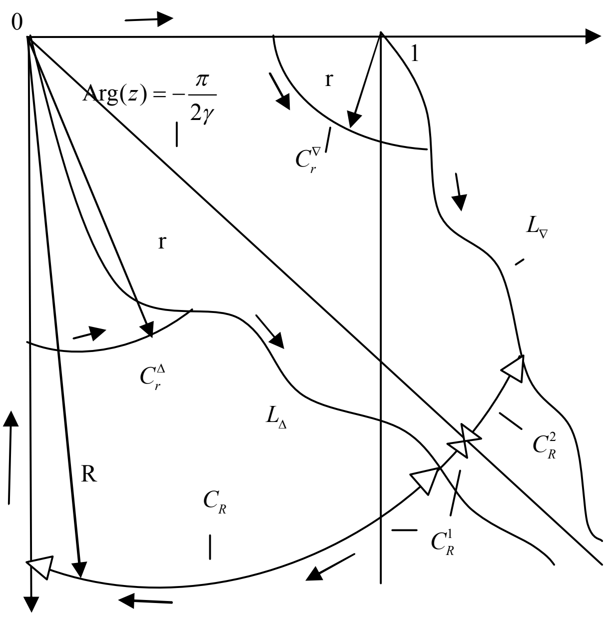
$L_\lozenge = \left\{z : z = \lozenge(-it); t \in [0,\infty)\right\}$ – непрерывная кривая (см. рисунок). Пусть L_R^r – часть $L_\lozenge$ между дугами $C_r = C_r^\nabla = \left\{z = 1 + re^{i\varphi}, -\pi \le \varphi \le \varphi_r\right\}$,

$$C_R^1 = \left\{z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, (-\pi/2) \le \varphi \le (-\pi/2\gamma)\right\},\ C_R^2 = \left\{z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, (-\pi/2\gamma) \le \varphi \le \varphi_R\right\}$$

(для ∇), где $\varphi_R = \mathrm{Arg}\left\{L_\nabla \bigcap C_R^2\right\}$, $\varphi_r = \mathrm{Arg}\left\{L_\nabla \bigcap C_r\right\}$, и дугами

$$C_r = C_r^\Delta = \left\{z = re^{i\varphi}, (-\pi/2) \le \varphi \le \varphi_r\right\},\ C_R = \left\{z = \mathrm{Re}^{i\varphi}, (-\pi/2) \le \varphi \le \varphi_R\right\}$$

(для Δ), где $\varphi_R = \mathrm{Arg}\left\{L_\Delta \bigcap C_R\right\}$, $\varphi_r = \mathrm{Arg}\left\{L_\Delta \bigcap C_r\right\}$. Функция $h_\pm(z) = (\gamma z^{\gamma-2} \pm z^{-1})e^{(z^\gamma \pm z)x}$ аналитична внутри замкнутых контуров $\varGamma_\nabla = L_R^r \bigcup C_R^2 \bigcup C_R^1 \bigcup [-iR;0] \bigcup [0;1-r] \bigcup C_r$ и $\varGamma_\Delta = L_R^r \bigcup C_R \bigcup [-iR;-ir] \bigcup C_r$. По теореме Коши $\int\limits_{\varGamma_\lozenge} h_\pm(z)dz = 0$. Пусть C_ρ, $\rho = r, R$, – одна из дуг C_r, C_R^1, C_R^2, C_R и $\varphi_\rho = \mathrm{Arg}\left\{L_\lozenge \bigcap C_\rho\right\}$. Покажем, что при $\rho = r \to 0$ и $\rho = R \to \infty$ $\int\limits_{C_\rho} h_\pm(z)dz \to 0$.



Так как $z = \rho e^{i\varphi_\rho} \in L_\lozenge$, то из $z^\gamma \pm z = -it$ находим $\rho^{\gamma-1}\cos\gamma\varphi_\rho \pm \cos\varphi_\rho = 0$. Отсюда следует, что $\varphi_\Delta = \pi/2 + \varphi_r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, $\varphi_\nabla = \pi + \varphi_r \xrightarrow[r\to 0]{} \pi/2$, $\cos\gamma\varphi_R = \dfrac{\cos\varphi_R}{R^{\gamma-1}} \le \dfrac{1}{R^{\gamma-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Пусть $M_\pm(\rho) = \max\limits_{z \in C_\rho}\left|h_\pm(z)\right|$. Тогда $\left|\int\limits_{C_r} h_\pm(z)dz\right| \le M_\pm(z)2r\varphi_\lozenge \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, так как $M_-(r)r \le e^{((1+r)^\gamma + 1 + r)x}(\gamma(1+r)^{\gamma-1} + 1)r$ и $M_+(r)r \le e^{(r^\gamma + r)x}(\gamma r^{\gamma-1} + 1)$. Полагая $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$ и учитывая, что $\cos\varphi \ge 0$, $\cos\gamma\varphi \le 0$ при $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2\gamma}\right]$, имеем

$$\left|\int\limits_{C_R\left(C_R^1\right)} h_\pm\left(z\right)dz\right| \le\ \le (\gamma R^{\gamma-1} + 1)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2\gamma}} e^{(R^\gamma\cos\gamma\varphi \pm R\cos\varphi)x}d\varphi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Полагая $z = \mathrm{Re}^{i\varphi}$ (т.к. $\varphi_R \xrightarrow[R\to\infty]{} -\dfrac{\pi}{2\gamma}$ и $\gamma > 1$), получим оценки

$$\left|\int_{C_R^2} h_-(z)dz\right| \le (\gamma R^{\gamma-1}+1)\int_{-\frac{\pi}{2\gamma}}^{\varphi_R} e^{x(R^\gamma \cos\gamma\varphi_R - R\cos\varphi)}d\varphi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 .$$

Устремляя $R \to \infty$, а $r \to 0$ и учитывая, что $\mathrm{Im}\int_0^1 h_-(z)dz = 0$, получаем (1).

3. *Теорема 2.* Пусть $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция Эйлера. Тогда

$$f_\lozenge(x) = \left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)^{-1} x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}} + \frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),\ x>0 . \qquad (2)$$

Доказательство. В (1) положим $t = -xz^\gamma$. Тогда

$$f_\lozenge(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{ i\int_G e^{-t\pm x\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\pi i}{\gamma}}}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\pi i(\gamma-1)}{\gamma}} \pm \frac{1}{\gamma t}\right)dt\right\},$$

где $G = \left\{t : t = -xz^\gamma; z \in (-i\infty;0)\right\} \subseteq \left\{z : \mathrm{Re}(z) \ge 0, \mathrm{Im}(z) \ge 0\right\}$ – регулярная кривая (см. [1]). Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\pm x\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\pi i}{\gamma}}}$ и используя аналитичность $\Gamma(z)$ $\left(\int_G = \int_0^\infty\right)$, выводим представление плотности в виде сходящегося ряда:

$$f_\lozenge(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{ i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n!}\left[x^{\frac{(\gamma-1)(n-1)}{\gamma}} e^{-\frac{\pi i(n+\gamma-1)}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n-1}{\gamma}+1\right) \pm \frac{1}{\gamma}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}} e^{-\frac{\pi i n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}x^{-\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}\Gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}\right) + \frac{1}{\pi\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}\Gamma\left(\frac{n}{\gamma}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{\gamma}\right),$$ и с помощью формулы $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \pi/\sin(\pi a)$, $0 < a < 1$, получим (2).

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

Поступила 14.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Угарид Мухамед** Модели типа $M \,|\, G \,|\, 1 \,|\, \infty$ при критической загрузке: Автореф. дис. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. Ер., 1990.
2. **Мартиросян А.Р., Читчян Р.Н.** – Информ. техн. и управление, 2007, № 6, с. 75–99.
3. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

Ա. Ռ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՀԵՐԹԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՏՈՒԹՅԱՆ ՊԱՏԿԵՐԱՑՈՒՄ ՇԱՐՔԻ ՏԵՍՔՈՎ

Ամփոփում

Սույն աշխատանքում հերթերի տեսության մի սահմանային բաշխման համար Ֆուրյեի շրջման մեթոդով ստացված են ինտեգրալ պատկերացում և խտության պատկերացում զուգամետ շարքի տեսքով:

A. R. MARTIROSYAN

REPRESENTATION IN TERMS OF SERIES OF ONE LIMIT LAW IN THEORY OF QUEUES

Summary

In this paper for one limit law from the theory of queues by methods of Fourie an integral representation and expansion in terms of convergent series for density is found.