ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

А. В. КЕРОПЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННЫХ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМИ УПРУГИМИ РАЗНОРОДНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Рассматривается класс контактных задач для упругих тел, моделированных в виде упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые вдоль линии $y=0$ в плоскости xoy усилены разнородными стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с различными упругими характеристиками. Контактное взаимодействие между стрингерами и деформируемыми основаниями в полубесконечных участках происходит через тонкий слой клея, а в конечном участке осуществлен идеальный механический контакт. Деформация происходит под действием горизонтальных сил, приложенных к стрингерам. Задача определения контактных напряжений сведена к системе сингулярных интегральных уравнений на конечных интервалах, решение которой строится с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева. Определены контактные напряжения в полубесконечних участках. Выяснен характер поведения контакных напряжений в конечном и полубесконченых участках. Рассмотрены некоторые возможные предельные случаи, в частности, приведены решения для случая с однородными стрингерами.

Для краткого изложения работы в основе постановки задачи в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость. Результаты для бесконечной пластины приведены по ходу решения по возможности с одинаковыми обозначениями.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E или модуль сдвига G, коэффициент Пуассона ν) усилена на границе $y=0$ (в плоскости xoy) разнородными стрингерами малой толщины h и с модулями упругости E_1 при $|x|>b$ и E_2 при $|x|<a$. Контакт между стрингерами и деформируемым основанием при $|x|>b$ осуществляется через тонкий слой клея (E_k, ν_k, h_k), а при $|x|<a$ имеет место идеальный механический контакт. Задача заключается в

определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров, т.е. в точках $x = \pm a$, $x = \pm b$, приложены горизонтальные силы P, а в точках $x = \pm c$ – горизонтальные силы Q $(c > b > a)$.

Решение рассматриваемых задач в краткой форме приведено в работе [1]. Аналогичная задача при отсутствии слоя клея рассмотрена в работе [2]. Задачи для случая, когда контактное взаимодействия в конечном участке происходит через слой клея, а в полубесконечных участках осуществляется идеальный механический контакт рассмотрены в работах [3, 4]. В работе [5] рассмотрена задача с двумя конечными стрингерами, а в [6] – с двумя полубесконечными стрингерами. Динамическая контактная задача с двумя полубесконечными стрингерами без учета материала склеивания рассмотрена в работе [7]. Для стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [3–6].

Поскольку рассматриваемые здесь задачи в определенном смысле связаны с задачами, рассмотренными в [3, 4], воспользуемся аналогичными обозначениями, приведенными в них.

Согласно вышесказанному, запишем дифференциальные уравнения равновесия стрингеров с помощью обобщенных функций в виде двух уравнений [3, 4]:

$$\frac{dU_1^{(1)}(x)}{dx} = \frac{\tau_1(x)}{E_1 h} - \frac{Q[\delta(x-c) - \delta(x+c)]}{E_1 h} + \frac{P[\delta(x-b) - \delta(x+b)]}{E_1 h}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dU_0^{(1)}(x)}{dx} = \frac{\tau_0(x)}{E_2 h} - \frac{P[\delta(x-a) - \delta(x+a)]}{E_2 h}, \quad -\infty < x < \infty . \tag{1.2}$$

Здесь

$$U_1^{(1)}(x) = \left[\theta(-x-b) + \theta(x-b)\right] du^{(1)} / dx, \; U_0^{(1)}(x) = \left[\theta(x+a) - \theta(x-a)\right] du^{(1)} / dx, \tag{1.3}$$

$$\tau_1(x) = \left[\theta(-x-b) + \theta(x-b)\right]\tau(x), \; \tau_0(x) = \left[\theta(x+a) - \theta(x-a)\right]\tau(x), \; \tau(x) = \tau_0(x) + \tau_1(x),$$

где $u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ – нтенсивность неизвестных касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

Для частей стрингера, находящихся на $|x| \geq b$, будем иметь условие [3–6]

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x,0) = k\tau(x), \tag{1.4}$$

которое в обобщенных функциях представим так:

$$U_1^{(1)}(x) = U_1^{(2)}(x) + k\tau_1^*(x), \tag{1.5}$$

где $\tau_1^*(x) = \tau_1'(x) - \tau(b)[\delta(x-b) + \delta(x+b)]$, $\tau(b)$ – значения $\tau(x)$ в точке $x = b$ при $\tau(-x) = -\tau(x)$, причем $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1+\nu_k)$, штрих означает дифференцирование по x, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

Деформации граничных точек упругой полуплоскости в обобщенных функциях представим в виде [3, 4]

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=U^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\tau_0(s)+\tau_1(s)\right]}{s-x}ds. \qquad (1.6)$$

Здесь

$$U^{(2)}(x)=U_1^{(2)}(x)+U_0^{(2)}(x)+G_u(x),\ \ U_1^{(2)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(2)}/dx,$$

$$U_0^{(2)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx, \qquad (1.7)$$

$$G_u(x)=[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)]g_u(x),$$

$$g_u(x)=du^{(2)}/dx,\ \ x\in(-b,-a)\cup(a,b),\ \ A=E\big/2(1-\nu^2)=2G(1-\chi^2),\ \ \chi^2=(1-2\nu)/2(1-\nu).$$

При решении задачи для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния (в предположении, что стрингеры находятся на поверхности пластины по линии $y=0$, xoy – средняя плоскость пластины), в (1.6) следует A заменить на $A^*=8Gd/b_1^*\left(3-\nu\right)$, где d – толщина пластины, в (1.1) и (1.2) h следует заменить площадями поперечных сечений элементов стрингера F, а $\tau_j(x)$ на $b_1^*\tau_j(x)$ $(j=0;1)$ в (1.5) k на $k^*=k\big/b_1^*$, где b_1^* – ширина стрингеров в скленных контактных участках.

Для части стрингера, находящегося на отрезке $[-a,a]$, условие контакта в обобщенных функциях будет

$$U_0^{(1)}(x)=U_0^{(2)}(x). \qquad (1.8)$$

Для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями, принятыми в [3, 4].

Теперь, применив к (1.1), (1.5) и (1.6) обобщенные преобразования Фурье, а затем поступив аналогичным образом с (1.2), (1.6) и (1.8), получим два функциональных уравнения на действительной оси $-\infty<\sigma<\infty$, которые приводятся к уравнению

$$(\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2)\overline{\tau}_1(\sigma)+(\lambda_2^2+2\beta|\sigma|)\overline{\tau}_0(\sigma)=\frac{i\sigma}{k}\overline{G}_u(\sigma)+2i\lambda_1^2Q\sin c\sigma-$$
$$-2i\lambda_1^2P\sin b\sigma+2i\lambda_2^2P\sin a\sigma+2i\sigma\tau(b)\cos b\sigma,\qquad -\infty<\sigma<\infty, \qquad (1.9)$$

где

$$\lambda_j^2=1\big/kE_jh,\ \ j=1,2,\ \ \beta=1\big/2kA,\ \ \overline{\tau}_i(\sigma)=F[\tau_i(x)],\quad i=0,1. \qquad (1.10)$$

Для бесконечной пластины в (1.9) λ_j^2 следует заменить на $\overline{\lambda}_j^2=1\big/k^*E_jF$, $j=1,2$, а β на $\beta^*=1\big/2k^*A^*$.

Таким образом, задачи сведены к решению функциональных уравнений типа (1.9).

§2. Решение функционального уравнения (1.9). Представим уравнение (1.9) в виде

$$\overline{\tau}(\sigma)+\frac{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2}-\frac{\sigma^2\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2}=\frac{i\sigma\overline{G}_u(\sigma)}{k(\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2)}+\overline{g}_\beta(\sigma),\ \ -\infty<\sigma<\infty, \qquad (2.1)$$

а после обратного преобразования Фурье запишем так:

$$\tau(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau_0(s)ds+\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau_0(s)ds+\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}K'_\beta(x-s)G_u(s)ds=g_\beta(x),$$

$$-\infty<x<\infty. \tag{2.2}$$

Здесь

$$K_\beta(x)=F^{-1}[\bar{K}_\beta(\sigma)],\;\; \tau(x)=F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)],\;\; \tau_0(x)=F^{-1}[\bar{\tau}_0(\sigma)],\;\; G_u(x)=F^{-1}[\bar{G}_u(\sigma)],$$

$$\bar{K}_\beta(\sigma)=\frac{1}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},\; K'_\beta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\sigma e^{-i\sigma x}d\sigma}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},\;\; K''_\beta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\sigma^2 e^{-i\sigma x}d\sigma}{\lambda_1^2+2\beta|\sigma|+\sigma^2},$$

$$\begin{gathered}g_\beta(x)=F^{-1}[\bar{g}_\beta(\sigma)]=Q\lambda_1^2[K_\beta(x-c)-K_\beta(x+c)]-\\ -P\lambda_1^2[K_\beta(x-b)-K_\beta(x+b)]+P\lambda_2^2[K_\beta(x-a)-K_\beta(x+a)]-\\ -\tau(b)[K'_\beta(x-b)+K'_\beta(x+b)].\end{gathered}\tag{2.3}$$

Из (2.2) будем иметь

$$\begin{gathered}\tau(x)+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau(s)ds+\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau(s)ds+\\ +\frac{1}{k}\int_{a}^{b}[K'_\beta(x-s)+K'_\beta(x+s)]g_u(s)ds=g_\beta(x),\quad x\in(-a,a),\\ \frac{1}{k}\int_{a}^{b}[K'_\beta(x-s)+K'_\beta(x+s)]g_u(s)ds+(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^{a}K_\beta(x-s)\tau(s)ds+\\ +\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau(s)ds=g_\beta(x),\quad x\in(a,b),\end{gathered}\tag{2.4}$$

при условиях

$$\int_{-a}^{a}\tau(s)ds=0,\qquad \int_{b}^{\infty}\tau(s)ds=Q-P.\tag{2.5}$$

При получении (2.4) имелось в виду, что $g_u(-x)=g_u(x)$, а также $\tau(x)=0$ при $x\in(-b,-a)\cup(a,b)$ и $\tau(x)=\tau_0(x)$ при $|x|<a$.

Таким образом, задачи сведены к решению системы интегральных уравнений вида (2.4) при условиях (2.5). После решения системы (2.4) значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из уравнения (2.2) при требовании $|x|>b$.

Теперь отметим некоторые возможные предельные случаи, которые непосредственно можно получить из уравнений (2.2) и (2.4) подстановками: а) при $k=0$ – задача из [2]; б) при $\lambda_2^2=\lambda_1^2=\lambda^2$ – случай однородных стрингеров, т.е. $E_2=E_1$; в) при $a\to 0$ – случай с двумя полубесконечными стрингерами [6]; г) при $k=0$ и $a\to b$ – задача с кусочно-однородным бесконечным стрингером с учетом неизвестной $P=X$; д) при $k=0$, $a\to b$ и $\lambda_1^2=\lambda_2^2=\lambda_1=A/E_l h$ – известная задача Мелана. Таким образом, будут получены основные разрешающие уравнения для перечисленных выше задач при соответствующих приложенных силах.

Отметим, что в случае $E_2 = E_1$ (случай б) вместо уравнений (2.2) и (2.4) будем иметь

$$\tau(x)+\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau(s)ds+\frac{1}{k}\int_{a}^{b}[K'_\beta(x-s)+K'_\beta(x+s)]g_u(s)ds=g^*_\beta(x),\ x\in(-\infty,\infty), \quad (2.2^*)$$

$$\tau(x)+\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau(s)ds+\frac{1}{k}\int_{a}^{b}[K'_\beta(x-s)+K'_\beta(x+s)]g_u(s)ds=g^*_\beta(x),\ x\in(-a,a), \quad (2.4^*)$$

$$\frac{1}{k}\int_{a}^{b}[K'_\beta(x-s)+K'_\beta(x+s)]g_u(s)ds+\int_{-a}^{a}K''_\beta(x-s)\tau(s)ds=g^*_\beta(x)\ ,\ x\in(a,b),$$

где $g^*_\beta(x)$ получается из $g_\beta(x)$ при замене $\lambda_2^2=\lambda_1^2=\lambda^2$.

Для решения системы интегральных уравнений (2.4) представим $\bar{K}_\beta(\sigma)$ в виде [6]

$$\bar{K}_\beta(\sigma)=\frac{1}{(b_2-b_1)}\left(\frac{1}{b_1+|\sigma|}-\frac{1}{b_2+|\sigma|}\right), \quad (2.6)$$

и поскольку

$$K_{b_j}(x)=F^{-1}\left[\frac{1}{b_j+|\sigma|}\right]=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|b_jx|}+R_{b_j}(x),$$

$$K'_{b_j}(x)=F^{-1}\left[\frac{-i\sigma}{b_j+|\sigma|}\right]=-\frac{1}{\pi x}+\frac{b_j}{2}\operatorname{sgn}x+R_{\beta_j}(x),\quad j=1,2, \quad (2.7)$$

то будем иметь

$$K_\beta(x)=F^{-1}[K_\beta(\sigma)]=\frac{\gamma}{\pi}\ln\left(\frac{b_2}{b_1}\right)+\gamma R(x),$$

$$K'_\beta(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x+\gamma R_\beta(x),\ K''_\beta(x)=-\delta(x)+\gamma R_\beta{}'(x), \quad (2.8)$$

где

$$b_1=\frac{\lambda_1^2}{\beta+\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\qquad b_2=\frac{\lambda_1^2}{\beta-\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}},\qquad \gamma=\frac{1}{b_2-b_1}=\frac{1}{2\sqrt{\beta^2-\lambda_1^2}}\ ,$$

$$R(x)=R_{b_1}(x)-R_{b_2}(x)\ ,\qquad R_\beta(x)=R_{\beta_1}(x)-R_{\beta_2}(x)\ ,$$

$$R_{b_j}(x)=-\frac{C}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(b_jx)^{2k}}{\pi(2k)!}\left(\ln\frac{1}{|b_jx|}+1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2k}-C\right)-\frac{|b_jx|^{2k-1}}{2(2k-1)!}\right],$$

$$R_{\beta_j}(x)=b_j\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(b_jx)^{2k-1}}{\pi(2k-1)!}\left(\ln\frac{1}{|b_jx|}+1+...+\frac{1}{2k-1}-C\right)+\frac{(b_jx)^{2k}}{2(2k)!}\operatorname{sgn}x\right],\ j=1,2, \quad (2.9)$$

$\delta(x)$ – функция Дирака , C – постоянная Эйлера, $K_\beta(0)=(\gamma/\pi)\ln(b_2/b_1)$ (здесь и далее штрих означает дифференцирование по x).

Здесь следует отметить, что в (2.8) функции $R(x)$ и $R_\beta(x)$, характеризующие регулярные части ядер $K_\beta(x)$ и $K'_\beta(x)$, обладают тем свойством, что они имеют суммируемые с квадратом производные на отрезках $[-a,a]$ и $[a,b]$.

Заметим, что $K''_\beta(x)$ можно представить и так:

$$K''_\beta(x) = -\delta(x) + \frac{2\beta}{\pi}\ln\frac{1}{|x|} + \gamma\tilde{R}(x), \qquad (2.8^*)$$

поскольку $\quad R'_\beta(x) = R'_{\beta_1}(x) - R'_{\beta_2}(x) = \dfrac{(b_2^2 - b_1^2)}{\pi}\ln\dfrac{1}{|x|} + \tilde{R}(x).$

Здесь

$$\tilde{R}(x) = r_*(x) + R_*(x), \quad r_*(x) = r_{11}(x) - r_{12}(x), \quad R_*(x) = R'_{21}(x) - R'_{22}(x),$$

$$R'_{\beta_j}(x) = R'_{1j}(x) + R'_{2j}(x),$$

$$R'_{1j}(x) = -\frac{b_j^2}{\pi}\ln\frac{1}{|x|} + r_{1j}(x), \quad r_{1j}(x) = \frac{b_j^2}{\pi}\ln b_j + \frac{Cb_j^2}{\pi} - \frac{b_j^3|x|}{2}, \quad j = 1,2.$$

В дальнейшем используется также

$$\tilde{R}'(x) = r_*'(x) + R_*'(x) = \frac{(b_2^3 - b_1^3)}{2}\operatorname{sgn} x + \overline{R}_1(x), \quad \overline{R}_1(x) = R'_*(x),$$

где функции $R_{\beta_j}(x)$, $j = 1,2$, согласно (2.9), представлены в виде двух слагаемых: $R_{\beta_j}(x) = R_{1j}(x) + R_{2j}(x)$, причем $R_{1j}(x) = R_{\beta_j}(x)$ при $k = 1$ и $R_{2j}(x) = R_{\beta_j}(x)$ при $k = \overline{2,\infty}$. Аналогичным образом, согласно (2.9), для $R'(x)$ будем иметь $R'(x) = \dfrac{(b_1 - b_2)}{2}\operatorname{sgn} x + \overline{R}_2(x)$, поскольку

$$R'(x) = R'_{b_1}(x) - R'_{b_2}(x), \quad R'_{b_j}(x) = R'_{1b_j}(x) + R'_{2b_j}(x),$$

$$R'_{1b_j}(x) = \frac{b_j}{2}\operatorname{sgn} x + r_{1_j}(x), \quad r_{1j}(x) = \frac{b_j|x|}{2\pi} - \frac{b_j^2 x}{\pi}\left(\ln\frac{1}{|b_j x|} + \frac{3}{2} - C\right),$$

$$\overline{R}_2(x) = r_b^*(x) + R_b^*(x), \quad r_b^*(x) = r_{11}(x) - r_{12}(x), \quad R_b^*(x) = R'_{2b_1}(x) - R'_{2b_2}(x),$$

где функции $R_{b_j}(x)$ представлены в виде $R_{b_j}(x) = R_{1b_j}(x) + R_{2b_j}(x)$, причем $R_{1b_j}(x) = R_{b_j}(x)$ при $k = 1$ и $R_{2b_j}(x) = R_{b_j}(x)$ при $k = \overline{2,\infty}$ (везде $j = 1,2$).

Теперь, используя соотношения (2.8) и (2.8*), систему (2.4) после дифференцирования представим в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)ds}{s-x} + \frac{(4\beta^2 - \lambda_2^2)}{4\beta}\int_{-a}^{a}\operatorname{sgn}(x-s)\tau(s)ds + \frac{\gamma}{2\beta}\int_{-a}^{a}\overline{R}_1(x-s)\tau(s)ds +$$

$$+\frac{\gamma(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{2\beta}\int_{-a}^{a}\overline{R}_2(x-s)\tau(s)ds + \frac{1}{\pi k}\int_{a}^{b}\ln\frac{1}{|x-s|}g_u(s)ds + \frac{1}{\pi k}\int_{a}^{b}\ln\frac{1}{x+s}g_u(s)ds +$$

$$+\frac{\gamma}{2\beta k}\int_a^b\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]g_u(s)ds=\frac{1}{2\beta}g'_\beta(x), \qquad x\in(-a,a), \tag{2.10}$$

$$g_u(x)-\frac{2\beta}{\pi}\int_a^b\ln\frac{1}{|x-s|}g_u(s)ds-\frac{2\beta}{\pi}\int_a^b\ln\frac{1}{x+s}g_u(s)ds-\gamma\int_a^b\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]g_u(s)ds-$$

$$-\frac{2\beta k}{\pi}\int_{-a}^a\frac{\tau(s)ds}{s-x}-\gamma k\int_{-a}^a\overline{R}_1(x-s)\tau(s)ds-\gamma k(\lambda_2^2-\lambda_1^2)\int_{-a}^a\overline{R}_2(x-s)\tau(s)ds=-kg'_\beta(x), \quad x\in(a,b),$$

при условиях (2.5), а $g'_\beta(x)=dg_\beta(x)/dx$.

Поскольку $\tau(x)$ в точках $x=\pm a$ имеет корневую особенность, то решение системы (2.10) ищем в виде

$$\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad x\in(-a,a), \tag{2.11}$$

$$g_u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nT_n\left[h(x)\right], \quad |h(x)|<1, \; x\in(a,b) \tag{2.12}$$

(при учете нечетности $\tau(x)$), где $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$, а $T_n(y)\;(n=0,1,2...)$ – многочлены Чебышева первого рода (в дальнейшем $U_{n-1}(x)$, $n=1,2...$, – многочлены Чебышева второго рода) [8], $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставим выражения (2.11) и (2.12) в систему (2.10), пользуясь соотношениями [5]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds=\begin{cases}\dfrac{T_n(x)}{n}, & n=1,2...,\\ \ln 2, & n=0,\end{cases} \qquad x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1}{|x-s|}\frac{T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds=\begin{cases}-\dfrac{1}{n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}, & n=1,2...,\\ \ln 2-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & n=0,\end{cases} \qquad x>1,$$

а также первым условием из (2.5). Затем, умножив первое уравнение из (2.10) на $(2/\pi a)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\dfrac{x}{a}\right)$, а второе на $4T_m\left[h(x)\right]/\pi(b-a)$ и проинтегрировав их в соответствующих интервалах, получим следующую систему бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&X_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{mn}^{(1)}+R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)}\right)X_n+\left(K_{mn}^{(2)}+R_{m,n}^{(3)}\right)Y_n\right]=\gamma_m^{(1)}Y_0+f_m^{(1)},\\ &Y_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(3)}+K_{m,n}^{(4)}+R_{m,n}^{(4)}\right)Y_n+\left(R_{m,n}^{(5)}+R_{m,n}^{(6)}+R_{m,n}^{(7)}\right)X_n\right]=\gamma_m^{(2)}Y_0+f_m^{(2)}, \; m=1,2,3...\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь

$$K^{(1)}_{m,n}=\frac{a(\lambda_2^2-4\beta^2)}{\beta}\cdot\frac{2(2m-1)}{\pi\left[(2n-1)^2-4(m-1)^2\right]\left[(2n-1)^2-4m^2\right]},\quad m,n=1,2,...,$$

$$R^{(1)}_{m,n}=\frac{\gamma(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{\pi a\beta}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{R}_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R^{(2)}_{m,n}=\frac{\gamma}{\pi\beta a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{R}_1(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R^{(3)}_{m,n}=\frac{\gamma}{\pi a\beta k}\int_{-a}^{a}\int_{a}^{b}\frac{\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K^{(2)}_{m,n}=\frac{(a-b)}{\pi kan}\int_{-a}^{a}\left\{T_n[h(x)]-\sqrt{h^2(x)-1}U_{n-1}[h(x)]+T_n[h_*(x)]-\sqrt{h_*^2(x)-1}U_{n-1}[h_*(x)]\right\}\times$$

$$\times\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$\alpha^{(1)}_m=-\frac{\gamma}{\pi a\beta k}\int_{-a}^{a}\int_{a}^{b}\frac{\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\quad \gamma^{(j)}_m=\alpha^{(j)}_m+\beta^{(j)}_m,\quad j=1,2,$$

$$\beta^{(1)}_m=\frac{(a-b)}{\pi ak}\int_{-a}^{a}\left[2\ln 2-\ln\left(h(x)+\sqrt{h^2(x)-1}\right)\left(h_*(x)+\sqrt{h_*^2(x)-1}\right)\right]\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$f^{(1)}_m=\frac{1}{\pi a\beta}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,g'_\beta(x)U_{2m-2}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\qquad h_*(x)=h(-x),\qquad (2.14)$$

$$K^{(3)}_{m,n}=\frac{\beta(b-a)}{\pi n}\left[\frac{1}{(m-n)^2-1}+\frac{1}{(m+n)^2-1}\right]\quad n\neq m\pm1,\quad K^{(3)}_{m,n}=0,\quad n=m\pm1,$$

$$K^{(4)}_{m,n}=\frac{4\beta}{\pi n}\int_{a}^{b}\{T_n[h_*(x)]-\sqrt{h_*^2(x)-1}\,U_{n-1}[h_*(x)]\}T_m[h(x)]dx,$$

$$R^{(4)}_{m,n}=-\frac{4\gamma}{\pi(b-a)}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\frac{\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_m[h(x)]dx,$$

$$R^{(5)}_{m,n}=\frac{8\beta k}{\pi(b-a)}\int_{a}^{b}\frac{a^{2n}\,T_m[h(x)]dx}{\sqrt{x^2-a^2}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^{2n-1}},$$

$$R^{(6)}_{m,n}=\frac{4\gamma k}{\pi(a-b)}\int_{a}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{R}_1(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)dsT_m[h(x)]dx,$$

$$R^{(7)}_{m,n}=\frac{4\gamma k(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}{\pi(a-b)}\int_{a}^{b}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{R}_2(x-s)T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds}{\sqrt{a^2-s^2}}T_m[h(x)]dx,$$

$$\alpha^{(2)}_m=\frac{4}{\pi(a-b)}\int_{a}^{b}\left[\frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}}-\gamma\int_{a}^{b}\frac{\left[\tilde{R}(x-s)+\tilde{R}(x+s)\right]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]T_m[h(x)]dx,$$

$$\beta_m^{(2)} = \frac{4\beta}{\pi}\int_a^b \left[2\ln 2 - \ln\left(h_*(x) + \sqrt{h_*^2(x) - 1} \right) \right] T_m[h(x)]dx ,$$

$$f_m^{(2)} = \frac{4k}{\pi(a-b)}\int_a^b g'_\beta(x) T_m[h(x)]dx .$$

Система уравнений (2.13) исследуется аналогично системам в [9, 10]. Оказывается, что эта система является квазивполне регулярной при любых произвольных характерных параметрах задачи. Неизвестная Y_0 определяется из второго условия (2.5). После определения $X_n (n = 1,2,3...)$ и $Y_n (n = 0,1,2...)$ значения $\tau(x)$ при $x > b$ будут определяться так:

$$\tau(x) = \gamma(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\sum_{n=1}^{\infty} X_n \int_{-a}^{a} \frac{R(x-s)T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} + 2\beta\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{a^{2n}}{(2n-1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}} -$$
$$-\gamma\sum_{n=1}^{\infty} X_n \int_{-a}^{a} \frac{\tilde{R}(x-s)T_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \frac{\gamma}{k}\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \int_a^b \frac{[R_\beta(x-s) + R_\beta(x+s)]T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}} + g_\beta(x). \qquad (2.15)$$

Из представлений (2.3) и (2.8) следует, что $\tau(x)$ в точках $x = \pm b$ и $x = \pm c$ имеет конечные значениия, причем значение $\tau(x)$ в точке $x = b$ можно получить из (2.2), подставляя $x = b.$ Далее, из (2.1) в силу разложения $\bar{K}_\beta(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$ получим, что $\tau(x) = F^{-1}[\bar{\tau}(\sigma)]$ при $|x| \to \infty$ имеет степенной порядок $\hat{I}\ (x^{-3})$.

В заключение отметим, что при $E_2 = E_1$ (см. уравнения (2,2*) и (2,4*), случай б)) в (2.10), (2.13)–(2.15) следует подставить $\lambda_2^2 = \lambda_1^2 = \lambda^2$ (соответственно для пластины $\bar{\lambda}_2^2 = \bar{\lambda}_1^2 = \bar{\lambda}^2$), что непосредственно будет задавать соответствующие разрешающие уравнения и решения поставленных задач для случая однородных стрингеров.

Кафедра механики *Поступила 11.04.2008*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Керопян А.В.** Контактные задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенным кусочно-однородным стрингером. В сб.: Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ер.: Изд-во ЕрГУАС, 2007, 531с.
2. **Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А.** – Ученые записки ЕГУ, 1984, № 1, с. 46–51.
3. **Керопян А.В.** – Ученые записки ЕГУ, 2007, №2, с. 35–44.
4. **Керопян А.В.** – Изв. НАН Армении. Механика, 2008, №1, с. 37–47.
5. **Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С.** – Изв. НАН Армении. Механика, 2002, №2, с. 14–23.
6. **Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С.** – Изв. РАН, МТТ, 1992, №3, с. 180–184.
7. **Григорян Э.Х.** – Ученые записки ЕГУ, 1979, № 2, с. 62–71.
8. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979, 415с.
9. **Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М.** – ПММ, 1972, т. 36, № 5, с. 825–831.
10. **Саркисян В.С.** Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ер.: Изд-во ЕГУ, 1983, 259с.

Ա. Վ. ՔԵՐՈԲՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐ ՀԱՄԱՍԵՌՈՒԹՅԱՄԲ ԵՎ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ՍՈՍՆՁՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍՏՐԻՆԳԵՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՂԱՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է խնդիրների դաս առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար, որոնք y=0 գծի երկարությամբ *xoy* հարթության մեջ ուժեղացված են տարբեր առաձգական բնութագրեր ունեցող ստրինգերներով՝ առաձգական վերադիրների տեսքով: Ստրինգերները բաղկացած են սիմետրիկ դասավորված միևնույն առաձգական հատկություններ ունեցող երկու կիսաանվերջ կտորներից և մեկ առանձնացված վերջավոր կտորից այլ առաձգական հատկությունով: Ենթադրվում է, որ կիսաանվերջ տեղամասերում կոնտակտային փոխազդեցությունը իրագործվում է սոսնձի շերտի միջոցով, իսկ վերջավոր տեղամասում առկա է իդեալական մեխանիկական կոնտակտի վիճակ: Կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը հանգեցվում է վերջավոր հատվածներում սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծման: Այնուհետև, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի կիրառմամբ այդ համակարգի լուծումը հանգեցվում է քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման: Դիտարկվում են մի քանի հնարավոր սահմանային դեպքեր և, մասնավորապես, ներկայացվում են համասեռ ստրինգերների դեպքում դիտարկվող խնդիրների լուծումները:

A. V. KEROBYAN

ABOUT A CLASS OF CONTACT PROBLEMS FOR THE ELASTIC HALF-PLANE AND THE INFINITE PLATE WHICH ARE STRENGTHENED BY PARTIALLY GLUED HETEROGENEOUS ELASTIC STRINGERS

Summary

This work observes a class of contact problems for elastic half-plane and the infinite plate which along the length of the line y=0 in the plane *xoy* (for the plate xoy its average plane) is strengthened by heterogeneous elastic stringers (overlays) which consist of two semi-infinite pieces and one separated finite piece with other elastic characteristics. It is supposed that contact interaction in semi-infinite parts is realized by a thin layer of glue (other physicomechanical characteristics) and stringers are deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transforms the determinational problem of contact stresses is reduced to the system of singular integral equations within the finite intervals with certain boundary conditions. Its solution is constructed using Chebishev polynomials unknown coefficents of which are received from the quasiperfectly regular infinite systems of the linear algebraic equations. Particular cases are obsereved and the character of the change contact stresses are illustrated in different contact parts. Particulary solutions by homogeneous elastic stringers are obtained.