ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 517.9

Р. ЛОТФИКАР

МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СОБОЛЕВА

В данной работе рассмотрена начально-краевая задача

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) + Mu(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ D^\gamma u|_{\hat{A}} = 0,\ |\gamma| < m, \end{cases}$$

где L и M – нелинейные дифференциальные операторы.

Доказано, что если операторы L и M удовлетворяют некоторым условиям, тогда последовательность функций, составленная из решений уравнений Галеркина для этой задачи, сходится к слабому решению данной задачи.

1. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) + Mu(t,x) = f(t,x), & (1) \\ u(0,x) = u_0(x), & (2) \\ D^\gamma u|_{\hat{A}} = 0,\ |\gamma| < m, & (3) \end{cases}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$, $t > 0$, а нелинейные дифференциальные операторы L и M порядка *2m* имеют вид

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha \left(x, t, D^\gamma u\right),$$

$$Mu = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha \left(x, t, D^\gamma u\right) \ , |\gamma| \le m,$$

и действуют из пространства $L_2(0, T, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))$ в пространство $L_2(0, T, W_2^{-m}(\Omega))$.

Впервые задача (1)–(3) была рассмотрена С.Л. Соболевым в связи с его исследованиями, посвященными изучению малых колебаний вращающейся идеальной жидкости в том частном случае, когда $L = \Delta$ – трехмерный оператор Лапласа, а $M = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$. В дальнейшем аналогичные задачи изучались Александряном [1], Гальперном [2] и др. (см. [3–5]).

Относительно функций $A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$, $B_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ предполагается, что они определены для всех ξ_γ, $t>0, x\in\Omega$, непрерывно дифференцируемы по всем ξ_γ и удовлетворяют следующим условиям $\forall\xi_\gamma,\eta_\gamma,|\gamma|\le m$:

$$\left|A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)\right| \le C_1 \sum_{|\gamma|\le m} |\xi_\gamma|, \quad C_1>0, \tag{4}$$

$$\sum_{|\gamma|\le m}\left|\frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_\gamma}\eta_\gamma\right| \le C_2 \sum_{|\gamma|\le m}\left|\eta_\gamma\right|, \quad C_2>0, \tag{5}$$

$$\left|B_\alpha\left(x,t,\xi_\gamma\right)\right| \le C_3 \sum_{|\gamma|\le m}\left|\xi_\gamma\right|, \quad C_3>0, \tag{6}$$

$$\left|\frac{\partial B_\alpha}{\partial \xi_\gamma}\right| \le C_4, \quad C_4>0, \tag{7}$$

$$\sum_{|\alpha|,\|\beta\|\le m} A_{\alpha\beta}(x,t,\xi_\gamma)\eta_\alpha\eta_\beta \ge C_5 \sum_{|\alpha|=m}\eta_\alpha^2, \quad C_5>0. \tag{8}$$

Имеет место следующая

Теорема 1 (см. [6]). Пусть в задаче (1)–(3) функции $A_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$, $B_\alpha(x,t,\xi_\gamma)$ определены для всех ξ_γ, $t>0$, $x\in\Omega$, непрерывно дифференцируемы по всем ξ_γ и удовлетворяют условиям (4)–(8). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $\forall u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)$ и $\forall f \in L^2(0,T,W_2^{-m}(\Omega))$.

2. Пусть X – вещественное рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Через $\langle f,u\rangle$ обозначим скалярное произведение элемента $f\in X^*$ на элемент $u\in X$.

Определение 1. Оператор $A: X\to X^*$ называется

- *радиально непрерывным*, если $\forall u,v\in X$ вещественная функция $\varphi(s)=\langle A(u+sv),v\rangle$ непрерывна на $[0,1]$;
- *липшиц-непрерывным*, если существует такая постоянная M, что

$$\|Au-Av\|_* \le M\|u-v\| \quad \forall u,v\in X.$$

Определение 2. Пусть u,v – произвольные элементы из X. Оператор $A: X\to X^*$ называется *сильно монотонным*, если

$$\langle Au-Av,u-v\rangle \ge m\|u-v\|^2, m>0.$$

Пусть $\{h_1, h_2, ...\}$ – полная система линейно независимых элементов в гильбертовом пространстве H. Обозначим через H_n линейную оболочку элементов $\{h_1, h_2, ..., h_n\}$. Пусть $P_n : H \to H_n$ – оператор ортогонального проектирования H на H_n, $I_n : H_n \to H$ – оператор вложения H_n в H, а P_n^* и I_n^* – соответственно сопряженные к ним операторы.

При $t_0 \in S = [0,T]$ определим операторы $L(t_0) : \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega) \to W_2^{-m}(\Omega)$ и $M(t_0) : \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega) \to W_2^{-m}(\Omega)$ формулами

$$L(t_0)(v(x)) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, D^\gamma u),$$

$$M(t_0)(v(x)) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, t, D^\gamma u), \ v \in \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega).$$

Для определим операторы L_n, M_n формулами

$$(L_n u)(t) = L_n(t) u(t), \text{ где } L_n(t) = I_n^* L(t), \ (M_n u)(t) = I_n^*(Mu)(t).$$

Обозначим $f_n(t) = I_n^* f(t)$ для $f \in L^2(S, W_2^{-m}(\Omega))$.

Уравнениями Галеркина для псевдопараболического уравнения (1) называются уравнения, фигурирующие в следующих задачах Коши (см. [5]):

$$\begin{cases} L_n u_n' + M_n u_n = f_n, \\ u_n(0) = u_{0n} \ \ (u_{0n} = P_n u_0), \\ u_n' \in L_2(0, T, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)), \ u_n \in C(0, T, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega)). \end{cases} \tag{*}$$

Из (4), (5) следует, что операторы $L_n(t)$ радиально непрерывны, равномерно по t сильно монотонны, а оператор M вольтеров и удовлетворяет условию Липшица

$\|Mu - Mv\|_{L^2(S, W_2^{-m}(\Omega))} \le C \|u - v\|_{L^2(S, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))}$ (доказательство см. в [6]).

Следовательно, из теоремы 3.3 из [5] следует

Теорема 2. При условиях (4)–(8) уравнения Галеркина (*) для каждого $n = 1, 2, ...$ имеют единственное решение u_n. При этом, если u – решение задачи (1)–(3), то

$$\|u_n - u\|_{L^2(S, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))} + \|u_n' - u'\|_{L^2(S, \overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))} \to 0 \ \text{ при } n \to \infty.$$

3. В этом пункте рассматривается частный случай задачи (1)–(3). А именно, предполагается, что L и M – линейные дифференциальные операторы второго порядка:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad Mu = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right).$$

Относительно $a_{ij}(x)$ и $b_{ij}(x)$ предполагается, что они непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $b_{ij}(x) = b_{iji}(x)$, $i, j = 1, 2, ..., n$, а также имеет место

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c_0 |\xi|^2 \;\; \forall \xi = (\xi_1,...,\xi_n) \in R^n,\; x\in\Omega,\; c_0>0.$$

Таким образом, рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = f(t,x), & (9)\\ u(0,x) = u_0(x), & (10)\\ u|_{\Gamma\times[0,T]} = 0. & (11) \end{cases}$$

Определение 3. $u(t,x)\in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$ называется слабым решением задачи (9)–(11), если $u_t' \in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))$ и для любого $v(t,x)\in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^m(\Omega))$ имеет место следующее интегральное тождество:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_t}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt + \sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dxdt = \langle f,v\rangle. \qquad (12)$$

Нетрудно доказать, что, если $u(t,x)$ – классическое решение задачи (9)–(11), то оно является также слабым решением. И если слабое решение является гладкой функцией, тогда оно является классическим решением.

В пространстве $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ определим эквивалентную норму по формуле

$$\|u\|_L^2 = \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\,. \qquad (13)$$

Замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (13) обозначим через H_L (энергетическое пространство оператора L). Пусть $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x),...\}$ – полная ортонормальная система в гильбертовом пространстве H_L. Обозначим через $H_L(m)$ линейную оболочку системы $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x)\}$.

Уравнениями Галеркина для задачи (9)–(11) будут:

$$\begin{cases} C_1'(t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} C_k(t)\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}dx = \langle f,\varphi_1\rangle,\\ \cdot\;\cdot \\ C_m'(t) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} C_k(t)\int_\Omega b_{ij}(x)\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_j}dx = \langle f,\varphi_m\rangle. \end{cases} \qquad (14)$$

В векторном виде систему уравнений (14) можно записать следующим образом:

$$C'(t) + M_m C(t) = F_m\,, \qquad (15)$$

где $M_m = \begin{pmatrix} (M\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (M\varphi_1, \varphi_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (M\varphi_m, \varphi_1) & \dots & (M\varphi_m, \varphi_m) \end{pmatrix}$ – скалярная матрица, а $F_m = \begin{pmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_m \rangle \end{pmatrix}$.

Из теоремы 2 следует, что система уравнений Галеркина (15) при каждом $m = 1, 2, \dots$ имеет единственное решение $(C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t))$, причем

$$\|u_m - u\|_{C(S, H_l)} + \|u'_m - u'\|_{L^2(S, H_L)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

где $u_m(t,x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\varphi_i(x)$, а $u(t,x)$ – точное решение задачи (*).

Кафедра теории оптимального управления
и приближенных методов ЕГУ,
Иламский университет Азад, ИРИ

Поступила 29.01.2008

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александрян Р.А.** – Тр. Моск. мат. общ-ва, 1960, т. 9, с. 455–505.
2. **Гальперн С.А.** – Там же, с. 401–423.
3. **Aleksandryan R.A., Berezanskii Ju.M., Ilin V.A., Kostjucenko A.G.** – Amer. Math. Soc. Transe., 1976, v. 2, p. 105.
4. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** – Изв. НАН Армении. Математика, 1995, т. 30, № 1, с. 17–32.
5. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
6. **Мамиконян А.А.** – Ученые записки ЕГУ, 2006, № 2, с. 33–40.

Ռ. ԼՈԹՖԻԿԱՐ

ԳԱԼՅՈՐԿԻՆԻ ՄԵԹՈԴԸ ՍՈԲՈԼԵՎԻ ՏԻՊԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ սկզբնական-եզրային խնդիրը

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) + Mu(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ D^\gamma u|_{\Gamma} = 0, \ |\gamma| < m, \end{cases}$$

որտեղ L-ը և M-ը ոչ գծային դիֆերենցիալ օպերատորներ են:

Ապացուցվել է, որ եթե L և M օպերատորները բավարարում են որոշ պայմանների, ապա այս խնդրի համար Գալյորկինի հավասարումների լուծումներով կառուցված հաջորդականությունը զուգամիտում է այդ խնդրի թույլ լուծմանը:

R. LOTFIKAR

METHOD OF GALYORKIN FOR NONLINEAR SOBOLEV TYPE EQUATIONS

Summary

In this paper the following initial boundary value problem is considered:

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right) + Mu(t,x) = f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \\ D^{\gamma} u /_{\hat{A}} = 0, \ |\gamma| < m, \end{cases}$$

L and M are nonlinear differential operators.

It is proved that if L and M satisfy to some conditions, then the sequence constructed by solutions of Galyorkin's equations for this problem is convergence to the week solution of the problem.