ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 519.95

Г. А. КАРАПЕТЯН, А. А. ДАРБИНЯН

НЕТЕРОВОСТЬ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЛАСТИ

Настоящая работа посвящена исследованию нетеровости линейного дифференциального полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в области. Доказывается, что, для того чтобы оператор был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был полуэллиптическим. И в частности доказывается, что индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами в области равен нулю.

Теория индекса эллиптического оператора изучена многими авторами. В частности двумерная теория (R^2) в значительной степени была завершена к 1961 г. А. И. Вольпертом [1]. Он изучил общие граничные задачи для произвольной эллиптической системы в односвязной ограниченной области на плоскости, доказал эквивалентность эллиптичности и нетеровости этих задач в пространствах достаточно гладких функций. М. С. Агранович [2] доказал, что, для того чтобы сингулярный интегро-дифференциальный оператор на гладком многообразии был эллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы он был нетеровым. Л. А. Багиров [3] доказал, что если коэффициенты эллиптического оператора достаточно гладкие в R^n, то оператор в определенных весовых пространствах нетеров. Однако теория индекса полуэллиптического (семиэллиптического) оператора изучена недостаточно. В работах [4] и [5] доказано, что при накладывании некоторых дополнительных условий на символ оператора в R^n (в формулировке которых участвуют младшие члены) индекс оператора в определенных весовых пространствах конечен.

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: R^n – n-мерное евклидово пространство, Z_+^n – множество мультииндексов, т.е. векторов $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, где α_j, $j=1,...,n$, – целые неотрицательные числа. Для $x,\xi\in R^n$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_n)$ (ν_j, $j=1,...,n$, – натуральные четные числа) и $\alpha\in Z_+^n$ положим $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $\alpha!=\alpha_1!...\alpha_n!$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n}$,

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_k = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$, $i^2 = -1$, $(\alpha : \nu) = \frac{\alpha_1}{\nu_1} + ... + \frac{\alpha_n}{\nu_n}$, $\nu_{\max} = \max\limits_{1 \le j \le n} \nu_j$,

$|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$.

Определение 1. Для вектора с натуральными компонентами ν, ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и натурального числа k через $H^{k,\nu}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $\{u\}$ с конечной нормой

$$\| u \|_{k,\nu}\ (\Omega) \equiv \left(\sum_{(\alpha:\nu) \le k} \int_\Omega | D^\alpha u(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}, \tag{1}$$

а через $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1).

Для открытого ограниченного куба Δ ($\bar{\Omega} \subset \Delta$) и функции $\Phi \in \dot{H}^{k,\nu}(\Delta)$ обозначим $H^{k,\nu}(\Omega, \Phi) = \left\{ u \in H^{k,\nu}(\Omega); (u - \Phi) \in \dot{H}^{k,\nu}(\Omega) \right\}$.

Мы будем рассматривать операторы только с вещественными коэффициентами.

Определение 2. Линейный дифференциальный оператор $P(D) = \sum\limits_{(\alpha:\nu) \le 1} p_\alpha D^\alpha$ полуэллиптичен, если символ его главной части, т.е. ν-однородный многочлен $P^0(\xi) \equiv \sum\limits_{(\alpha:\nu)=1} p_\alpha \xi^\alpha$, удовлетворяет условию

$$P^0(\xi) \ne 0 \quad \text{при} \quad 0 \ne \xi \in R^n.$$

Определение 3. Линейный ограниченный оператор A, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2, нетеровый, если:

1) подпространство решений уравнения $Au = 0$ в B_1 имеет конечную размерность, т.е. $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$;

2) область значений $\{A : B_1\}$ оператора A в B_2 замкнута;

3) фактор-пространство $B_2 / \{A : B_1\}$ имеет конечную размерность, т.е. $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$.

Разность $\operatorname{Ind} A = \dim \ker A - \dim \operatorname{Coker} A$ называется индексом оператора A.

Из теории нетеровых операторов известно, что

$$\dim \operatorname{Ker} A^* = \dim \operatorname{Coker} A \ \text{ и } \ \dim \operatorname{Coker} A^* = \dim \operatorname{Ker} A,$$

где A^* – сопряженный к A оператор.

Пусть $P_0(D) \equiv \sum\limits_{(\alpha:\nu)=1} p_\alpha D^\alpha + p_0$ – полуэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, для которого $P_0(\xi) \ne 0$ при всех $\xi \in R^n$. Тогда очевидно, что с некоторой постоянной $\chi > 0$

$$|P_0(\xi)| \ge \chi(|\xi|_\nu + 1) \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^n, \tag{2}$$

где $|\xi|_\nu = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^{2\nu_k}\right)}$.

Известна (см. [6]) следующая

Теорема 1. Пусть $P_0(D)$ удовлетворяет условию (2). Тогда существует функция $u \in H^{1,\nu/2}(\Omega,\Phi)$, причем единственная которая является решением уравнения $P_0(D)u = 0$.

Следствие 1. Ядро оператора $P_0(D)$, действующего из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$, имеет нулевую размерность, т.е. $\dim \mathrm{Ker} P_0 = 0$.

Доказательство. Так как $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi) \subset H^{1,\nu/2}(\Omega,\Phi)$, то из теоремы 1 непосредственно следует, что уравнение $P_0(D)u = 0$ не может иметь более одного решения в $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$.

Пусть $P_0^*(D)$ – оператор, формально сопряженный к $P_0(D)$. Тогда очевидно, что $P_0^*(D)$ полуэллиптичен и его символ не равняется 0. Следовательно, как ядро оператора $P_0(D)$, так и ядро оператора $P_0^*(D)$, действующего из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$, имеет нулевую размерность, т.е. $\dim \mathrm{Coker}\, P_0 = 0$.

Из того, что область значений оператора $P_0(D)$ замкнута, следует, что оператор $P_0(D)$, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$, нетеровый и $\mathrm{Ind}\, P_0 = \dim \mathrm{Ker} P_0 - \dim \mathrm{Coker}\, P_0 = 0$.

Следовательно, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Оператор $P_0(D)$, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$, нетеровый, и его индекс равен нулю.

В дальнейшем будем предполагать, что $\Phi \in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Delta)$ – фиксированная функция, а область $\Omega \subset R^n$ удовлетворяет условию прямоугольника (см., например, [7]).

Известна (см. [2]) следующая

Теорема 3. Пусть $A(D)$ – ограниченный оператор из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$, для которого при любом $\varepsilon > 0$ с некоторой постоянной $M_\varepsilon > 0$

$$\|A(D)u\|_{k,\nu}(\Omega) \le \varepsilon \|u\|_{k+1,\nu}(\Omega) + M_\varepsilon \|u\|_{L_2}(\Omega) \quad \forall u \in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega).$$

Тогда $A(D)$ – компактный оператор из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$.

Пусть $P_1(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P_1(D) = \sum_{(\alpha:\nu)<1} p_\alpha D^\alpha .$$

Теорема 4. $P_1(D)$ – компактный оператор из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$.

Доказательство. Так как для любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha \in Z_+^n$ ($(\alpha:\nu) < 1$) (см. [7], гл. VI) существует постоянная $C_{\varepsilon,\alpha} > 0$ такая, что

$$\left\| D^{\alpha}u \right\|_{k,\nu}(\Omega) \le \varepsilon \left\| u \right\|_{k+1,\nu}(\Omega) + C_{\varepsilon,\alpha} \left\| u \right\|_{L_2}(\Omega) \quad \forall u \in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega),$$

то имеем

$$\left\| P_1(D)u \right\|_{k,\nu}(\Omega) = \left\| \sum_{(\alpha:\nu)<1} p_{\alpha} D^{\alpha}u \right\|_{k,\nu}(\Omega) \le \varepsilon C \left\| u \right\|_{k+1,\nu}(\Omega) + M_{\varepsilon} \left\| u \right\|_{L_2}(\Omega) \ \ \forall u \in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega),$$

где $C = card\{\alpha \in Z_+^n; (\alpha:\nu) < 1\} \max\limits_{(\alpha:\nu)<1} \left| p_{\alpha} \right|$, а $M_{\varepsilon} = \max\limits_{(\alpha:\nu)<1} C_{\varepsilon,\alpha}$.

Следовательно, в силу теоремы 2 $P_1(D)$ – компактный оператор из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$.

Следствие 2. $P_1(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$.

Доказательство. Пусть $u_n \in H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$, n=1,2,… Тогда $v_n \equiv u_n - \Phi \in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$. В силу теоремы 4 имеем, что из $\{P_1(D)v_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{P_1(D)v_{n_k}\}$ $\left(P_1(D)v_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} g_{\nu} \in \dot{H}^{k,\nu}(\Omega)\right)$. Но, с другой стороны, имеем

$$P_1(D)u_{n_k} = P_1(D)(v_{n_k} + \Phi) = P_1(D)v_{n_k} + P_1(D)\Phi \xrightarrow{k\to\infty} g_{\nu} + P_1(D)\Phi \in H^{k,\nu}(\Omega,\Phi).$$

Из теории нетеровых операторов хорошо известна (см. [8–10]) следующая

Теорема 5. Пусть $P(D)$ – нетеровый оператор, а $A(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$. Тогда оператор $P(D)+A(D)$ из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$ также будет нетеровым и $\mathrm{Ind}(P+A) = \mathrm{Ind}\,P$.

Теорема 6. Индекс полуэллиптического оператора с постоянными коэффициентами из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$ конечен и равен нулю.

Доказательство. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный полуэллиптический оператор с постоянными коэффициентами. Тогда для любого числа p_0' оператор $P(D)$ можно представить в следующем виде:

$$P(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_{\alpha} D^{\alpha} = P_0(D) + P_1(D),$$

где

$$P_0(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)=1} p_{\alpha} D^{\alpha} + p_0' \quad \text{и} \quad P_1(D) \equiv \sum_{(\alpha:\nu)<1} p_{\alpha} D^{\alpha} - p_0'.$$

Пусть число p_0' выбрано так, что $P_0(\xi) \ne 0$ при всех $\xi \in R^n$ (это возможно в силу полуэллиптичности и того, что коэффициенты оператора $P(D)$ вещественны).

Из теоремы 2 и следствия 2 следует, что $P_0(D)$ – нетеровый оператор ($\mathrm{Ind}\,P = 0$), а $P_1(D)$ – компактный оператор из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$.

Следовательно, в силу теоремы 5 оператор $P(D)$, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$, нетеровый и его индекс равен нулю.

Известна (см. [2]) следующая

Теорема 7. Пусть $P(D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$. Тогда, для того чтобы оператор $P(D)$ имел конечномерное ядро в $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ и замкнутую область значений в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)\right)\ \forall u\in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega),$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от функции u.

Следствие 3. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный самосопряженный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha ,$$

действующий из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$. Тогда, для того чтобы оператор $P(D)$ был нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)\right)\ \forall u\in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega),$$

где C – некоторая постоянная, не зависящая от функции u.

Следствие 4. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный полуэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$. Тогда с некоторой постоянной $C>0$ имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)\right)\ \forall u\in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega).$$

Доказательство следует из теорем 6 и 7.

Теорема 8. Пусть $P(D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega)$ в $\dot{H}^{k,\nu}(\Omega)$, для которого с некоторой постоянной $C>0$ выполняется

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)\right)\ \forall u\in \dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega). \qquad (3)$$

Тогда $P(D)$ – полуэллиптический оператор.

Доказательство. Пусть M – произвольное положительное число и $\xi\in R^n$. Положим $M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi=(M^{(1/\nu_1)/(k+1)}\xi_1, M^{(1/\nu_2)/(k+1)}\xi_2,\dots,M^{(1/\nu_n)/(k+1)}\xi_n)$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ и $\|\varphi\|_{L_2}(\Omega)=1$. Обозначим $u_\nu(x)\equiv e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}\varphi(x)$. Пусть $(\alpha:\nu)\le k+1$ ($\alpha\in Z_+^n$). Тогда имеем

$$D^{\alpha}u_{\nu}(x)=D^{\alpha}\left(e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}\varphi(x)\right)=\xi^{\alpha}M^{(\alpha:\nu)/(k+1)}e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}\varphi(x)+$$
$$+\sum_{0\le\beta<\alpha}\xi^{\beta}M^{(\beta:\nu)/(k+1)}e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}D^{\alpha-\beta}\varphi(x)= \tag{4}$$
$$=\xi^{\alpha}M^{(\alpha:\nu)/(k+1)}e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}\varphi(x)(1+\overline{o}(1)),\qquad M\to\infty.$$

В силу этого имеем

$$D^{\alpha}P(D)u_{\nu}(x)=\xi^{\alpha}M^{(\alpha:\nu)/(k+1)}e^{i(M^{(1/\nu)/(k+1)}\xi,x)}\sum_{(\beta:\nu)\le1}p_{\beta}\xi^{\beta}M^{(\beta:\nu)/(k+1)}\varphi(x)(1+\overline{o}(1)). \tag{5}$$

Поставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)\le k+1}\left|\xi^{\alpha}\right|M^{(\alpha:\nu)/(k+1)}\|\varphi\|_{L_2}(\Omega)(1+\overline{o}(1))\le$$
$$\le C\left(\sum_{(\alpha:\nu)\le k}\left|\xi^{\alpha}\right|M^{(\alpha:\nu)/(k+1)}\left|\sum_{(\beta:\nu)\le1}p_{\beta}\xi^{\beta}M^{(\beta:\nu)/(k+1)}\right|\|\varphi\|_{L_2}(\Omega)(1+\overline{o}(1))+\|\varphi\|_{L_2}(\Omega)\right). \tag{6}$$

Таким образом, устремив в (6) $M\to\infty$, заранее разделив на M ($\|\varphi\|_{L_2}(\Omega)=1$), получим

$$\sum_{(\alpha:\nu)=k+1}\left|\xi^{\alpha}\right|\le C\sum_{(\alpha:\nu)=k}\left|\xi^{\alpha}\right|\left|\sum_{(\beta:\nu)=1}p_{\beta}\xi^{\beta}\right|$$

и, следовательно,

$$\sum_{(\alpha:\nu)=1}\left|\xi^{\alpha}\right|\le C\left|P^{0}(\xi)\right|, \tag{7}$$

где $P^{0}(\xi)=\sum_{(\alpha:\nu)=1}p_{\alpha}\xi^{\alpha}$.

Докажем, что из (7) следует, что $P(D)$ – полуэллиптический оператор. Предположим обратное, т.е. что существует такое $0\ne\xi\in R^{n}$, для которого $P^{0}(\xi)=0$. Но из $\xi\ne0$ следует, что $\sum_{(\alpha:\nu)=1}\left|\xi^{\alpha}\right|>0$. Полученное противоречие доказывает, что $P(D)$ – полуэллиптический оператор.

Лемма 1. Пусть $P(D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le1}p_{\alpha}D^{\alpha}$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, для которого с некоторой постоянной $C>0$ выполняется

$$\|v\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)v\|_{k,\nu}(\Omega)+\|v\|_{L_2}(\Omega)\right)\quad\forall v\in\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega). \tag{8}$$

Тогда с некоторой (быть может другой) постоянной $C_1>0$ имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C_1\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\Phi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\right)\ \forall u\in H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть выполняется оценка (8). Докажем, что имеет место и оценка (9). В силу неравенства треугольника имеем

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)-\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le\|v\|_{k+1,\nu}(\Omega),$$
$$\|P(D)v\|_{k,\nu}(\Omega)\le\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|P(D)\varPhi\|_{k,\nu}(\Omega),\qquad(10)$$
$$\|v\|_{L_2}(\Omega)\le\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\varPhi\|_{L_2}(\Omega),$$
где $v\equiv u-\varPhi(v\in\dot{H}^{k+1,\nu}(\Omega))$.

Из оценок (8) и (10) в силу того, что $\varPhi$ – фиксированная функция, имеем

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le\|v\|_{k+1,\nu}(\Omega)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le$$
$$\le C\left(\|P(D)v\|_{k,\nu}(\Omega)+\|v\|_{L_2}(\Omega)\right)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le$$
$$\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|P(D)\varPhi\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\varPhi\|_{L_2}(\Omega)\right)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le$$
$$\le C_1\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\right).$$

Следствие 5. Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный полуэллиптический оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\varPhi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\varPhi)$. Тогда с некоторой постоянной $C>0$ имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\right)\quad\forall u\in H^{k+1,\nu}(\Omega,\varPhi).$$

Следствие 6. Пусть $P(D)=\sum_{(\alpha:\nu)\le1}p_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\varPhi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\varPhi)$, для которого с некоторой постоянной $C>0$ выполняется

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega)\le C\left(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega)+\|u\|_{L_2}(\Omega)+\|\varPhi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\right)\quad\forall u\in H^{k+1,\nu}(\Omega,\varPhi).$$

Тогда $P(D)$ – полуэллиптический оператор.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 8.

Пусть A – ограниченный оператор из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2. Ограниченный оператор R_1 из B_2 в B_1 называется левым регуляризатором для A, если $R_1A=I_1+T_1$, где I_1 – единичный, T_1 – компактный операторы в B_2.

Ограниченный оператор R_2 из B_2 в B_1 называется правым регуляризатором для A, если $AR_2=I_2+T_2$, где I_2 – единичный, T_2 – компактный операторы в B_2.

Если оператор A обладает левым регуляризатором R_1 и правым регуляризатором R_2, то

$$R_1AR_2=R_1(I_2+T_2)=(I_1+T_1)R_2,$$

откуда

$$R_1-R_2=T_1R_2-R_1T_2,$$

так что $R_1 - R_2$ – компактный оператор из B_2 в B_1. Отсюда следует, что в этом случае каждый из операторов R_1 и R_2 будет одновременно и левым, и правым регуляризатором. Оператор, являющийся одновременно и левым, и правым регуляризатором, называют регуляризатором для A.

Из теории нетеровых операторов хорошо известны (см. [8]) следующие теоремы.

Теорема 9. Пусть A – ограниченный оператор из B_1 в B_2. Тогда:

1) если A обладает левым регуляризатором R_1, то ядро оператора A в B_1 конечномерно;

2) если A обладает правым регуляризатором R_2, то область значений оператора A замкнута в B_2 и имеет там конечномерное коядро.

Теорема 10. Замкнутый линейный оператор нетеровый тогда и только тогда, когда он обладает ограниченным и левым, и правым регуляризаторами.

Основная теорема. Пусть $P(D) = \sum\limits_{(\alpha:\nu)\le 1} p_\alpha D^\alpha$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, действующий из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $P(D)$ – полуэллиптический оператор;

2) $P(D)$ – нетеровый оператор из $H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi)$ в $H^{k,\nu}(\Omega,\Phi)$;

3) с некоторой постоянной $C > 0$ имеет место оценка

$$\|u\|_{k+1,\nu}(\Omega) \le C\Big(\|P(D)u\|_{k,\nu}(\Omega) + \|u\|_{L_2}(\Omega) + \|\Phi\|_{k+1,\nu}(\Omega)\Big) \quad \forall u \in H^{k+1,\nu}(\Omega,\Phi);$$

4) оператор $P(D)$ ограничен и обладает регуляризатором.

Доказательство.

1=>2. Следует из теоремы 6.

2=>3. Следует из теоремы 7.

3=>1. Следует из следствия 6.

2<=>4. Следует из теоремы 10.

Российско-Армянский (Славянский) государственный университет, ЕГУ

Поступила 05.03.2008

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольперт А.И.** – Труды Моск. мат. общ-ва, 1961, т. 10, с. 41–87.
2. **Агранович М.С.** – Успехи мат. наук, 1965, т. 20, вып. 5 (125), с. 3–120.
3. **Багиров Л.А.** – Мат. сб., 1971, т. 86 (128), № 1 (9), с. 121–139.
4. **Карапетян Г.А., Дарбинян А.А.** – Вестник РАУ. Годичная научная конференция, 2006, с. 20–24.
5. **Карапетян Г.А., Дарбинян А.А.** – Изв. НАН Армении. Математика, 2007, т. 42, № 5, с. 33–50.

6. **Никольский С.М.** – Мат. Сб., 1963, т. 62(104), № 1, с. 53–75.
7. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
8. **Пресдорф З.** Некоторые классы сингулярных уравненный. М.: Мир, 1979.
9. **Seeley R.T.** – Journal of Math. Analysis And App., 1963, v. 7, p. 289–309.
10. **Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.** – Успехи мат. наук, 1957, т. 12, вып. 2(74), с. 43–118.

Գ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա. Ա. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԿԻՍԱԷԼԻՊՍԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՆՅՈՏԵՐԱՅՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ամփոփում

Այս աշխատանքը նվիրված է գծային դիֆերենցիալ հաստատուն գործակիցներով կիսաէլիպսային օպերատորի նյոտերայնության հետազոտմանը տիրույթում: Ապացուցվում է. որպեսզի օպերատորը լինի նյոտերային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի կիսաէլիպսային: Եվ, մասնավորապես, ապացուցվում է, որ հաստատուն գործակիցներով կիսաէլիպսային օպերատորի ինդեքսը տիրույթում հավասար է զրոյի:

G. A. KARAPETYAN, A. A. DARBINYAN

NOETHERICITY OF SEMI-ELLIPTICAL OPERATOR WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN THE RANGE

Summary

The current thesis describes the noethericity of the linear differential semi-elliptical operator with constant coefficients in the range. It’s proved, that in order the operator to be noetherian it is necessary and sufficient for it to be semi-elliptical. In particular it is proved that the index of the semi-elliptical operator with constant coefficients in the range is equal to zero.