ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2008 Естественные науки

*Физика*

УДК 521.14

А. С. ПИЛОЯН

# КОНФОРМНОЕ СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕНИЙ ТИПА ФРИДМАНА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И В ТЕОРИИ ЙОРДАНА–БРАНСА–ДИККЕ

Получены решения космологической задачи с помощью конформных преобразований, связывающих теории тяготения Эйнштейна и Йордана–Бранса–Дикке. Рассмотрены случаи $P=\frac{1}{3}\varepsilon$ и $P=0$.

**Введение**. Поскольку общая теория относительности (ОТО) не инвариантна относительно конформных преобразований метрики, а тензорно-скалярная теория Йордана–Бранса–Дикке (ЙБД) содержит дополнительную, по сравнению с ОТО, величину – гравитационный скаляр $y(x)$, то возникает возможность подобрать такую связь между $y$ и конформным фактором $\sigma$, чтобы в одном из конформно соответствующих пространств выполнялись уравнения ОТО, а в другом – ЙБД. Другими словами, существует конформное соответствие между уравнениями ОТО и ЙБД.

Пусть в одном и том же многообразии заданы две различные римановы метрики, связанные зависимостью

$$\overline{g_{ik}}(x)=e^{2\sigma(x)}g_{ik}(x). \tag{1}$$

В таком случае говорят, что заданы два римановых пространства $V_N$ и $\overline{V}_N$, приведенные в конформное соответствие друг с другом [1]. Допустим, что метрический тензор $\overline{g}_{ik}$ удовлетворяет уравнениям ОТО

$$\overline{R}_k^i=8\pi\left(\overline{T}_k^i-\frac{1}{2}\delta_k^i\overline{T}\right), \tag{2}$$

а $g_{ik}$ – уравнениям ЙБД

$$R_k^i-\frac{y_k^i}{y}+\zeta\,\frac{y^i y_k}{y^2}=\frac{8\pi}{y}\left(T_k^i+\frac{\zeta-1}{3-2\zeta}T\sigma_k^i\right),\qquad y_l^l=\frac{T}{3-2\zeta}. \tag{3}$$

Тогда требование конформного соответствия между ОТО и ЙБД сводится к условию

$$\frac{\nabla_\mu y_\nu}{y} - \zeta \frac{y_\mu y_\nu}{y^2} - g_{\mu\nu}\left(\frac{\nabla_\alpha y^\alpha}{y} - \frac{\zeta}{2}\frac{y_\alpha y^\alpha}{y^2}\right) =$$
$$= 8\pi T_{\mu\nu}\left(e^{2\sigma} - \frac{1}{y}\right) + 2\left[\nabla_\mu \sigma_\nu - \sigma_\mu \sigma_\nu - g_{\mu\nu}\left(\nabla_\alpha \sigma^\alpha + \frac{1}{2}\sigma^\alpha \sigma_\alpha\right)\right], \tag{4}$$

свертка которого может быть представлена в виде

$$\zeta \frac{y_\alpha y^\alpha}{y^2} + 6(\nabla_\alpha \sigma^\alpha + \sigma_\alpha \sigma^\alpha) = 8\pi T\left(e^{2\sigma} + \frac{2\zeta}{y(3-2\zeta)}\right). \tag{5}$$

Условие конформного соответствия (5), записанное вне распределения масс, удовлетворяется в частности, если

$$e^{2\sigma} = y^n, \quad n = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}\zeta}\,. \tag{6}$$

Действительно, возьмем за основу решение статистической сферически-симметричной вакуумной задачи ЙБД в изотропных координатах [2] и найдем его конформное соответствие. Тогда условие (5) принимает вид

$$\sigma_{11} + \sigma_1\left(\sigma_1 + \frac{2}{\rho}\cdot\frac{\left(1 + \frac{a}{\eta}\rho_0/\rho\right)}{1 - \rho_0^2/\rho^2}\right) = -\frac{2}{3}\zeta\frac{a^2}{\eta^2}\cdot\frac{\rho_0^2/\rho^4}{(1 - \rho_0^2/\rho^2)^2}, \tag{7}$$

а его решением является

$$e^{2\sigma} = \left(\frac{1 - \rho_0/\rho}{1 + \rho_0/\rho}\right)^{-\frac{na}{\eta}} = y^n. \tag{8}$$

**Космологические задачи**. В качестве другого примера рассмотрим стандартную космологическую модель ОТО [3].

Геометрия однородной и изотропной Вселенной, как известно, описывается метрикой Робертсона–Уокера [3]:

$$d\bar{S}^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right],$$

где $k = 1$ для модели с положительной кривизной, $k = 0$ для квазиевклидовой модели, а $k = -1$ для модели с отрицательной кривизной.

Соответствующие уравнения ЙБД имеют вид

$$\frac{\bar{R}^2}{\bar{R}^2} + \frac{k}{\bar{R}^2} + \frac{\bar{R}'y'}{\bar{R}y} + \frac{\zeta}{6}\cdot\frac{y'^2}{y^2} = \frac{8\pi\bar{\varepsilon}}{3y},$$
$$\frac{d}{d\tau}(y'\bar{R}^3) = \frac{8\pi\bar{R}^3}{3 - 2\zeta}(\bar{\varepsilon} - 3\bar{P}), \tag{9}$$
$$\bar{\varepsilon}' + \frac{3\bar{R}'}{R}(\bar{\varepsilon} + \bar{P}) = 0,$$

а в метрическом пространстве $dS^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 + kr^2}(dr^2 + d\Omega^2)$

полевые уравнения ОТО будут следующими:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}=\frac{\chi_0}{3}\varepsilon\,,\quad \frac{\dot\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{3\dot a}{a}\big(\varepsilon+P\big)=0\,. \tag{10}$$

Предполагая существование конформной связи $d\overline{S}^2=e^{2\sigma}dS^2$, перепишем систему уравнений (9) с учетом (10) и, положив $P=\alpha\varepsilon$, получим

$$\left(\dot\sigma+\frac{\dot a}{a}\right)^2+\frac{k}{a^2}+\left(\frac{\dot a}{a}+\dot\sigma\right)\frac{\dot y}{y}+\frac{\zeta}{6}\cdot\frac{\dot y^2}{y^2}=\frac{8\pi\overline{\varepsilon}}{3y}e^{2\sigma}\,, \tag{11}$$

$$\ddot y-\dot\sigma\dot y+3\left(\frac{\dot a}{a}+\dot\sigma\right)\dot y=\frac{8\pi\overline{\varepsilon}e^{2\sigma}(1-3\alpha)}{3-2\zeta}\,, \tag{12}$$

$$\frac{\dot{\overline{\varepsilon}}}{\varepsilon}=-3(1+\alpha)\left(\frac{\dot a}{a}+\dot\sigma\right), \tag{13}$$

где $a=\mathrm{Re}^{-\sigma}$ удовлетворяет системе уравнений (10). Интегрирование (13) дает

$$\overline{\varepsilon}=Ae^{-3(1+\alpha)\sigma}a^{-3(1+\alpha)}\,. \tag{14}$$

Из (11) и (12) можно получить удобное соотношение

$$3(1-3\alpha)\left[u^2+uv+\frac{\zeta}{6}v^2+\frac{k}{a^2}\right]a^2=(3-2\zeta)\left[\frac{d}{d\eta}(av)+av(av+2ua)\right]. \tag{15}$$

Здесь введены обозначения:

$$u=\dot\sigma+\frac{\dot a}{a}\;,\quad v=\frac{\dot y}{y}\,,\quad d\eta=\frac{dt}{a}=\frac{d\tau}{R}\,. \tag{16}$$

*Радиационно-доминантная эпоха ($P=\frac{\varepsilon}{3}$).*

Уравнение (12) в данном случае сразу интегрируется [4]:

$$\dot y a^3e^{2\sigma}=D=const\,. \tag{17}$$

Это подсказывает возможность поиска $y$ в виде

$$y=\frac{De^{-2\sigma}}{a^2}f(t)\,. \tag{18}$$

Учитывая (17), подставим $v\equiv\frac{\dot y}{y}=\frac{1}{af}$ в (15), что дает

$$\frac{df}{d\eta}=1+2uaf\,. \tag{19}$$

Из (11) находим уравнение для определения $2uaf$:

$$(2uaf)^2+2(2uaf)+\frac{2}{3}\zeta+4kf^2-\frac{32\pi Af}{3D}=0\,, \tag{20}$$

откуда

$$1+2uaf=\pm\sqrt{\frac{3-2\zeta}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{32\pi Af}{D}-12kf^2\right)}\,. \tag{21}$$

В результате из (19) имеем

$$\frac{df}{d\eta} = \pm 2\sqrt{\frac{3-2\zeta}{12} + 2nf - kf^2}\,, \tag{22}$$

где $n = \dfrac{4\pi A}{3D}$. Интегрирование (22) дает:

I. $k = +1$; $f = n \pm m\sin(2\eta \mp 2\eta_0)$, $m^2 = \dfrac{3-2\zeta}{12} + n^2$, $2\eta_0 = \arcsin\dfrac{n}{m}$; (23)

II. $k = 0$; $f = 2n(\eta_0 \pm \eta)^2 - \dfrac{3-2\zeta}{24n}$, $\eta_0 = \dfrac{1}{2n}\sqrt{\dfrac{3-2\zeta}{12}}$; (24)

III. $k = -1$; $f = m\,\mathrm{sh}\,2(\eta_0 \pm \eta) - n$, $m^2 = \dfrac{3-2\zeta}{12} - n^2$, $2\eta_0 = \mathrm{arcsh}\dfrac{n}{m}$. (25)

Соответственно гравитационный скаляр, определяемый из соотношения $\dfrac{\dot{y}}{y} = \dfrac{1}{af}$, принимает вид:

I. $k = 1$; $\ln\dfrac{y}{y_0} = \displaystyle\int\frac{d\eta}{n \pm m\sin 2(\eta_0 - \eta)} =$

$$= \mp\frac{1}{n}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{m^2}{n^2} - 1\right) - \left(x \pm \dfrac{m}{n}\right)^2} = \mp\frac{1}{2(m^2-n^2)^{1/2}}\ln\left|\frac{nx \pm m + \sqrt{m^2-n^2}}{nx \pm m - \sqrt{m^2-n^2}}\right|$$

и, таким образом,

$$y = y_0\left|\frac{nx \pm m + \sqrt{m^2-n^2}}{nx \pm m - \sqrt{m^2-n^2}}\right|^{\mp\frac{1}{2(m^2-n^2)^{1/2}}}, \tag{26}$$

где $x = \mathrm{tg}(\eta_0 \pm \eta)$.

II. $k = 0$; $\ln\dfrac{y}{y_0} = 2n\displaystyle\int\frac{d\eta}{4n^2(\eta_0 \mp \eta)^2 - (m^2-n^2)} = \mp\int\frac{dx}{(m^2-n^2) - x^2} =$

$$= \mp\frac{1}{2(m^2-n^2)}\ln\left|\frac{x + \sqrt{m^2-n^2}}{x - \sqrt{m^2-n^2}}\right|, \text{ то есть}$$

$$y = y_0\left|\frac{x + \sqrt{m^2-n^2}}{x - \sqrt{m^2-n^2}}\right|^{\mp\frac{1}{2(m^2-n^2)^{1/2}}}, \quad x = 2n(\eta_0 \pm \eta); \tag{27}$$

III. $k = -1$; $\ln\dfrac{y}{y_0} = \displaystyle\int\frac{d\eta}{m\,\mathrm{sh}\,2(\eta_0 \pm \eta) - n} = \pm\frac{1}{n}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{m^2}{n^2} + 1\right) - \left(x + \dfrac{m}{n}\right)^2} =$

$$= \pm\frac{1}{2(m^2+n^2)^{1/2}}\ln\left|\frac{nx \pm m + \sqrt{m^2+n^2}}{nx + m - \sqrt{m^2+n^2}}\right|, \text{ то есть}$$

$$y = y_0 \left| \frac{nx + m + \sqrt{m^2 + n^2}}{nx + m - \sqrt{m^2 + n^2}} \right|^{\pm \frac{1}{2(m^2+n^2)^{1/2}}}, \quad x = \mathrm{th}(\eta_0 \pm \eta). \qquad (28)$$

Окончательно,

$$\text{I.}\quad k = 1, \quad y = y_0 \left( \frac{n\mathrm{tg}(\eta \mp \eta_0) \pm m + \sqrt{m^2 - n^2}}{n\mathrm{tg}(\eta \pm \eta_0) \pm m - \sqrt{m^2 - n^2}} \right)^{\mp \frac{1}{2(m^2-n^2)^{1/2}}}; \qquad (26a)$$

$$\text{II.}\quad k = 0, \quad y = y_0 \left| \frac{2n(\eta_0 \pm \eta) + \sqrt{m^2 - n^2}}{2n(\eta_0 \pm \eta) - \sqrt{m^2 - n^2}} \right|^{\mp \frac{1}{2(m^2-n^2)^{1/2}}}; \qquad (27a)$$

$$\text{III.}\quad k = -1, \quad y = y_0 \left( \frac{n\mathrm{th}(\eta \pm \eta_0) + \sqrt{m^2 + n^2}}{n\mathrm{th}(\eta \pm \eta_0) - \sqrt{m^2 + n^2}} \right)^{\pm \frac{1}{2(m^2+n^2)^{1/2}}}. \qquad (28a)$$

Интересно отметить очевидную связь между $f$ и $y$:

$$\frac{df}{d\eta} = \pm 2\sqrt{\frac{3-2\zeta}{12} + 2nf - kf^2}, \quad n = \frac{4\pi A}{3D}, \quad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{1}{af}, \quad \frac{dy}{d\eta} = \frac{y}{f}, \qquad (29)$$

$$\frac{df}{dy} = \pm 2f \frac{\sqrt{\frac{3-2\zeta}{12} + 2nf - kf^2}}{y} \qquad (29a)$$

и

$$y^{\mp\sqrt{1-\frac{2}{3}\zeta}} = \left( \frac{3-2\zeta}{12} \cdot \frac{1}{f} + n \right) + \sqrt{\left( \frac{3-2\zeta}{12} \cdot \frac{1}{f} \right) + 2n\left( \frac{3-2\zeta}{12} \cdot \frac{1}{f} \right) - \frac{3-2\zeta}{12}k}, \qquad (30)$$

$$R^2 = Df / y, e^{2\sigma} = Df / a^2 y. \qquad (31)$$

*Эпоха преобладания вещества ($P << \varepsilon$).*

Интегрирование основной системы уравнений значительно упрощается, если учесть известное условие Шиамы [5], согласно которому Вселенная (массы M и радиуса $R$) подчиняется принципу Маха и $GM / c^2 R \approx 1$, что в терминах поставленной задачи выглядит следующим образом:

$$yR = yae^{\sigma} = D = const. \qquad (32)$$

А в дифференциальной форме это условие записывается в виде $\dot{y} / y = -\dot{R} / R$ или $z = -v$.

В результате уравнения

$$z^2 + \frac{k}{a^2} + vz + + \frac{\zeta}{6} v^2 = \frac{8\pi B e^{-\sigma}}{3a^3 y}, \quad 2vz + v\frac{\dot{a}}{a} + \dot{v} + v^2 = \frac{8\pi B}{3-2\zeta} \frac{e^{-\sigma}}{ya^3} \qquad (33)$$

упрощаются и принимают вид

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} a \right)^2 = \left( \frac{8\pi B}{3D} - k \right) \frac{6}{\zeta}, \quad \frac{d}{dr}\left( \frac{\dot{R}}{R} a \right) = \frac{6}{\zeta}\left( k - \frac{4\pi B}{D} \frac{(2-\zeta)}{(3-2\zeta)} \right). \qquad (34)$$

Из (34) имеем $\frac{8\pi B}{3D} > k = \frac{4\pi B}{D}\left(\frac{2-\zeta}{3-2\zeta}\right) \Rightarrow \zeta < 0$, откуда следует $\left(\frac{\dot{R}}{R}a\right)^2 = -\frac{2k}{(2-\zeta)}$, и поскольку реализуются только отрицательные $\zeta$, то в теории ЙБД при таком раскладе существует только закрытая модель с $k = -1$, для которой

$$\frac{dR}{Rdt}a = \pm\sqrt{\frac{2}{2-\zeta}} \qquad (35)$$

с положительным знаком для расширяющейся Вселенной.

В результате $R = \sqrt{\frac{2}{2\zeta}}\tau$, что соответствует расширению Вселенной с нулевым ускорением.

*Кафедра теоретической физики* *Поступила 21.03.2008*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тредер Ю.** Теория гравитации и принцип эквивалентности. М.: Атомиздат, 1973.
2. **Арутюнян Г.Г., Папоян В.В.** – Астрофизика, 1984, т. 21, с. 175.
3. **Вайнберг С.** Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
4. **Арутюнян Г.Г., Папоян В.В.** Препринт ОИЯИ Р2-93-320. Дубна, 1993.
5. **Sciama D.W.** – Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1953, v. 113, p. 34.

Ա. Ս. ՓԻԼՈՅԱՆ

## ՖՐԻԴՄԱՆԻ ՏԻՊԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՖՈՐՄ ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՁԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՅՈՐԴԱՆԻ–ԲՐԱՆՍԻ–ԴԻԿԵԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Ստացված են կոսմոլոգիական խնդրի լուծումները կոնֆորմ ձևափոխու-թյունների օգնությամբ, որոնք կապում են Այնշտայնի և Յորդանի–Բրանսի–Դիկեի ձգողության տեսությունները: Դիտարկված են $P = \frac{1}{3}\varepsilon$ և $P = 0$ դեպքերը:

A. S. PILOYAN

## CONFORMAL CORRESPONDENCE BETWEEN FRIEDMAN TYPE SOLUTIONS IN GENERAL RELATIVITY AND JORDAN–BRANS–DICKE THEORY OF GRAVITY

Summary

Solutions for the cosmological problem are obtained by using the conformal transformations connecting general relativity and Jordan–Brans–Dicke theory of gravity. The cases of equations of state $P = \frac{1}{3}\varepsilon$ and $P = 0$ are considered.