ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 512.54

В. С. АТАБЕКЯН, А. С. ПАЙЛЕВАНЯН

ВЛОЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО СВОБОДНЫХ ГРУПП В ГРУППЫ $B(m,n,1)$

В работе доказывается, что каждая счетная абсолютно свободная группа изоморфно вкладывается в группу $B(m,n,1)$ для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$. Тем самым показано, что каждая из групп $B(m,n,1)$ порождает многообразие всех групп и группы $B(m,n,1)$ неаменабельные. В частности, число Тарского этих групп равно 4.

Введение. В работе [1] Титсом доказано, что любая неаменабельная матричная группа над полем характеристики 0 содержит неабелевую свободную группу. В частности любая полупростая группа Ли над полем характеристики 0 содержит такую подгруппу (см. [2]). Напоминаем, что группа G называется аменабельной, если для нее существует конечно-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре всех подмножеств группы G и такая, что $\mu(G)=1$ и $\mu(gA)=\mu(A)$ для всех $g \in G, A \subset G$. Как показано Нейманом [3], класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, факторгруппы, индуктивного предела, расширения. Важный критерий аменабельности группы был получен Р.И. Григорчуком [4]. Им же построен первый пример конечно-представленной аменабельной группы [5]. Существование неаменабельных групп без свободных подгрупп было доказано впервые А.Ю. Ольшанским [6] (контрпример к гипотезе Дея – Неймана). В работе [7] С.И. Адяном получен сильный результат в этом направлении. Им рассмотрен класс групп, проблема равенства слов в которых решается алгоритмом Дена (сейчас такие группы принято называть гиперболическими). Для них введены две числовые характеристики: коэффициент сходимости алгоритма Дена и величина, характеризирующая рост множества определяющих слов, а также дана оценка показателя роста через эти две величины. Это позволило доказать в [7], что относительно свободные группы $B(m,n)$ бернсайдова многообразия при $m \geq 2$ и нечетных $n \geq 665$ неаменабельны и случайное блуждание на $B(m,n)$ невозвратно. Тем самым, в частности, дается отрицательный ответ на вопрос Кестена (см. [8]). Последний результат был использован А.Ю. Ольшанским и М.В. Сапиром в работе [9] для построения первого примера конечно-определенной неаменабельной группы без свободных подгрупп ранга 2, чем решается, в частности, проблема Д. Коэна [10]. Работа Д. Осина [11] посвящена доказательству более сильной формы неаменабельности групп $B(m,n)$ достаточно большого нечетного периода.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. Каждая счетная абсолютно свободная группа изоморфно вкладывается в группу $B(m,n,1)$ для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$.

Свободная группа ранга 2 неаменабельна (см. [3]). Следовательно, любая группа, содержащая абсолютно свободную подгруппу ранга 2, тоже неаменабельна. Таким образом, имеет место

Следствие 1. Для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$ группа $B(m,n,1)$ неаменабельна.

Очевидно, свободные группы не вложимы в группу $B(m,n)$. С другой стороны, согласно [12], при указанных n группы $B(m,n)$ являются гомоморфными образами групп $B(m,n,1)$.

Поскольку F_2 порождает многообразие всех групп, то имеет место

Следствие 2. Для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$ каждая из групп $B(m,n,1)$ порождает многообразие всех групп.

Согласно теореме Деккера, для данной группы G число Тарского $\tau(G)=4$ тогда и только тогда, когда G содержит подгруппу, изоморфную неабелевой свободной группе (см., напр., [13]).

Следствие 3. Для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 665$ $\tau(B(m,n,1))=4$.

Все последующие обозначения взяты из [12].

1. Вычисления в свободной группе. Рассмотрим групповой алфавит $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$, где $\mathfrak{A} \rightleftharpoons \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, и пусть $B_i \rightleftharpoons b_{i+1} b_i^9 b_{i+1}$, $i=1,\ldots,m$, где $b_{m+1} \rightleftharpoons b_1$. Если в записи данного слова X каждую букву $b_i^{\pm 1}$ заменить на слово $B_i^{\pm 1}$, то полученное слово будем обозначать через $\tau(X)$. Ясно, что если $X \in \mathscr{R}_0$, то $\tau(X) \in \mathscr{R}_0$. Множество всех слов вида $\tau(X)$, где $X \in \mathscr{R}_0$, обозначим через $\tau(\mathscr{R}_0)$: $\tau(\mathscr{R}_0) \rightleftharpoons \{\tau(X);\, X \in \mathscr{R}_0\}$. Слова из множества $\tau(\mathscr{R}_0)$ будем называть τ-словами. Так как слово $B_i^2 B_j^2 B_i^2 B_j^{-2} B_i^{-2} B_j^{-2}$, $i,j=1,\ldots,m$, $i \neq j$, циклически несократимо и $\partial(B_i)=11$, то для любого слова $X \in \mathscr{R}_0$ имеет место равенство $\partial(\tau(X)) = 11 \cdot \partial(X)$. Из определения преобразования τ следует, что оно взаимооднозначным образом отображает множество $\mathscr{R}_0$ на множество τ-слов $\tau(\mathscr{R}_0)$, причем $\tau(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}_0 \cap \mathrm{gp}\{B_1, \ldots B_m\}$.

Если $V \rightleftharpoons P * E * Q$ – произвольное вхождение в слово X, то через $\tau(V)$ будем обозначать вхождение $\tau(P) * \tau(E) * \tau(Q)$ в слово $\tau(X)$.

Лемма 1.1. Пусть $X \in \mathscr{R}_0$. Тогда:

А. Слово $\tau(X)$ не содержит подслов следующих видов:

1. b_i^s, где $|s| \geq 10$,

2. $b_i^k b_j^{\pm 1} b_i^t$, $i \neq j$, где $|k| \geq 2$, $|t| \geq 2$,

3. $b_i^k b_j^t$, $i \neq j$, где $|k| \geq 3$, $|t| \geq 3$,

4. $b_j b_i^k b_j$, $i \neq j$, где $8 \geq |k| \geq 3$;

Б. Если $\tau(X) \equiv \tau(Y) F\, \tau(Z) F_1$, где Z – непустое слово, а $\partial(F) < \partial(B_i)$, то F есть пустое слово.

Доказательство.

А. Перебирая всевозможные подслова циклического слова $B_i^2 B_j^2 B_i^2 B_j^{-2} B_i^{-2} B_j^{-2}$, $i \neq j$, убеждаемся в справедливости утверждения А.

Б. Пусть слово X_1 есть несократимая запись слова $Y^{-1}X$. Тогда $\tau(X_1) \equiv F\, \tau(Z) F_1$. Если, скажем, $F \equiv b_j b_i^k$, $i \neq j$, где $2 \leq k \leq 9$, то, перебирая всевозможные начала слова $\tau(Z)$, получаем противоречие с пунктом А. Нетрудно убедиться также, что невозможны случаи $F \equiv b_j b_i$, $i \neq j$, или $\partial(F) = 1$. Отрицательные степени рассматриваются аналогичным образом. Значит, слово F есть пустое слово.

Лемма 1.2. Если $\tau(X) \in \text{Пер}(A)$, то $\exists Y (\tau(Y) \equiv D)$, где D – один из циклических сдвигов слова A.

Доказательство. Слово $\tau(X)$ представим в виде $\tau(X) \equiv \tau(Y) F\, \tau(Y) F F_1$, где $\tau(Y) F$ – циклический сдвиг слова A, причем $\partial(F) < \partial(B_i)$, а F_1 – непустое начало слова $\tau(Y) F$. Если Y – непустое слово, то по пункту Б леммы 1.1 получаем, что F есть пустое слово.

Предположим, Y есть пустое слово. Тогда и слово F, и слово FFF_1 являются началами слова $\tau(X)$. При $\partial(F) > 1$ это противоречит пунктам А.2 и А.4 предыдущей леммы, и так как очевидно, что $\partial(F) \neq 1$, то получается, что $A \equiv F \equiv \Lambda$ – противоречие.

Лемма 1.3. Если $\tau(X) \equiv R \tau(V_1) T \tau(V_2) Q$ и V_1, V_2 – непустые слова, то $\exists R_1 (\tau(R_1) \equiv R)$, $\exists Q_1 (\tau(Q_1) \equiv Q)$ и $\exists T_1 (\tau(T_1) \equiv T)$.

Доказательство. Если, скажем, $R \equiv \tau(Y_1) F$, где $\partial(F) < \partial(B_i)$, то, применив лемму 1.1, получим, что F есть пустое слово. Остальные утверждения доказываются аналогично.

Лемма 1.4. Пусть $R * V * Q$ есть вхождение в слово $\tau(X)$ и $V \in \text{Пер}(A)$, где $A \not\equiv b_i^{\pm k}$. Тогда $\exists Y (\tau(Y) \equiv D)$, где D – один из циклических сдвигов слова A.

Доказательство. Можно считать, что $V \equiv A^2 A'$. Если $\partial(A) < 11$, то A есть циклический сдвиг слова $b_j^{\pm 1} b_i^t$, что противоречит лемме 1.1, согласно которой A^2 не может входить в слово $\tau(X)$. Следовательно, $\partial(A) \geq 11$. Представляя A в виде $A \equiv F_1\, \tau(Y_1) F_2$, где Y_1 – непустое слово, получаем, что

$\tau(Y_1)F_2F_1\ \tau(Y_1)$ есть подслово в $\tau(X)$. Согласно лемме 1.3, $\exists Y_2\,(\tau(Y_2)\equiv F_2F_1)$, т.е. циклический сдвиг слова A имеет вид $\tau(Y_1Y_2)$.

Лемма доказана.

В дальнейшем запись $Y\prec Z$ будет означать, что слово Y есть подслово слова Z, а запись $Y\prec\tau(\mathcal{R}_0)$ будет означать, что слово Y входит в некоторое τ-слово. Из определения слов B_i, $i=1,\dots,m$, следует, что если $Y\equiv R\,x^9U\,y^9S\prec\tau(Z)$ и в слово R не входят слова вида t^9, где $t\in\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$, то R есть конец слова вида t^8uv, где $t\not\equiv u$ и $t,u,v\in\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$. В частности, $\partial(R)\le 10$. Аналогично S есть начало слова вида uvt^8 и $\partial(S)\le 10$.

Определение 1. Если имеем произвольное вхождение вида $P*R\,x^9\,U\,y^9S*Q$ в некоторое слово Y, где $Y\prec\tau(\mathcal{R}_0)$, и в слова R и S не входят слова вида t^9, где x, y и t – любые буквы алфавита $\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$, то $P\,R*x^9\,U\,y^9*SQ$ назовем *существенной частью этого вхождения*. Существенную часть вхождения V будем обозначать через V°:

$$(P*R\,x^9U\,y^9S*Q)^\circ \,\square\quad P\,R*x^9U\,y^9*SQ\,.$$

Например:

$$b_1{}^7b_2b_3{}^{-1}b_2{}^{-9}b_3{}^{-1}b_5b_4{}^9b_5b_3{}^{-1}b_2{}^{-1}=(b_1{}^7b_2)(b_3{}^{-1}b_2{}^{-9}b_3{}^{-1})(b_5b_4{}^9b_5)(b_3{}^{-1}b_2{}^{-1})\prec\tau(b_1b_2{}^{-1}b_4b_2{}^{-1}),$$

$$(b_1*b_1{}^6b_2b_3{}^{-1}b_2{}^{-9}b_3{}^{-1}b_5b_4{}^9b_5b_3{}^{-1}b_2{}^{-1}*)^\circ\equiv b_1{}^7b_2b_3{}^{-1}*b_2{}^{-9}b_3{}^{-1}b_5b_4{}^9*b_5b_3{}^{-1}b_2{}^{-1},$$

$$(b_1{}^7b_2b_3{}^{-1}b_2{}^{-9}b_3{}^{-1}*b_5b_4{}^9b_5b_3{}^{-1}*b_2{}^{-1})^\circ\equiv b_1{}^7b_2b_3{}^{-1}b_2{}^{-9}b_3{}^{-1}b_5*b_4{}^9*b_5b_3{}^{-1}b_2{}^{-1}\,.$$

Очевидно, что для любого вхождения V в слово $\tau(Z)$ имеет место $(V^\circ)^\circ\equiv V^\circ$.

Определение 2. Если имеем произвольное слово $R\,x^9\,U\,y^9S$, где $R\,x^9\,U\,y^9S\prec\tau(\mathcal{R}_0)$, и в слова R и S не входят слова вида t^9, где x, y и t – любые буквы алфавита $\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$, то слово $x^9\,U\,y^9$ назовем *существенной частью этого слова*. Существенную часть слова Y будем обозначать через Y°:

$$(R\,x^9U\,y^9S)^\circ \,\square\quad x^9U\,y^9\,.$$

Из определений 1 и 2 непосредственно следует, что Осн$((*Y*)^\circ)\equiv Y^\circ$.

Лемма 1.5. Если $W\,\square\ \ P*x^9R\,y^9*S$ (или $W\,\square\ \ P*x^9*S$) есть вхождение в некоторое слово $\tau(X)\in\tau(\mathcal{R}_0)$, где $x,y\in\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$, то $\exists Z(\tau(Z)^\circ\equiv x^9R\,y^9)$ (или $\exists Z(\tau(Z)^\circ\equiv x^9)$). Более того, существуют такие подслова P' и S' слова X, что $\tau(X)\equiv\tau(P')\tau(Z)\tau(S')$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $W=P*x^9R\,y^9*S$. Из определения слов B_i, $i=1,\dots,m$, следует, что существуют такие буквы $z,t\in\mathfrak{A}\bigcup\mathfrak{A}^{-1}$, что $z\,x^9z\,,t\,y^9t\in\{B_i^{\pm1}\}$ и $W\equiv P_1\,z*x^9z\,R_1\,t\,y^9*t\,S_1$. Тогда

$\tau(X) \equiv P_1 \tau(x) R_1 \tau(y)\, S_1$, где $\tau(x) \equiv z x^9 z$ и $\tau(y) \equiv t\, y^9 t$. Согласно лемме 1.3, $\exists R'(\tau(R') \equiv R_1)$, $\exists P'(\tau(P') \equiv P_1)$ и $\exists S'(\tau(S') \equiv S_1)$. Тем самым

$$\tau(X) \equiv \tau(P')\tau(x)\tau(R')\tau(y)\tau(S') \text{ и } (\tau(x)\tau(R')\tau(y))^\circ \equiv x^9 R\, y^9 .$$

Лемма доказана.

Несократимую запись данного слова X будем обозначать через $\overline{X}$.

Определение 3. Пусть $\tau(X)$ есть произвольное τ-слово и x_1, x_2 – любые буквы группового алфавита $\mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$. Тогда каждое из следующих трех слов $\overline{x_1\, \tau(X) x_2}$, $\overline{x_1\, \tau(X)}$, $\overline{\tau(X) x_2}$ будем называть *почти* $\tau(X)$*-словом.* Будем говорить, что почти $\tau(X)$-слово $\overline{x_1\, \tau(X) x_2}$ имеет *тип* (x_1, x_2). Почти $\tau(X)$-словам $\overline{x_1\, \tau(X)}$, $\overline{\tau(X) x_2}$ будем приписывать *типы* соответственно (x_1, Λ) и (Λ, x_2).

Например, слова $b_1^{-9} b_2^{-1} b_3 b_2^{9} b_3 b_1$ и $b_2^{-1} b_1^{-9} b_2^{-1} b_5 b_4^{9} b_5 b_6^{-1}$ являются почти $\tau(b_i^{-1} b_j)$-словами типов (b_2, b_1) и (Λ, b_6^{-1}) соответственно, так как $b_1^{-9} b_2^{-1} b_3 b_2^{9} b_3 b_1 \equiv \overline{b_2\, \tau(b_1^{-1} b_2) b_1}$ и $b_2^{-1} b_1^{-9} b_2^{-1} b_5 b_4^{9} b_5 b_6^{-1} \equiv \overline{\tau(b_1^{-1} b_5) b_6^{-1}}$.

Лемма 1.6. Любое почти $\tau(X)$-слово входит в некоторое τ-слово.

Доказательство. Например, если $b_i^{-1}\, \tau(X)$ – несократимое слово, то $\overline{b_i^{-1}\tau(X)}$ входит в $\tau(b_{i-1}^{-1} X)$, а если $b_i^{-1}\tau(X)$ – сократимое слово, то $\overline{b_i^{-1}\, \tau(X)}$ входит в слово $\tau(X)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Лемма 1.7. Если Y есть почти $\tau(X)$-слово, то $Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ$. Более того, $Y \equiv R\tau(X)^\circ S$, где $\partial(R) \le 2$ и $\partial(S) \le 2$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений 2 и 3.

Лемма 1.8. Пусть Y входит в некоторое τ-слово. Если $W \square\ P * x^9 U y^9 * Q$ есть вхождение в слово Y, где $x, y \in \mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$, то найдутся такие слова R_1 и S_1, что $P \equiv RR_1$, $Q \equiv S_1 S$ и $W_1 \square\ R_1 * x^9 U y^9 * S_1$ есть вхождение в Y°.

Доказательство. По определению существенная часть слова Y имеет вид $Y^\circ \equiv t^9 V z^9$ и $Y \equiv R\, t^9 V z^9 S$, где R – конец слова вида $r^8 uv$, $r \not\equiv u$, $v \not\equiv t$, S – начало слова вида kps^8, $z \not\equiv k$, $p \not\equiv s$ и $t, u, v, z, k, p, s \in \mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$. Поэтому слово $x^9 U y^9$ входит в слово $t^9 V z^9$.

Лемма 1.9. Пусть Y есть произвольное почти $\tau(X)$-слово и W – произвольное вхождение в слово Y с основой вида $x^9 U y^9$ или x^9. Тогда сопоставлениями $W \mapsto \varphi(W; (*Y*)^\circ, (*\tau(X)*)^\circ)$ осуществляется взаимооднозначное отображение множества всех вхождений слова Y с основами вида $x^9 U y^9$ или x^9 на множество всех вхождений слова $\tau(X)$ с основами вида $t^9 V z^9$ или t^9.

Доказательство. Согласно лемме 1.6, Y есть τ-слово, а по лемме 1.7, $Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ$, значит,

$$\text{Осн}\,((*Y*)^\circ) \equiv Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ \equiv \text{Осн}((*\tau(X)*)^\circ).$$

Следовательно, в силу леммы 1.8 основы всех указанных вхождений содержатся в $Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ$.

2. Переход от ранга 0 к рангу 1 и доказательство теоремы.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм из [12]. В ходе изложения при ссылках на монографию [12] мы будем указывать лишь номер утверждения, например: II.5.4 означает пункт 4 параграфа 5 главы II монографии [12].

Лемма 2.1.

А. $X \in \text{Пер}\,(A) \Leftrightarrow \tau(X) \in \text{Пер}\,(\tau(A))$.

Б. $V \in \text{Внутр}\,(X,A) \Leftrightarrow \tau(V) \in \text{Внутр}\,(\tau(X),\tau(A)) \Leftrightarrow \tau(V)^\circ \in \text{Внутр}\,(\tau(X),\tau(A))$.

В. $\text{Соот}_A(V,W) \Leftrightarrow \text{Соот}_{\tau(A)}(\tau(V),\tau(W)) \Leftrightarrow \text{Соот}_{\tau(A)}(\tau(V)^\circ,\tau(W)^\circ)$.

Доказательство. А. Следует из определений (см. [12]).

Б. Покажем, что из условия $\tau(V)^\circ \in \text{Внутр}\,(\tau(X),\tau(A))$ следует $\tau(V) \in \text{Внутр}\,(\tau(X),\tau(A))$. Пусть

$$\tau(V) □ \ \tau(P)*\tau(E)*\tau(Q),\ \tau(V)^\circ □ \ \tau(P)x*E_1*y\tau(Q),$$

$\partial(\tau(P)x) \geq 8\partial\tau(A)$ и $\partial(y\tau(Q)) \geq 8\partial\tau(A)$. Тогда $\partial(\tau(P)) \geq 8\partial(\tau(A))-1$. Так как $\partial(\tau(P))$ и $\partial(\tau(A))$ делятся на 11, то $\partial(\tau(P)) \geq 8\partial(\tau(A))$. Аналогично $\partial(\tau(Q)) \geq 8\partial(\tau(A))$. Остальные импликации непосредственно следуют из определений.

В. Следует из определения I.2.5.

Лемма 2.2. Пусть E – элементарная 9-степень ранга 1, входящая в слово Y, где $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$. Тогда $E \equiv x^9$, где $x \in \mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$. В частности, в слово Y не входит элементарная 10-степень ранга 1.

Доказательство. Согласно I.4.10, любое элементарное слово ранга 1 есть периодическое слово с элементарным периодом ранга 1. Очевидно, слова $b_i^{\pm 9}$, $i=1,\ldots,m$, являются периодическими 9-степенями ранга 1. По пункту А.1 леммы 1.1 и по лемме 1.4, если входящая в Y периодическая 9-степень E не совпадает с $b_i^{\pm 9}$, то в него входит слово вида $x\,y^9x$, где $x, y \in \mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$, что противоречит элементарности в ранге 1 слова E.

Лемма 2.3. Пусть $Y \prec \tau(X)$. Тогда $X \in \mathscr{P}_0 \Leftrightarrow Y \in \mathscr{P}_1$. В частности, $X \in \mathscr{P}_0 \Leftrightarrow \tau(X) \in \mathscr{P}_1$.

Доказательство. Если $X \in \mathscr{P}_0$, то X есть несократимое слово. Предположим, что $V \in \text{Норм}\,(1,Y,n-88)$. Тогда в слово Y входит такое нормальное элементарное слово E ранга 1, что $l_1(E) \geq n-88$. Значит, слово E входит и в слово $\tau(X)$, что противоречит лемме 2.2. Обратно, из условия

$Y \in \mathscr{P}_1 \subset \mathscr{R}_0$ следует $Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ \in \mathscr{R}_0$, поэтому $\tau(X) \in \mathscr{R}_0$. Остается заметить, что $\tau(X) \in \mathscr{R}_0 \Leftrightarrow X \in \mathscr{R}_0$.

Лемма 2.4. Пусть $Y \prec \tau(X)$. Тогда:

А. $X \in \mathscr{P}_0 \;\Leftrightarrow\; Y \in \mathscr{M}_1$;

Б. $X \in \mathscr{N}_0 \;\Leftrightarrow\; Y \in \mathscr{N}_1$.

В частности, $X \in \mathscr{P}_0 \;\Leftrightarrow\; \tau(X) \in \mathscr{M}_1$ и $X \in \mathscr{N}_0 \;\Leftrightarrow\; \tau(X) \in \mathscr{N}_1$.

Доказательство.

А. По лемме 2.3, из условия $X \in \mathscr{P}_0$ следует $Y \in \mathscr{P}_1$. Остальное доказывается, как и в лемме 2.3.

Б. Следует из I.4.21 и из лемм 2.2 и 1.6, согласно которым не существует нормированных вхождений q_1-степеней ранга 1 в слово Y.

Лемма 2.5. Пусть $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$. Тогда Акт(1, Y) $= \varnothing$.

Доказательство. Так как $\tau(X) \in \tau(\mathscr{R}_0) \Leftrightarrow X \in \mathscr{P}_0$, то по лемме 2.4 $Y \in \mathscr{N}_1$. Согласно I.4.23, если существует активное вхождение ранга 1 слова Y, то в Y входит некоторая элементарная q-степень ранга 1, что противоречит лемме 2.2.

Лемма 2.6. Пусть $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$, а V – вхождение в слово Y. Тогда

$$(V \in \text{Норм}(1,Y,9)) \Leftrightarrow (V \in \text{МаксНорм}(1,Y,9)) \Leftrightarrow (\text{Осн}(V) \equiv x^9, \text{где } x \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}).$$

Доказательство. Пусть, например, $Pb_j * b_i^9 * b_jQ$ есть вхождение в слово $Y \in \mathscr{R}_0$. Согласно I.4.13 и лемме 2.2, $Pb_j * b_i^9 * b_jQ \in \text{Норм}(1,Y,9)$, а, по I.4.12, $Pb_j * b_i^9 * b_jQ$ есть максимальное вхождение относительно порождающего вхождения $b_i^9 * b_i^9 * b_i^9$, т.е. $Pb_j * b_i^9 * b_jQ \in \text{МаксНорм}(1,Y,9)$. Обратное следует из леммы 2.2.

Лемма 2.7. Пусть $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$, а V есть вхождение в слово Y. Тогда

$$V \in \text{Я}(1,Y) \;\Leftrightarrow\; (\text{Осн}(V) \equiv x^9, \text{где } x \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}).$$

Доказательство. По лемме 2.5, в Y не содержится активное ядро ранга 1. Значит, согласно I.4.24, $W \in \text{МаксНорм}(1,Y,9) \Leftrightarrow W \in \text{Я}(1,Y)$. Остается ссылаться на леммы 2.6 и 2.4.

Лемма 2.8. Пусть $X \in \mathscr{R}_0$, $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$, $Y^\circ \equiv \tau(X)^\circ$ и $V \in \text{Я}(0,X)$. Тогда сопоставлениями $V \mapsto \tau(V)^\circ$ осуществляется взаимооднозначное отображение из множества $\text{Я}(0,X)$ на множество $\text{Я}(1,Y)$.

Доказательство. По I.4.1, если $V \in \text{Я}(0,X)$, то $\text{Осн}(V) \equiv x$, где $x \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$. Тогда Осн $(\tau(V)^\circ) \equiv x^9$ и по лемме 2.7 $\tau(V)^\circ \in \text{Я}(1,Y)$. Обратно, если $V \in \text{Я}(1,Y)$, то по лемме 2.7 Осн $(V) \equiv x^9$, где $x \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$. Тогда по лемме 1.8, слово x^9 входит в слово $\tau(X)$ и можно применить лемму 1.5.

Лемма 2.9. Пусть $X \in \mathscr{R}_0$, $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$ и $Y^{\circ} \equiv \tau(X)^{\circ}$. Если $W \in$ Прав $(1, Y)$, то вхождение W или имеет вид $P * x^9 * S$, или имеет вид $P * x^9 R\, y^9 * S$, где $x, y \in \mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$.

Доказательство. Следует из определения I.4c и леммы 2.8.

Лемма 2.10. Пусть $X \in \mathscr{R}_0$, $Y \prec \tau(\mathscr{R}_0)$, $Y^{\circ} \equiv \tau(X)^{\circ}$ и $V \in$ Прав $(0, X)$. Тогда сопоставлениями $V \mapsto \tau(V)^{\circ}$ осуществляется взаимооднозначное отображение множества $V \in$ Прав $(0, X)$ на множество Прав $(1, Y)$.

Доказательство. Очевидно, если вхождение P есть начало (конец) вхождения V, то $\tau(P)$ есть начало (конец) вхождения $\tau(V)$ и $\tau(P)^{\circ}$ есть начало (конец) вхождения $\tau(V)^{\circ}$. Поэтому утверждение лемм следует из определения I.4c и из лемм 2.8, 2.9 и 1.5.

Лемма 2.11. Пусть $Y \prec \tau(X)$. Тогда $Y \overset{1}{\square} Z \Leftrightarrow Y \equiv Z \in \mathscr{R}_1$.

Доказательство. Следует из леммы 2.5 и IV.2.15.

Лемма 2.12. $\tau(Y) \overset{1}{\square} \tau(X) \Leftrightarrow Y \overset{0}{\square} X$.

Доказательство. Следует из леммы 2.11.

Доказательство теоремы. Рассмотрим подгруппу $\mathrm{gp}\{\tau(b_1), \tau(b_2), ..., \tau(b_m)\}$ группы $B(m,n,1)$. Согласно лемме 2.12, $\tau(X) \overset{1}{\square} \Lambda \Leftrightarrow X \overset{0}{\square} \Lambda$, где Λ – пустое слово. Значит, если X есть несократимое слово в групповом алфавите $\mathfrak{A} \bigcup \mathfrak{A}^{-1}$, то $\tau(X) \overset{B(m,n,1)}{\neq} 1$. Тем самым отображение $\tau : F_m \to B(m,n,1)$ есть вложение свободной группы F_m со свободными образующими $b_1, b_2, ..., b_m$.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 31.01.2008*

ЛИТЕРАТУРА

1. **J. Tits** – J. Algebra, 1972, v. 20, p. 250–270.
2. **Vershik**. Comments to papers by J. von Neumann. In: J. von Neumann, Selected works in functional analizis. Moscow: Nauka, 1987, v. 1, p. 357–376.
3. **J. von Neumann** – Fundam. math., 1929, v. 13, p. 73–116.
4. **Grigorchuk R.I.** – Adv. Probab. Related Topics, 1980, v. 6, p. 285–325.
5. **Grigorchuk R.I.** – Mat.sb., 1998, v. 189, № 1, p. 79–100.
6. **Ol'shanskii A.Yu.** – Uspekhi Mat. Nauk, 1980, v. 4, № 214, p. 199–200.
7. **Адян С.И.** – Изв.АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, № 6, с. 1139–1149.
8. **Kesten H.** – Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 2, p. 336–354.
9. **Ol'shanskii A.Yu., Sapir M.V.** – Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 2003, № 96, p. 43–169.
10. **Cohen J.M.** – J. Funct. Anal., 1982, v. 48, № 3, p. 301–309.
11. **Osin D.V.** – Arch.Math. (Basel), 2007, v. 88, № 5, p. 403–412.
12. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

Վ. Ս. ԱԹԱԲԵԿՅԱՆ, Ա. Ս. ՓԱՀԼԵՎԱՆՅԱՆ

ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԱԶԱՏ ԽՄԲԵՐԻ ՆԵՐԴՐՈՒՄԸ $B(m,n,1)$ ԽՄԲԵՐԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ յուրաքանչյուր հաշվելի բացարձակ ազատ խումբ իզոմորֆորեն ներդրվում է $B(m,n,1)$ խմբի մեջ կամայական $m \geq 2$ -ի և կենտ $n \geq 665$ -ի դեպքում: Դրանով իսկ ցույց է տրվում, որ $B(m,n,1)$ խմբերից յուրաքանչյուրը ծնում է բոլոր խմբերի բազմաձևությունը և որ $B(m,n,1)$ խմբերը ոչ ամենաբելյան են: Մասնավորապես, այս խմբերի Տարսկիի թիվը հավասար է 4-ի:

V. S. ATABEKIAN, A. S. PAHLEVANIAN

EMBEDDING OF ABSOLUTELY FREE GROUPS INTO GROUPS $B(m,n,1)$

Summary

In this paper we prove that each countable absolutely free group can be isomorphic embedded into groups $B(m,n,1)$ for arbitrary $m \geq 2$ and odd $n \geq 665$. Thereby is shown that each group $B(m,n,1)$ generates the variety of all groups, and groups $B(m,n,1)$ are non-amenable. Particularly Tarski's number is equal to 4.