ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

С. С. ДАВИДОВ

О ПАРАСТРОФАХ АБЕЛЕВЫХ ОБРАТИМЫХ АЛГЕБР

В работе доказывается, что парастрофы абелевой обратимой алгебры также являются абелевыми алгебрами, в частности каждая абелевая (медиальная) квазигруппа удовлетворяет сверхтождеству абелевости.

Бинарная алгебра называется абелевой, если в ней выполняется сверхтождество абелевости

$$X(Y(a,b),Y(c,d)) = Y(X(a,c),X(b,d)). \tag{1}$$

Абелевые алгебры изучались различными авторами (Ацел,Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) (см., напр., [1–7]) под различными названиями: энтропийная, медиальная, бикоммутативная, бисимметричная алгебры. Абелевые алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации [5], с теорией тканей и номографией, а также находят приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В полиномиальной алгебре любой коммутативной группы (полугруппы) выполняется сверхтождество (1). Ему же удовлетворяет точное бинарное представление коммутативной полугруппы [1]. Тривиальному сверхтождеству абелевости (т.е. при $X = Y$) удовлетворяют точные бинарные представления моноида, полугруппы и идемпотентной полугруппы.

Бинарная алгебра тогда и только тогда абелева, когда в ней суммируемы гомоморфизмы $(\varphi,\tilde{\psi})$ [3–5]. Сверхтождеству абелевости удовлетворяют модические алгебры, связанные с аффинной и проективной геометриями [4].

Примеры.

1. Пусть $Q(+,\cdot)$ – поле и для любых $x, y \in Q$

$$A_t(x, y) = tx + (1-t)y,$$

где $t \in Q$ и 1 – единица поля. Если $\Sigma = \{A_t \mid t \in Q\}$, то в соответствующей бинарной алгебре (Q,Σ) выполняется сверхтождество абелевости.

2. Пусть $G(\cdot)$ – коммутативная полугруппа и для любых $x, y \in G$, $n \in N$

$$A_n(x, y) = x^n y^n .$$

Если $\Sigma = \{A_n \mid n \in N\}$, то в соответствующей бинарной алгебре (Q,Σ) выполняется сверхтождество абелевости.

3. Пусть $I \subseteq R$ – открытый, замкнутый, полузамкнутый, конечный или бесконечный промежуток, а $k : I \to R$ – непрерывная и строго монотонная функция. Квазиарифметическим средним называется функция вида

$$M(x,y) = k^{-1}\left(\frac{k(x)+k(y)}{2}\right), \quad x,y \in I .$$

Примерами квазиарифметических средних служат среднее арифметическое ($k(x) = x$), среднее экспоненциальное ($k(x) = e^{cx}, c \neq 0$), среднее квадратичное ($k(x) = x^2$), среднее геометрическое ($k(x) = \ln x$) и т.д. Если Σ – множество всех квазиарифметических средних, определенных на I, относительно которых промежуток I замкнут, то алгебра (I,Σ) удовлетворяет тривиальному сверхтождеству абелевости [8]

$$M(M(x,y),M(u,v)) = M(M(x,u),M(y,v)) .$$

Пусть (Q,Σ) – обратимая алгебра, тогда с каждой операцией $A \in \Sigma$ ассоциированы две обратимые операции A^{-1} и ${}^{-1}A$, которые удовлетворяют тождествам

$$A(a, A^{-1}(a,b)) = A^{-1}(a, A(a,b)) = b , \tag{2}$$

$$A({}^{-1}A(b,a),a) = {}^{-1}A(A(b,a),a) = b . \tag{3}$$

Рассматривая для A^{-1} и ${}^{-1}A$ их обратные операции и повторяя этот процесс, получаем еще операции ${}^{-1}(A^{-1})$, $({}^{-1}A)^{-1}$ и операцию A^*, где $A^*(x,y) = A(y,x)$. Других обратных операций для A не существует.

Таким образом, с каждой обратимой алгеброй (Q,Σ) связаны следующие пять обратимых алгебр: (Q,Σ^{-1}), $(Q,{}^{-1}\Sigma)$, $(Q,{}^{-1}(\Sigma^{-1}))$, $(Q,({}^{-1}\Sigma)^{-1})$, (Q,Σ^*), где

$$\Sigma^{-1} = \{A^{-1} \mid A \in \Sigma\} ,$$

$${}^{-1}\Sigma = \{{}^{-1}A \mid A \in \Sigma\} ,$$

$${}^{-1}(\Sigma^{-1}) = \{{}^{-1}(A^{-1}) \mid A \in \Sigma\} ,$$

$$({}^{-1}\Sigma)^{-1} = \{({}^{-1}A)^{-1} \mid A \in \Sigma\} ,$$

$$\Sigma^* = \{A^* \mid A \in \Sigma\} .$$

Каждая из этих алгебр называется парастрофом исходной алгебры.

Предложение 1. Если обратимая алгебра абелева, то абелевой будет также алгебра (Q,Σ^*).

Доказательство. Проверим, что в алгебре (Q,Σ^*) выполняется сверхтождество абелевости.

$$A^*(B^*(x,y),B^*(u,v)) = A(B^*(u,v),B^*(x,y)) = A(B(v,u),B(y,x)) = B(A(v,y),A(u,x)) =$$
$$= B^*(A^*(x,u),A^*(y,v)) .$$

Лемма 1. Пусть (Q,Σ) – абелевая обратимая алгебра, тогда для любых $A,B \in \Sigma$ и любых $x,y,u,v \in Q$ выполняются следующие равенства:

$$A^{-1}(B(x,y),B(u,v)) = B(A^{-1}(x,u),A^{-1}(y,v)), \quad (4)$$

$$^{-1}A(B(x,y),B(u,v)) = B(^{-1}A(x,u),{}^{-1}A(y,v)). \quad (5)$$

Доказательство. Для любых $A,B \in \Sigma$ и любых $x,y,u,v \in Q$ рассмотрим равенство

$$A^{-1}(B(x,y),B(u,v)) = B(A^{-1}(x,u),A^{-1}(x,v'))$$

(элемент $v' \in Q$ существует ввиду обратимости рассматриваемых операций). Пользуясь определением правой обратной операции A^{-1}, получим

$$A(B(x,y),B(A^{-1}(x,u),A^{-1}(y,v))) = B(u,v').$$

Отсюда, используя сверхтождество абелевости, получим

$$B(A(x,A^{-1}(x,u)),A(y,A^{-1}(y,v))) = B(u,v').$$

Поэтому согласно (1) имеем $B(u,v) = B(u,v')$, т.е. $v = v'$. Аналогично доказывается второе равенство.

Предложение 2. Если обратимая алгебра (Q,Σ) абелева, то абелевыми будут также алгебры (Q,Σ^{-1}) и $(Q,{}^{-1}\Sigma)$.

Доказательство. Для произвольных $A,B \in \Sigma$ и $x,y,u,v \in Q$ рассмотрим равенство

$$A^{-1}(B^{-1}(x,y),B^{-1}(u,v')) = B^{-1}(A^{-1}(x,u),A^{-1}(y,v))$$

(элемент $v' \in Q$ существует ввиду обратимости рассматриваемых операций). Пользуясь определением правой обратной операции A^{-1}, получим

$$A(B^{-1}(x,y),B^{-1}(A^{-1}(x,u),A^{-1}(y,v))) = B^{-1}(u,v').$$

Согласно лемме 1 получим

$$B^{-1}(A(x,A^{-1}(x,u)),A(y,A^{-1}(y,v))) = B^{-1}(u,v').$$

Используя (1), имеем $B^{-1}(u,v) = B^{-1}(u,v')$, т.е. $v = v'$. Таким образом, алгебра (Q,Σ^{-1}) удовлетворяет сверхтождеству абелевости.

Рассмотрим теперь равенство

$$^{-1}A(^{-1}B(x',y),{}^{-1}B(u,v)) = {}^{-1}B(^{-1}A(x,u),{}^{-1}A(y,v))$$

(элемент $x' \in Q$ существует ввиду обратимости рассматриваемых операций). Пользуясь определением обратной операции ^{-1}A, получим

$$A(^{-1}B(^{-1}A(x,u),{}^{-1}A(y,v)),{}^{-1}B(u,v)) = {}^{-1}B(x',y).$$

Согласно лемме 1 будем иметь

$$^{-1}B(A(^{-1}A(x,u),u),A(^{-1}A(y,v),v)) = {}^{-1}B(x',y)$$

или, используя (2), $^{-1}B(x,y) = {}^{-1}B(x',y)$, т.е. $x = x'$.

Лемма 2. Пусть (Q,Σ) – абелевая обратимая алгебра, тогда для любых $A,B \in \Sigma$ и любых $x,y,u,v \in Q$ выполняются следующие равенства:

$$^{-1}(A^{-1})(B^{-1}(x,y),B^{-1}(u,v)) = B^{-1}(^{-1}(A^{-1})(x,u),{}^{-1}(A^{-1})(y,v)), \quad (6)$$

$$(^{-1}A)^{-1}(^{-1}B(x,y),{}^{-1}B(u,v)) = {}^{-1}B((^{-1}A)^{-1}(x,u),(^{-1}A)^{-1}(y,v)). \quad (7)$$

Доказательство. Для любых $A, B \in \Sigma$ и любых $x, y, u, v \in Q$ рассмотрим равенство

$$^{-1}(A^{-1})(B^{-1}(x', y), B^{-1}(u, v)) = B^{-1}(^{-1}(A^{-1})(x, u), ^{-1}(A^{-1})(y, v))$$

(элемент $x' \in Q$ существует ввиду обратимости рассматриваемых операций). Пользуясь определением обратной операции ^{-1}A, получим

$$A^{-1}(B^{-1}(^{-1}(A^{-1})(x, u), ^{-1}(A^{-1})(y, v)), B^{-1}(u, v)) = B^{-1}(x', y) .$$

Отсюда согласно предложению 2 будем иметь

$$B^{-1}(A^{-1}((^{-1}(A^{-1})(x, u), u), A^{-1}(^{-1}(A^{-1})(y, v), v) = B^{-1}(x', y)$$

или, используя (1), $B^{-1}(x, y) = B^{-1}(x', y)$, т.е. $x = x'$. Равенство (5) доказано. Для доказательства равенства (6) поступаем аналогично:

$$(^{-1}A)^{-1}(^{-1}B(x, y), ^{-1}B(u, v')) = {}^{-1}B((^{-1}A)^{-1}(x, u), (^{-1}A)^{-1}(y, v)) ,$$

$$^{-1}A(^{-1}B(x, y), ^{-1}B((^{-1}A)^{-1}(x, u), (^{-1}A)^{-1}(y, v))) = {}^{-1}B(u, v') ,$$

$$^{-1}B(^{-1}A(x, (^{-1}A)^{-1}(x, u)), ^{-1}A(y, (^{-1}A)^{-1}(y, v))) = {}^{-1}B(u, v') ,$$

$$^{-1}B(u, v) = {}^{-1}B(u, v') , \text{ т.е. } v = v' .$$

Предложение 3. Если обратимая алгебра (Q, Σ) абелева, то абелевыми будут также алгебры $(Q, ^{-1}(\Sigma^{-1}))$, $(Q, (^{-1}\Sigma)^{-1})$.

Доказательство. Надо доказать, что в каждой из алгебр $(Q, ^{-1}(\Sigma^{-1}))$, $(Q, (^{-1}\Sigma)^{-1})$ выполняется сверхтождество абелевости. Для этого поступаем аналогично доказательству предложения 2. Рассмотрим равенство

$$^{-1}(A^{-1})(^{-1}(B^{-1})(x', y), ^{-1}(B^{-1})(u, v)) = {}^{-1}(B^{-1})(^{-1}(A^{-1})(x, u), ^{-1}(A^{-1})(y, v)) .$$

Согласно определению операции $^{-1}(A^{-1})$ будем иметь

$$A^{-1}(^{-1}(B^{-1})(^{-1}(A^{-1})(x, u), ^{-1}(A^{-1})(y, v)), ^{-1}(B^{-1})(u, v)) = {}^{-1}(B^{-1})(x', y),$$

далее, используя лемму 3, получим

$$^{-1}(B^{-1})(A^{-1}(^{-1}(A^{-1})(x, u), u), A^{-1}(^{-1}(A^{-1})(y, v), v)) = {}^{-1}(B^{-1})(x', y) ,$$

поэтому $^{-1}(B^{-1})(x, y) = {}^{-1}(B^{-1})(x', y)$ или $x = x'$. Этим доказано, что алгебра $(Q, ^{-1}(\Sigma^{-1}))$ будет абелевой. Аналогично проверяется абелевость алгебры $(Q, (^{-1}\Sigma)^{-1})$.

Теорема. Если обратимая алгебра (Q, Σ) абелева, то абелевой будет также алгебра $(Q, \Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup {}^{-1}\Sigma \cup \Sigma^{*} \cup {}^{-1}(\Sigma^{-1}) \cup (^{-1}\Sigma)^{-1})$.

Доказательство. Имея равенства (4)–(7) и предложения 1–3, для доказательства теоремы остается доказать следующие равенства:

1. $A(B^{*}(x, y), B^{*}(u, v)) = B^{*}(A(x, u), A(y, v))$;
2. $A(^{-1}(B^{-1})(x, y), ^{-1}(B^{-1})(u, v)) = {}^{-1}(B^{-1})(A(x, u), A(y, v))$;
3. $A((^{-1}B)^{-1}(x, y), (^{-1}B)^{-1}(u, v)) = (^{-1}B)^{-1}(A(x, u), A(y, v))$;
4. $A^{-1}(^{-1}B(x, y), ^{-1}B(u, v)) = {}^{-1}B(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v))$;
5. $A^{-1}(B^{*}(x, y), B^{*}(u, v)) = B^{*}(A^{-1}(x, u), A^{-1}(y, v))$;

6. $^{-1}A(B^*(x,y),B^*(u,v))=B^*(^{-1}A(x,u),{}^{-1}A(y,v))$;

7. $A^{-1}((^{-1}B)^{-1}(x,y),(^{-1}B)^{-1}(u,v))=(^{-1}B)^{-1}(A^{-1}(x,u),A^{-1}(y,v))$;

8. $^{-1}A(^{-1}(B^{-1})(x,y),{}^{-1}(B^{-1})(u,v))={}^{-1}(B^{-1})(^{-1}A(x,u),{}^{-1}A(y,v))$;

9. $(^{-1}A)^{-1}(^{-1}(B^{-1})(x,y),{}^{-1}(B^{-1})(u,v))={}^{-1}(B^{-1})(^{-1}A)^{-1}(x,u),(^{-1}A)^{-1}(y,v))$;

10. $A^*(^{-1}(B^{-1})(x,y),{}^{-1}(B^{-1})(u,v))={}^{-1}(B^{-1})(A^*(x,u),A^*(y,v))$;

11. $A^*((^{-1}B)^{-1}(x,y),(^{-1}B)^{-1}(u,v))=(^{-1}B)^{-1}(A^*(x,u),A^*(y,v))$.

Эти равенства доказываются аналогично равенствам (4)–(7).

Следствие. В абелевой (медиальной) квазигруппе $Q(\cdot, /, \backslash)$ выполняется сверхтождество абелевости.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 11.02.2008*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М.** – УМН, 1988, т. 53, с. 61–114.
2. **Jezek J., Kepka T.** Medial groupoids. Praha, 1983.
3. **Курош А.Г.** Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
4. **Romanowska A.B., Smith J.D.H.** Modes. Singapore: World Scientific,2002.
5. **Smith J.D.H.** – Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1990, v. 108, p. 435–443.
6. **Мовсисян Ю.М.** Введение в теорию алгебр со сверхтождествами. Ер.: Изд. ЕГУ, 1986.
7. **Movsisyan Yu.M.** – Scientiae Mathematicae Japonicae, 2001, v. 54, № 3, p. 595–640.
8. **Ацел Я., Домбр Ж.** Функциональные уравнения с несколькими переменными. М.: Физматлит, 2003.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ԱԲԵԼՅԱՆ ՀԱԿԱԴԱՐՁԵԼԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՊԱՐԱՍՏՐՈՖՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցված է, որ աբելյան հակադարձելի հանրահաշիվների պարաստրոֆները նույնպես աբելյան հանրահաշիվներ են, մասնավորապես յուրաքանչյուր աբելյան (մեդիալ) քվազիխումբ բավարարում է աբելյան գերնույնությանը:

S. S. DAVIDOV

ON PARASTROPHES OF ABELIAN INVERTIBLE ALGEBRAS

Summary

In the present paper we have proved that parastrophes of the abelian invertible algebras are also abelian, in particular every abelian (medial) quasigroup satisfies the abelian hyperidentity.