ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

Д. С. ДАВИДОВА

СПЛЕТЕННЫЕ БИРЕШЕТКИ

В данной статье доказывается, что сплетенная бирешетка, одна из операций которой обладает единицей, изоморфна суперпроизведению двух решеток.

В работе более простыми методами доказывается один из результатов статьи [1].

Определение 1. Пусть $(L_1;\cap,\cup)$ и $(L_2;\otimes,\oplus)$ – решетки**.** Суперпроизведением $L_1 \bowtie L_2$ данных решеток называется алгебра

$$\left(L_1\times L_2;\underbrace{\langle\cap,\otimes\rangle,\langle\cap,\oplus\rangle}_{I},\underbrace{\langle\cap,\oplus\rangle,\langle\cup,\otimes\rangle}_{II}\right),\qquad(*)$$

в которой все четыре операции действуют на множестве $L_1\times L_2$ покомпонентно [2].

Из определения видно, что суперпроизведение – это алгебра с двумя структурами решеток. Следовательно, на суперпроизведении имеются два отношения порядка. Выясним, как они задаются.

Порядок на решетках $(L_1;\cap,\cup)$ и $(L_2;\otimes,\oplus)$ будем обозначать через $\le_1$ и $\le_2$ соответственно.

Рассмотрим их суперпроизведение, т.е. алгебру (*).

Пусть $(x_1,x_2)\le_I(y_1,y_2)$, тогда

$$(x_1,x_2)\langle\cap,\otimes\rangle(y_1,y_2)=(x_1\cap y_1,x_2\otimes y_2)=(x_1,x_2)\to$$
$$(x_1,x_2)\le_I(y_1,y_2)\leftrightarrow x_1\le_I y_1\ \&\ x_2\le_2 y_2.\qquad(1)$$

Пусть $(x_1,x_2)\le_{II}(y_1,y_2)$, тогда

$$(x_1,x_2)\langle\cap,\oplus\rangle(y_1,y_2)=(x_1\cap y_1,x_2\oplus y_2)=(x_1,x_2)\to$$
$$(x_1,x_2)\le_{II}(y_1,y_2)\leftrightarrow x_1\le_I y_1\ \&\ y_2\le_2 x_2.\qquad(2)$$

Рассмотрим алгебру $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ с двумя структурами решетки: $(L;\cap,\cup)$, $(L;*,\Delta)$. Отношения порядка на них задаются соответственно следующим образом:

$$x\le_\cap y\leftrightarrow x\cap y=x;\qquad x\le_* y\leftrightarrow x*y=x.$$

Определение 2. Алгебра $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ с четырьмя бинарными операциями называется бирешеткой, если $(L;\cap,\cup)$ и $(L;*,\Delta)$ есть решетки.

Определение 3. Бирешетка называется сплетенной, если все четыре операции сохраняют оба отношения порядка, т.е.,

если $a \le_\cap b$ и $c \le_\cap d$, то $a*c \le_\cap b*d$ & $a\Delta c \le_\cap b\Delta d$;

если $a \le_* b$ и $c \le_* d$, то $a\cap c \le_* b\cap d$ & $a\cup c \le_* b\cup d$.

Бирешетка будет сплетенной тогда и только тогда, когда в ней выполняется следующее сверхтождество [2]:

$$X(Y(X(x,y),z),Y(y,z)) = Y(X(x,y),z), \qquad (**)$$

где $X,Y\in \{\cap,\cup,*,\Delta\}$, $x,y,z\in L$.

Действительно. Покажем, например, что из условия $x \le_\cap y \to x*z \le_\cap y*z$ следует тождество $[(x\cap y)*z]\cap(y*z)=(x\cap y)*z$ и, наоборот.

$(\to)$ Пусть $x \le_\cap y$, тогда $x\cap y = x$. В этом случае получаем

$$(x*z)\cap(y*z)=[(x\cap y)*z]\cap(y*z)=(x\cap y)*z = x*z.$$

Следовательно, $x*z \le_\cap y*z$.

$(\leftarrow)$ Знаем, что $x\cap y \le_\cap x$, тогда $(x\cap y)*z \le_\cap y*z$. Таким образом, $[(x\cap y)*z]\cap(y*z)=(x\cap y)*z$.

Остальные эквивалентности доказываются аналогично.

Предположим, что операция $*$ обладает единицей e, т.е.

$$\exists e\in L\ \forall x\in L\ x*e = x.$$

Лемма 1. Пусть $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ – сплетенная бирешетка, тогда для любого $x\in L$ имеем $x \le_* x\cap e$ и $x \le_* x\cup e$.

Доказательство непосредственно следует из определения бирешетки. Т.к. $x \le_* x$ и $x \le_* e$, то $x = x\cap x \le_* x\cap e$ и $x = x\cup x \le_* x\cup e$. ■

Лемма 2. Пусть $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ – сплетенная бирешетка, тогда для любого $x\in L$ имеем $(x\cap e)*(x\cup e) = x$.

Доказательство. Имеем, что $x\cap e \le_\cap x$, поэтому, согласно определению сплетенной бирешетки, получаем $(x\cap e)*(x\cup e) \le_\cap x*(x\cup e) = x$. С другой стороны, $x \le_\cap x\cup e$, поэтому $x = x*(x\cup e) \le_\cap (x\cap e)*(x\cup e)$. Таким образом, получаем, что $x \le_\cap (x\cap e)*(x\cup e) \le_\cap x$, т.е. $(x\cap e)*(x\cup e) = x$. ■

Теорема. Пусть $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ – сплетенная бирешетка, а операция $*$ обладает единицей e. Тогда бирешетка $(L;\cap,\cup,*,\Delta)$ изоморфна суперпроизведению двух решеток.

Доказательство. Пусть $A = \{a\cap e \mid a\in L\}$, $B = \{a\cup e \mid a\in L\}$. Покажем, что эти множества являются решетками относительно операций $\cap$ и $\cup$. Для этого покажем их замкнутость относительно операций $\cap$ и $\cup$.

$\forall a\cap e, b\cap e\in A$ имеем $(a\cap e)\cap(b\cap e) = (a\cap b)\cap e\in A$.

Т.к. $a \cap e \leq_{\cap} e$ и $b \cap e \leq_{\cap} e$, то $(a \cap e) \cup (b \cap e) \leq_{\cap} e$, значит,

$$(a \cap e) \cup (b \cap e) = [(a \cap e) \cup (b \cap e)] \cap e \in A.$$

Пусть $a \cup e, b \cup e \in B$, тогда $(a \cup e) \cup (b \cup e) = (a \cap b) \cup e \in B$.

Т.к. $e \leq_{\cap} a \cup e$ и $e \leq_{\cap} b \cup e$, то $e \leq_{\cap} (a \cup e) \bigcap (b \cup e)$, значит,

$$(a \cup e) \cap (b \cup e) = [(a \cup e) \cap (b \cup e)] \cup e \in B.$$

Теперь покажем, что имеют место следующие эквивалентности:

$$\forall x, y \in A \quad x \leq_{\cap} y \leftrightarrow x \leq_{*} y, \tag{3}$$

$$\forall x, y \in B \quad x \leq_{\cap} y \leftrightarrow y \leq_{*} x. \tag{4}$$

Вначале докажем (3). Т.к. $x, y \in A$, то $x = a \cap e$, $y = b \cap e$.

$(\to)$ Покажем, что если $a \cap e \leq_{\cap} b \cap e$, то $a \cap e \leq_{*} b \cap e$.

Из $a \cap e \leq_{\cap} b \cap e$ следует, что

$$a \cap e = (a \cap e) \cap (b \cap e) = a \cap b \cap e. \tag{5}$$

Покажем, что $a \cap b \cap e \leq_{*} b \cap e$. Преобразуем выражение $a \cap b \cap e$: $a \cap b \cap e = b \cap (a \cap e) = b \cap ((a \cap e) * e)$, тогда $[a \cap b \cap e] * (b \cap e) = [b \cap ((a \cap e) * e)] * (b \cap e)$. Согласно сверхтождеству (**), получаем, что $[b \cap ((a \cap e) * e)] * (b \cap e) = [b \cap ((a \cap e) * e)] = a \cap b \cap e$. А это означает, что

$$a \cap b \cap e \leq_{*} b \cap e. \tag{6}$$

Таким образом, из (5) и (6) получаем искомое неравенство $a \cap e \leq_{*} b \cap e$.

$(\leftarrow)$ Покажем, что если $a \cap e \leq_{*} b \cap e$, то $a \cap e \leq_{\cap} b \cap e$.

Из определения сплетенной бирешетки получаем, что из $a \cap e \leq_{*} b \cap e$ следует $a \cap e \leq_{*} a \cap b \cap e$. Покажем, что имеет место также и обратное неравенство, т.е. $a \cap b \cap e \leq_{*} a \cap e$. Действительно, так как $a \cap b \cap e = a \cap [(b \cap e) * e]$, то

$$(a \cap b \cap e) * (a \cap e) = [a \cap [(b \cap e) * e]] * (a \cap e).$$

Согласно сверхтождеству (**) имеем

$$a \cap [(b \cap e) * e] * (a \cap e) = (a \cap b \cap e) * (a \cap e),$$

поэтому $a \cap b \cap e = (a \cap b \cap e) * (a \cap e)$, т.е. $a \cap b \cap e \leq_{*} a \cap e$. Таким образом, $a \cap b \cap e = a \cap e$. Далее, $(a \cap e) \cap (b \cap e) = a \cap b \cap e = a \cap e$, следовательно, $a \cap e \leq_{\cap} b \cap e$.

Перейдем к доказательству (4). Т.к. $x, y \in B$, то $x = a \cup e$, $y = b \cup e$.

$(\to)$ Покажем, что если $a \cup e \leq_{\cap} b \cup e$, то $b \cup e \leq_{*} a \cup e$.

Из $a \cup e \leq_{\cap} b \cup e$ следует, что

$$a \cup e = (a \cup e) \cup (b \cup e) = a \cup b \cup e. \tag{7}$$

Проверим, что $a \cup b \cup e \leq_{*} a \cup e$. Преобразуем выражение $a \cup b \cup e$: $a \cup b \cup e = a \cup (b \cup e) = a \cup ((b \cup e) * e)$, тогда $[a \cup b \cup e] * (a \cup e) = [a \cup ((b \cup e) * e)] * (a \cup e)$. Согласно сверхтождеству (**) получаем, что $[a \cup ((b \cup e) * e)] * (a \cup e) = a \cup ((b \cup e) * e) = a \cup b \cup e$. А это означает, что

$$a \cup b \cup e \leq_{*} a \cup e. \tag{8}$$

Таким образом, из (7) и (8) получаем искомое неравенство $b \cup e \le_* a \cup e$.

($\leftarrow$) Покажем, что если $b \cup e \le_* a \cup e$, то $a \cup e \le_\cap b \cup e$.

По определению 3 из $b \cup e \le_* a \cup e$ следует $b \cup e \le_* a \cup b \cup e$.

Теперь покажем, что имеет место также и обратное неравенство, т.е. $a \cup b \cup e \le_* b \cup e$. Действительно, т.к. $a \cup b \cup e = b \cup [(a \cup e) * e]$, то

$$(a \cup b \cup e) * (b \cup e) = [b \cup [(a \cup e) * e]] * (b \cup e).$$

Согласно сверхтождеству (**) имеем $b \cup [(a \cup e) * e] = [b \cup [(a \cup e) * e]] * (b \cup e)$. Следовательно, получаем требуемое неравенство: $a \cup b \cup e \le_* b \cup e$. Таким образом, $a \cup b \cup e = b \cup e$.

С другой стороны, $(a \cup e) \cup (b \cup e) = a \cup b \cup e = b \cup e$, поэтому $a \cup e \le_\cap b \cup e$.

Определим отображение $\varphi: L \to A \bowtie B$ следующим образом:

$$x \xrightarrow{\varphi} (x \cap e, x \cup e). \tag{9}$$

Докажем, что это отображение будет изоморфизмом решетки L на суперпроизведение решеток A и B.

а) *Инъективность.*

$$\varphi(x) = \varphi(y) \to (x \cap e, x \cup e) = (y \cap e, y \cup e) \to x \cap e = y \cap e \ \& \ x \cup e = y \cup e$$
$$\to (x \cap e) * (x \cup e) = (y \cap e) * (y \cup e).$$

Согласно лемме 2 получаем $(x \cap e) * (x \cup e) = x$, $(y \cap e) * (y \cup e) = y$. Следовательно, $x = y$.

б) *Сюръективность.*

Допустим, что $(a \cap e, b \cup e) \in A \times B$. Пусть $t = (a \cap e) * (b \cup e)$, тогда $\varphi(t) = (t \cap e, t \cup e)$. Рассмотрим элементы $t \cap e$ и $t \cup e$. Имеем $t = (a \cap e) * (b \cup e) \le_* a \cap e$ и $t = (a \cap e) * (b \cup e) \le_* b \cup e$, поэтому согласно определению 2

$$t \cap e \le_* a \cap e \text{ и } t \cup e \le_* b \cup e. \tag{10}$$

Т.к. $e \le_\cap b \cup e$, то $a \cap e = (a \cap e) * e \le_\cap (a \cap e) * (b \cup e)$, т.е. $a \cap e \le_\cap t \cap e$. Поскольку $t \cap e$ и $a \cap e \in A$, то согласно (3)

$$a \cap e \le_\cap t \cap e \leftrightarrow a \cap e \le_* t \cap e. \tag{11}$$

Аналогично $a \cap e \le_\cap e$, поэтому $(a \cap e) * (b \cup e) \le_\cap e * (b \cup e) = b \cup e$, т.е. $t \cup e \le_\cap b \cup e$. Поскольку $t \cup e$ и $a \cup e \in B$, то согласно (4)

$$t \cup e \le_\cap b \cup e \leftrightarrow b \cup e \le_* t \cup e. \tag{12}$$

Т.е. из (10), (11) и (12) получаем, что $t \cap e = a \cap e$, а $t \cup e = b \cup e$.

Таким образом, имеем, что $\forall (a \cap e, b \cup e) \in A \times B \quad \exists t \in L$ такое, что $\varphi(t) = (a \cap e, b \cup e)$. Тем самым доказана сюръективность отображения.

в) *Гомоморфность.*

Для доказательства гомоморфности надо показать, что

$$a \le_\cap b \leftrightarrow \varphi(a) \le_I \varphi(b), \tag{13}$$
$$a \le_* b \leftrightarrow \varphi(a) \le_{II} \varphi(b). \tag{14}$$

Покажем (13).

($\to$) Из $a \le_{\cap} b$ по определению 3 следует, что $a \cap e \le_{\cap} b \cap e$ & $a \cup e \le_{\cap} b \cup e$, т.е. $a \cap e \le_A b \cap e$ & $a \cup e \le_B b \cup e$, поэтому согласно (1) получаем $\varphi(a) = (a \cap e, a \cup e) \le_I (b \cap e, b \cup e) = \varphi(b)$.

($\leftarrow$) Если $\varphi(a) \le_I \varphi(b)$, то по (9) $(a \cap e, a \cup e) \le_I (b \cap e, b \cup e)$, тогда согласно (1) $a \cap e \le_A b \cap e$ & $a \cup e \le_B b \cup e$, откуда следует, что $a \cap e \le_{\cap} b \cap e$ & $a \cup e \le_{\cap} b \cup e$, и по определению 3 получаем, что $(a \cap e) * (a \cup e) \le_{\cap} (b \cap e) * (b \cup e)$. Отсюда по лемме 2 получаем то, что и требовалось, т.е. $a \le_{\cap} b$.

Теперь перейдем к доказательству (14).

($\to$) Из $a \le_* b$ по определению 3 следует, что $a \cap e \le_* b \cap e$ & $a \cup e \le_* b \cup e$, откуда по (3) и (4) получаем $a \cap e \le_{\cap} b \cap e$ & $b \cup e \le_{\cap} a \cup e$. Следовательно, $a \cap e \le_A b \cap e$ & $b \cup e \le_B a \cup e$. Т.е. по (2) получаем, что $\varphi(a) = (a \cap e, a \cup e) \le_{II} (b \cap e, b \cup e) = \varphi(b)$.

($\leftarrow$) Если $\varphi(a) \le_{II} \varphi(b)$, то по (9) $(a \cap e, a \cup e) \le_{II} (b \cap e, b \cup e)$, тогда согласно (2) $a \cap e \le_A b \cap e$ & $b \cup e \le_B a \cup e$, следовательно, $a \cap e \le_{\cap} b \cap e$ & $b \cup e \le_{\cap} a \cup e$. Тогда по (3) и (4) получаем, что $a \cap e \le_* b \cap e$ & $a \cup e \le_* b \cup e$, и по определению 3 имеем $(a \cap e) * (a \cup e) \le_* (b \cap e) * (b \cup e)$. Отсюда по лемме 2 получаем то, что и требовалось, а именно: $a \le_* b$. ■

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 27.12.2007*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Movsisyan Yu.M., Romanowska A.B., Smith J.D.H.** – Comb. Math. And Comb.Comp., 2006, v. 58, p. 101–111.
2. **Мовсисян Ю.М.** Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: ЕГУ, 1986.

Դ. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎԱ

ՀՅՈՒՍՎԱԾ ԵՐԿԿԱՎԱՐՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է, որ հյուսված երկկավարը, որի գործողություններից մեկը օժտված է միավորով, իզոմորֆ է երկու կավարների սուպերարտադրյալին:

D. S. DAVIDOVA

INTERLACED BILATTICES

Summary

In the present paper we have proved, that interlaced bilattices, one of the operations of which has identity element, is isomorphic to superproduct of two lattices.