ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

А. А. МАМИКОНЯН

ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА ПОЛУГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

В данной работе изучается функция Ляпунова полугруппы, порожденной начально-краевой задачей

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \\ u\big|_{\Sigma} = 0, \end{cases}$$

где нелинейные операторы A и B имеют следующий вид:

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u), \quad Bu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x, \nabla u).$$

Доказывается существование функции Ляпунова, определенной на аттракторе полугруппы, порожденной этой задачей. Также представлена структура аттрактора, получающаяся при помощи неподвижных точек этой полугруппы.

Одной из основных проблем теории эволюционных дифференциальных уравнений является изучение поведения траекторий их решений при $t \to +\infty$. Эта проблема тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами. В данной статье рассматривается проблема описания структуры этих многообразий для некоторого класса уравнений типа Соболева.

В работах [1, 2] изучены аттракторы ряда эволюционных уравнений, таких как параболические уравнения с монотонной главной частью, уравнения типа систем химической кинетики и др. Доказано существование аттракторов, порожденных этими уравнениями, а также изучены их свойства. Приведены важные классы уравнений, аттракторы полугрупп которых обладают глобальной функцией Ляпунова. В работе [3] рассматриваются аттракторы полугрупп, порожденных начально-краевой задачей для широкого класса вырождающихся квазилинейных эволюционных уравнений в частных производных, доказывается существование глобальной функции Ляпунова. В [4] построена функция Ляпунова для некоторого класса вырождающихся квазилинейных систем типа Соболева. В работах [5, 6] доказаны существование единственного решения начально-краевой задачи для широкого класса нелинейных уравнений типа Соболева и существование ограниченного аттрактора, порожденного этой задачей. В данной статье доказывается существование глобальной функции Ляпунова и дается структура аттрактора для этой же задачи.

Пусть $\Omega \subset R^n$ – область с достаточно гладкой границей Γ, а $\Sigma = \Gamma \times [0,T]$. Рассматривается начально-краевая задача

$$A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Sigma} = 0, \tag{3}$$

где нелинейные дифференциальные операторы A и B имеют следующий вид:

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u), \quad Bu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x, \nabla u).$$

Для краткости впредь через u' будем обозначать производную функции $u(t,x)$ по t $\left(u' = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right)$, которая понимается в смысле распределений. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Определение 1. Функцию $u(x,t) \in L_2(0, T, \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ назовем решением уравнения (1), если для произвольной функции $v(x,t) \in L_2(0, T, \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ почти всюду на $[0,T]$ имеет место следующее интегральное равенство:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u') \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} b_i(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0.$$

Пусть для функций $a_i(x,\xi)$ и $b_i(x,\xi)$ выполнены следующие условия:

$$\left|a_i(x,\xi)\right| \le c_1 \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}\right| \le c_2, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j} \eta_i \eta_j \ge c_3 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2, \tag{6}$$

$$\left|b_j(x,\xi)\right| \le c_4 \sum_{i=1}^{n} \left|\xi_i\right|, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial b_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}\right| \le c_5, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где $c_1,\ldots,c_5$ – положительные константы.

Теорема 1 (см. [5]). Пусть функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$ непрерывны по всем компонентам, непрерывно дифференцируемы по ξ и выполнены условия (4)–(8). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(t,x) \in C(0,\, T,\, \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ $\quad \forall u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Пусть $\{ X, \|\cdot\| \}$ – некоторое банахово пространство.

Определение 2. Полугруппой, порожденной уравнением (1), называется семейство операторов $\{S_t, t \ge 0\}$, $S_t : X \to X$, действующих по формуле $S_t u_0 = u(t)$, $u_0 \in X$, где $u(t)$ – решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для этого уравнения. Операция в $\{S_t, t \ge 0\}$ определяется по формуле $S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_{t_1+t_2}$, а $S_0 = I$ – тождественный оператор. При этом предполагается, что эта задача однозначно разрешима.

Определение 3. Максимальным аттрактором полугруппы $\{S_t\}$ называется такое замкнутое ограниченное множество $U \subset X$, которое обладает следующими свойствами:

1) инвариантностью, т. е. $S_t U = U \;\; \forall t \ge 0$;

2) свойством притяжения, т. е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ расстояние $\operatorname{dist}(S_t B, U) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для краткости в дальнейшем максимальные аттракторы будем называть просто аттракторами. Имеет место следующая

Теорема A (см. [1]). Пусть полугруппа $\{S_t\}$, $S_t : X \to X$, удовлетворяет следующим условиям:

1) полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена, т.е. $\forall R > 0 \;\exists C(R)$ такое, что $\|S_t u\| \le C$, если $\|u\| \le R \;\; \forall t \in [0, +\infty)$;

2) существует ограниченное (компактное) в X поглощающее множество B_0, т.е. для любого ограниченного множества $B \subset X$ существует такое число T, что при $t \ge T \;\; S_t B \subset B_0$;

3) операторы $S_t : X \to X$ непрерывны при $t \ge 0$.

Тогда у полугруппы $\{S_t\}$ имеется ограниченный (компактный) в X максимальный аттрактор.

Определение 4. Пусть $\{S_t\}$ – полугруппа операторов, $S_t : X \to X$. Точка $z \in X$ называется неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$, если $S_t z = z \;\; \forall t \ge 0$.

Определение 5. Пусть z – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$. Неустойчивым инвариантным многообразием, выходящим из точки z, называется множество $M(z)$ точек $u \in X$, обладающих следующим свойством: существует в X такая непрерывная кривая $u(\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$, что

1) $u(0) = u$;

2) $S_t u(\tau) = u(\tau + t) \;\; \forall \tau \in R, \;\; \forall t > 0$;

3) $u(\tau) \to z$ при $\tau \to -\infty$.

Определение 6. Пусть $E \subset X$ – слабо инвариантное множество полугруппы $\{S_t\}$: $S_t E \subset E$. Непрерывный на E функционал Φ, $\Phi : E \to R$, называется глобальной функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$ на множестве E, если выполнены следующие условия:

1) для любого $u \in E$ функция $\Phi(S_t u)$ убывает по t при $t \geq 0$;

2) если $\Phi(S_t u_0) = \Phi(u_0)$ при некотором $t > 0$, то $z = u_0$ является неподвижной точкой полугруппы $\{S_t\}$.

Для краткости глобальную функцию Ляпунова будем называть просто функцией Ляпунова.

Теорема Б (см. [1]). Пусть компактное множество U инвариантно относительно полугруппы $\{S_t\}$, т.е. $S_t U = U \ \forall t > 0$, и $\{S_t\}$ на U обладает функцией Ляпунова Φ. Предполагается, что множество $\aleph$ неподвижных точек $\{S_t\}$ конечно. Кроме того, допустим, что для любого $u \in U$ функция $S_t u$ непрерывно зависит от t в E. Тогда имеет место включение $U \subset \bigcup\limits_{z \in \aleph} M(z)$, где $M(z)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z.

Теорема В (см. [1]). Пусть полугруппа $\{S_t\}$ обладает максимальным аттрактором U и выполнены условия теоремы Б. Тогда $U = \bigcup\limits_{z \in \aleph} M(z)$, где $\aleph$ – множество неподвижных точек $\{S_t\}$.

Потребуем, чтобы функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$ были такими, чтобы для решения задачи (1)–(3) выполнялись следующие интегральные неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i(x,\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \geq c_6 \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} b_i(x,\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \geq c_7 \|u(t)\|^2 - k(t), \tag{10}$$

где $k(t)$ – непрерывная неотрицательная на $[0;+\infty)$ функция, для которой

$$\int_0^{+\infty} e^{\frac{2c_7}{c_6}t} k(t)dt = R_0 < +\infty .$$

Теорема 2 (см. [6]). Пусть функции $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и для решения задачи (1)–(3) выполняются неравенства (9), (10). Тогда у полугруппы, порожденной задачей (1)–(3), существует ограниченный в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ максимальный аттрактор.

Предположим, что существует интегрируемая на Ω функция $b(x,\nabla u)$, для которой $b_i(x,\xi) = \dfrac{\partial b(x,\xi)}{\partial \xi_i}$, $i = 1,2,...,n$.

Обозначим

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} b(x,\nabla u) dx . \tag{11}$$

Докажем, что функция $\Phi(u)$ является функцией Ляпунова для задачи (1)–(3), которая определена на аттракторе полугруппы $\{S_t\}$, порожденной этой задачей.

Лемма 1. Функция Φ, определенная равенством (11), непрерывна на аттракторе полугруппы $\{S_t\}$.

Доказательство. Пусть U – аттрактор полугруппы задачи (1)–(3). Для произвольных $u, v \in U$ оценим разность

$$\left|\Phi(u)-\Phi(v)\right| = \left|\int_{\Omega}(b(x,\nabla u)-b(x,\nabla v))dx\right| = \left|\int_{\Omega}\int_0^1\sum_{i=1}^n \frac{\partial b(x,\nabla w)}{\partial \xi_i}\cdot\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}d\tau\, dx\right|,$$

где $w = v+\tau(u-v)$.

Далее, учитывая (11), получим

$$\left|\Phi(u)-\Phi(v)\right| = \left|\int_{\Omega}\sum_{i=1}^n\int_0^1 b_i(x,\nabla w)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}d\tau\, dx\right| \le \int_{\Omega}\int_0^1\sum_{i=1}^n\left|b_i(x,\nabla w)\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right|d\tau\, dx \le$$

$$\le \int_{\Omega}\int_0^1\left(c\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}d\tau\ dx \le\ c_1\|w\|\,\|u-v\| \le$$

$$\le c_1\left(\|v\|+\|u-v\|\right)\|u-v\|.$$

Следовательно, непрерывность Φ доказана.

Лемма 2. Функция $\Phi(u(t,x))$ убывает по t, $t\in[0,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ является решением уравнения $Au'+Bu=0$. Тогда, скалярно умножив это уравнение на u', получим $\langle Au',u'\rangle+\langle Bu,u'\rangle=0$, т.е. $\langle Au',u'\rangle=-\langle Bu,u'\rangle$.

Теперь оценим $\langle Au',u'\rangle$, учитывая неравенство (5).

$$\langle Au',u'\rangle = \int_{\Omega}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}a_i(x,\nabla u')u'dx = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^n a_i(x,\nabla u')\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx \ge c\int_{\Omega}\sum_{i=1}^n\frac{\partial u'}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx = c\|u'\|^2\ge 0.$$

Далее, используя полученное неравенство, оценим $d\Phi(u(t,x))/dt$:

$$\frac{d\Phi(u(t,x))}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\Omega}b(x,\nabla u)dx = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^n\frac{\partial b(x,\nabla u)}{\partial\xi_i}\cdot\frac{\partial \xi_i}{\partial t}dx = \int_{\Omega}\sum_{i=1}^n b_i(x,\nabla u)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\partial t}dx =$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{i=1}^n b_i(x,\nabla u)\frac{\partial u'}{\partial x_i}dx = \langle Bu,u'\rangle = -\langle Au',u'\rangle \le 0.$$

Лемма доказана.

Для того чтобы Φ была функцией Ляпунова для задачи (1)–(3), осталось доказать, что для нее выполняется последний пункт определения 6.

Пусть $\Phi(u_0)=\Phi(S_t u_0)$ для некоторого $t>0$.

$$0=\Phi(u_0)-\Phi(S_t u_0) = \int_0^t\frac{d}{dt}\Phi(S_t u_0)dt = \int_0^t\langle Bu,u'\rangle dt = \int_0^t-\langle Au',u'\rangle dt.$$

Следовательно, $\langle Au',u'\rangle=0$. Так как из предыдущей леммы $\langle Au',u'\rangle\ge c\|u'\|^2$, то получим $u'=0$. Обозначим $z=u_0(x)$. Тогда из вышесказанного следует, что $z=u_0(x)$ является неподвижной точкой для полугруппы $\{S_t\}$.

Из последнего, а также из лемм 1, 2 следует, что Φ является функцией Ляпунова для задачи (1)–(3) на аттракторе полугруппы, порожденной этой задачей.

Теорема 3. Функция Φ, определенная равенством (11), является глобальной функцией Ляпунова для задачи (1)–(3). Если множество $\aleph$ неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$ конечно, то для аттрактора имеет место представление $U=\bigcup\limits_{z\in\aleph} M(z)$, где $M(z)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, выходящее из точки z.

Доказательство. Для того чтобы воспользоваться теоремой B, необходимо проверить, что для любого $u\in U$ функция $S_t u$ непрерывно зависит от t в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$, т.е. для каждого $u_0\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ решение задачи (1)–(3) непрерывно по *t*. А это следует из теоремы 1. Значит, имеет место теорема B и аттрактор имеет представление $U=\bigcup\limits_{z\in\aleph} M(z)$.

Кафедра теории оптимального управления
и приближенных методов

Поступила 25.12.2007

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабин А.В., Вишик М.И.** – УМН, 1983, т. 38, № 4 (232), с. 133–185.
2. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
3. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1994, т. 29, № 5, с. 27–37.
4. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1996, т. 31, № 3, с. 5–29.
5. **Мамиконян А.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2006, №2, с. 33–40.
6. **Мамиконян А.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2008, №1, с. 18–23.

Հ. Ա. ՄԱՄԻԿՈՆՅԱՆ

ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՏԻՊԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍՈՎ ԾՆՎԱԾ ԿԻՍԱԽՄԲԵՐԻ ԼՅԱՊՈՒՆՈՎԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում է Սոբոլևի տիպի հավասարումների մի դասի համար սկզբնական պայմաններով հետևյալ եզրային խնդրի Լյապունովի ֆունկցիան.

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)+Bu=0, \\ \left.u\right|_{t=0}=u_0, \\ \left.u\right|_{\Sigma}=0, \end{cases}$$

որտեղ A-ն և B-ն ոչ գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են և ունեն հետևյալ տեսքը.

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u), \quad Bu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x, \nabla u):$$

Հոդվածում ապացուցվում է Լյապունովի ֆունկցիայի գոյությունը՝ որոշված այս խնդրով ծնված $\{S_t, t \geq 0\}$ կիսախմբի ատրակտորի վրա: Ստացվում է ատրակտորի կառուցվածքը այդ կիսախմբի անշարժ կետերի օգնությամբ:

H. A. MAMIKONYAN

LYAPUNOV FUNCTION OF SEMI-GROUPS GENERATED BY A CLASS OF SOBOLEV TYPE EQUATIONS

Summary

In this paper Lyapunov function the following initial boundary value problem for a class of Sobolev type equations is considered

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) + Bu = 0, \\ u\big|_{t=0} = u_0, \\ u\big|_{\Sigma} = 0, \end{cases}$$

where A and B are nonlinear operators of the following form:

$$Au = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \nabla u), \quad Bu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x, \nabla u).$$

The existence of Lyapunov function on the attractor of the semi-group generated by this equation is proved. It is given the construction of attractor by the fixed points of that semi-group.