

УДК 556.06 (076)

АПРОБАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСХОДОВ ВОДЫ ГОРНЫХ РЕК АРМЕНИИ

Е. В. ГАЙДУКОВА ^{1*}, В. Г. МАРГАРЯН ^{2**}, Л. В. АЗИЗЯН ^{3***},
А. Э. МИСАКЯН ^{3****}, И. О. ВИНОКУРОВ ^{1*****}

¹ *Российский государственный гидрометеорологический университет
(РГГМУ), Санкт-Петербург, Россия*

² *Кафедра общей географии ЕГУ, Ереван, Армения*

³ *ГНО "Центр гидрометеорологии и мониторинга" МОС РА, Ереван, Армения*

В работе рассмотрены физико-географические и климатические условия формирования речного стока рек Армении. Рассматривались две горные реки Армении – Арпа и Дзорагет. Прогнозы позволяют наиболее рационально использовать водные ресурсы страны, а также заблаговременно подготовиться к опасным гидрологическим явлениям и этим предупредить или существенно уменьшить ущерб, причиняемый ими народному хозяйству. Цель исследования заключается в апробации математических моделей для горных и полугорных рек Армении и анализе результатов, полученных при реализации этих моделей. Для прогнозирования стока горных рек использовался подход, основанный на применении динамических моделей формирования суточных расходов воды. Использовались модели, представленные в виде дифференциальных уравнений первого и второго порядка для прогнозирования процесса изменения характеристик речного стока. В качестве исходных данных были взяты расходы воды по гидрологическим постам п. Джермук за 2018 и 2019 гг. и для г. Степанаван за 2017 и 2018 гг., среднесуточная температура воздуха, сумма осадков за сутки, толщина снежного покрова по метеостанциям "Джермук" и "Степанаван". Апробированы методы прогноза расходов воды на полугорных реках Армении и на их аналогах на территории России. Для рек Арпа и Дзорагет модели первого и второго порядков незначительно занижают и завышают прогнозные значения соответственно. При проведении поверочных прогнозов расходов воды на этих реках в период половодья и дождевых паводков лучшие результаты получены по математической модели в виде дифференциального уравнения первого порядка. В этой модели не учитывается подповерхностный сток. Выявлено, что при малой заблаговременности параметры модели могут оптимизироваться с большой погрешностью, например коэффициент, отвечающий за интенсивность снеготаяния. В целом, динамические модели показывают удовлетворительный результат при оценке их эффективности.

<https://doi.org/10.46991/PYSUC.2026.60.2.219>

Keywords: spring flood, air temperature, daily precipitation, forecast, mountain and semi-mountain rivers, Arpa River, Dzoraget River, Republic of Armenia.

* E-mail: oderiut@mail.ru

** E-mail: vmargaryan@ysu.am

*** E-mail: levon_azizyan@yahoo.com

**** E-mail: miamalya@yandex.ru

***** E-mail: vinig@rshu.ru

Введение. Для различных секторов экономики, в особенности для гидроэнергетики и агропромышленного комплекса, важны прогнозы гидрологического режима, составленные на разные сроки. Наличие таких прогнозов дает возможность оптимально распределять водные ресурсы, а также заранее подготовиться к опасным природным явлениям, что позволяет предотвратить или значительно сократить наносимый ими ущерб народному хозяйству [1–3]. Наиболее трудными для прогнозирования считаются бассейны горных и полугорных рек. Сложность обусловлена особенностями формирования стока, которые зависят от высотной зональности, характеристик подстилающей поверхности, а также крутизны склонов и строения речной сети.

В современной гидрологии подходы к прогнозированию стока в таких бассейнах принято классифицировать на несколько основных групп [4, 5]:

- методы, базирующиеся на расчете составляющих водного баланса;
- методы, использующие концептуальные модели формирования речного стока;
- методы, опирающиеся на физико-статистические связи между характеристиками стока и гидрометеорологическими факторами;
- методы, основанные на решении математических моделей.

В оперативной практике прогнозирования водности горных рек применяются различные методики. Они могут основываться либо на концептуальных схемах, где ключевые процессы описываются упрощенными полуэмпирическими уравнениями, либо на физико-статистических зависимостях, связывающих параметры паводочного стока с метеорологическими и гидрологическими данными [6]. Иллюстрацией применения концептуальной модели служит работа [7], где модель используется для краткосрочного прогноза стока малых высокогорных притоков р. Кубань. Эффективность физико-статистических методов для горных рек продемонстрирована в исследованиях [8, 9]. В то же время подходы, базирующиеся на сложных математических моделях, пока не получили широкого распространения в этой сфере из-за трудоемкости их разработки и практического применения.

Цель исследования заключается в апробации математических моделей, разработанных в РГГМУ, для горных и полугорных рек Армении и анализе результатов, полученных при реализации этих моделей.

Материалы и методы исследования. Рассматривались две горные реки Армении – Арпа и Дзорагет. В качестве исходных данных были взяты расходы воды по гидрологическим станциям п. Джермук за 2018 и 2019 гг. и для г. Степанаван за 2017 и 2018 гг. Метеорологическая база данных включала среднесуточную температуру воздуха (°C), сумму осадков за сутки (мм), толщину снежного покрова (см) по метеостанциям “Джермук” и “Степанаван”.

Особенности временного распределения речного стока для горных водосборов связаны с высотной поясностью. Кроме этого, большое воздействие имеют также величина водосборного бассейна реки, структура площади, геологическая структура, почвенно-растительный покров, локальные особенности, антропогенные и другие факторы. В настоящее время возросло воздействие хозяйственной деятельности на внутригодовой режим стока из-за нарушения основного состояния водных объектов, это приводит к перераспределению стока за год.

Для прогнозирования стока горных рек использовался подход, основанный на применении динамических моделей формирования суточных расходов воды. Эти модели разработаны в РГГМУ и прошли широкую апробацию на равнинных реках (см., например, [10]). На горных реках рассматриваемый подход только получает свое распространение [11].

Для краткосрочного прогнозирования водности рек используются модели в виде дифференциальных уравнений первого и второго порядка [10]:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{\dot{X}}{\tau}, \quad (1)$$

$$\tau_2 \frac{d^2Q}{dt^2} + \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} + 1 \right) \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k\tau_1}Q = \frac{1}{\tau_1} \dot{X}, \quad (2)$$

где Q – расход (модуль, слой) стока, $\text{м}^3/\text{с}$ ($\text{л}/\text{с} \cdot \text{км}^2$, $\text{мм}/\text{сут}$); $\dot{X}$ – интенсивность осадков, $\text{м}^3/\text{с}$ ($\text{мм}/\text{сут}$); k – коэффициент, учитывающий потери на водосборе; τ – время реакции речного бассейна на внешнее воздействие, с (сут); τ_1 – время добегания поверхностного стока, с (сут); τ_2 – время добегания подземного стока, с (сут). Обыкновенные дифференциальные уравнения (1) и (2) решаются методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности. В качестве начального условия выступает расход воды на дату выпуска прогноза.

Отличие модели (1) от (2) заключается в учете второй, подземной, емкости, по которой может также происходить сток осадков со склонов водосбора в русловую сеть. И в данном случае важны особенности строения и свойств подстилающей поверхности и почвогрунтов водосбора.

Схема алгоритма прогноза, следующая:

- для параметризации модели берутся 15 суток (или 30 суток), предшествующие дню выпуска прогноза;
- параметры модели считаются оптимальными, если соотношение среднеквадратической погрешности поверочных прогнозов к среднеквадратическому отклонению прогнозируемой величины за период заблаговременности S/σ_Δ минимально, а число оправдавшихся поверочных прогнозов P (%) максимально;
- по периоду параметризации проводится фрактальная диагностика, основанная на расчете корреляционной размерности, показывающая число фазовых переменных, необходимых для надежного прогноза, т. е. размерность прогностической модели – первого или второго порядка (считается, что порядок модели сохранится и на период заблаговременности прогноза);
- дается прогноз с заблаговременностью 1 сутки, затем при прохождении суток период параметризации сдвигается к дате выпуска прогноза – применяется, так называемая, динамическая параметризация [11].

Прогноз состоит из трех этапов: параметризация моделей на фактическом материале за предшествующий дате выпуска прогноза период; получение прогнозных значений метеозлементов (осадков, температуры воздуха); выпуск прогноза с выбранной заблаговременностью. При прогнозировании в период снеготаяния учитывалась отдача воды из снега в зависимости от накопленной суммы положительных температур воздуха на дату осуществления прогнозного явления.

В процессе исследования были проанализированы и использованы соответствующие литературные источники [4, 5, 10, 12, 13].

Результаты и их обсуждение. Поверочные прогнозы оценивались по двум критериям: соотношение среднеквадратической погрешности к среднеквадратическому отклонению изменений прогнозируемой величины за период заблаговременности (S/σ_Δ) и число оправдавшихся прогнозов (P , %). Прогнозы давались с заблаговременностью 1 сутки.

Были просчитаны следующие варианты поверочных прогнозов:

- 1) период половодья с учетом суммы температур и, соответственно, снеготаяния;
- 2) весь год и период половодья по модели первого порядка;
- 3) весь год и период половодья по модели второго порядка.

На рисунке для примера показаны гидрографы по некоторым вариантам прогнозов. Этапы прогнозирования были запрограммированы в компьютерном приложении MatLab, которое позволяет использовать всевозможные средства визуализации результатов и численные схемы решения дифференциальных уравнений любого порядка.

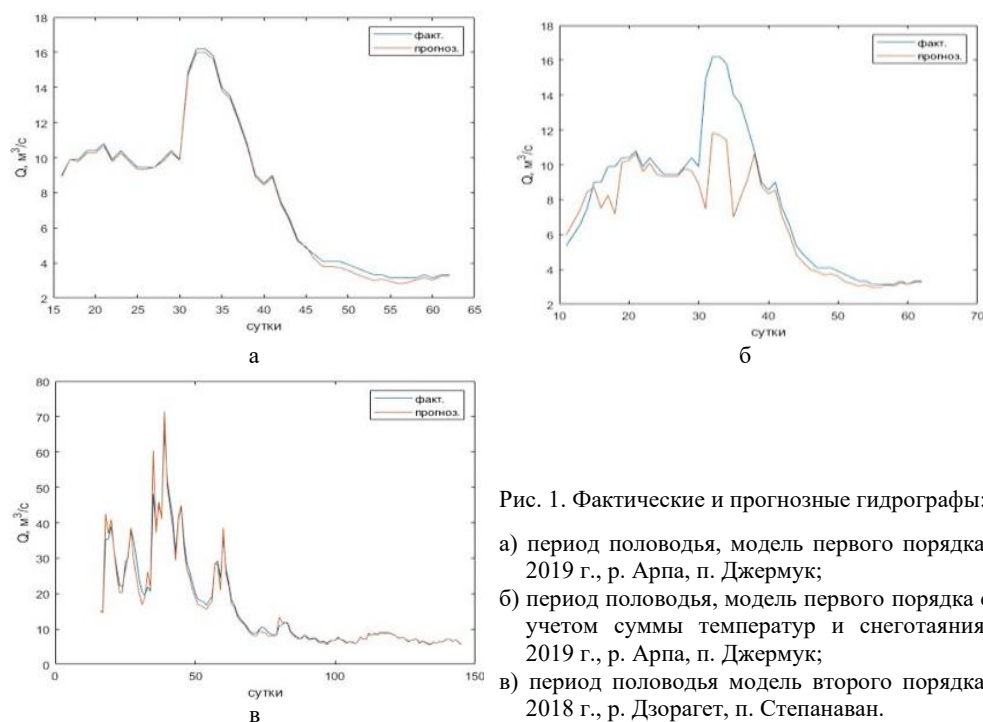


Рис. 1. Фактические и прогнозные гидрографы:

- а) период половодья, модель первого порядка, 2019 г., р. Арпа, п. Джермук;
- б) период половодья, модель первого порядка с учетом суммы температур и снеготаяния, 2019 г., р. Арпа, п. Джермук;
- в) период половодья модель второго порядка, 2018 г., р. Дзорагет, п. Степанаван.

Для рек Арпа и Дзорагет модели первого и второго порядков незначительно занижают и завышают прогнозные значения соответственно. В целом, динамические модели показывают удовлетворительный результат при оценке их эффективности. Модель с учетом снеготаяния показывает неудовлетворительные результаты, несмотря на то что запасы снега на водосборе р. Арпа достигают метровой толщины. Данные результаты соответствуют сложному

процессу снеготаяния в горных районах, что следует учитывать комплексными математическими моделями. В таблице показаны численные значения критериев оценки эффективности прогностического подхода, основанного на решении дифференциальных уравнений различных порядков, для р. Арпа.

Сводная таблица эффективности прогнозов (р. Арпа – п. Джермук)

Год	S/σ_{Δ}	$P, \%$	Комментарий
Модель первого порядка с учетом снеготаяния и суммы температур			
2018	3,00	45,8	неудовлетворительно
2019	2,09	58,1	неудовлетворительно
Модель первого порядка для всего года			
2018	0,36	89,6	удовлетворительно
2019	0,35	90,4	удовлетворительно
Модель второго порядка для всего года			
2018	0,62	84,9	удовлетворительно
2019	0,63	84,1	удовлетворительно
Модель первого порядка для периода половодья			
2018	0,32	79,2	удовлетворительно
2019	0,18	75,8	удовлетворительно
Модель второго порядка для периода половодья			
2018	0,61	66,7	удовлетворительно
2019	0,37	69,4	удовлетворительно

Для двух рек модель первого порядка показывает более эффективный результат для рассматриваемых лет по сравнению с моделью второго порядка. Это связано с тем, что в горных районах нет ярко выраженного подземного стока, так как скальные породы, образуя водоупор, не дают паводковым водам фильтроваться ниже них. Происходит, так называемый, контактный сток, характеризующийся быстрым стоком вод по поверхности и под рыхлым слоем почв.

Продолженная для сравнения подобная апробация моделей для р. Самур (Дагестан) [14, 15] показала, что в данном случае модель первого порядка превышает максимальные расходы воды. При использовании модели второго порядка прогнозные значения расходов воды меньше фактических, но погрешности не превышают допустимые значения. Модель первого порядка с учетом снеготаяния показала неустойчивые решения, что можно связать наоборот с малой толщиной снежного покрова на водосборе на момент начала половодья и с интенсивным снеготаянием в короткий срок. Лучшие результаты получены по математической модели в виде дифференциального уравнения второго порядка, которая учитывает разные скорости добегания поверхностного и подповерхностного стока.

Заключение. Существуют различные методы прогноза стока горных и полугорных рек. Большинство из них основано на использовании фактических наблюдений за характеристиками речного стока за предшествующий date прогноза период. Есть подходы, основанные на методах водного баланса, которые учитывают и влияние на сток изменений климата. В практике оперативного прогноза стока горных рек часто применяются методы, опирающиеся на концептуальные модели формирования стока, в основе которых полуэмпирические уравнения, или на физико-статистические зависимости характеристик речного стока от гидрометеорологических факторов.

В данном исследовании проведена апробация математических моделей, разработанных в РГТМУ и основанных на решении дифференциальных уравнений первого и второго порядков, для горных рек Армении.

При проведении поверочных прогнозов расходов воды на горных реках Арпа и Дзорагет в период половодья и дождевых паводков лучшие результаты получены по математической модели в виде дифференциального уравнения первого порядка. В этой модели не учитывается подповерхностный сток. Выявлено, что при малой заблаговременности параметры модели могут оптимизироваться с большой погрешностью, например, коэффициент, отвечающий за интенсивность снеготаяния.

Также отмечено, что при прогнозе с суточной заблаговременностью значения параметров модели, которые получаются при динамической параметризации на предшествующем дате выпуска прогноза материале, характеризовали процесс формирования стока на такой относительно небольшой будущий период времени. Не следует ожидать, что параметры могут быть пригодными и для большей заблаговременности. Поэтому следует связать параметры моделей с метеоэлементами (например, с осадками, температурой воздуха), которые могут быть спрогнозированы на несколько суток вперед. Актуальной становится задача проработки динамической модели первого порядка, учитывающей таяние снегозапасов на водосборе и изменение суммы положительных температур.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместного научного исследования “Краткосрочный вероятностный прогноз стока рек в период весеннего половодья” № 20RF-039 и № 20-55-05006/20 соответственно.

Поступила 16.06.2026

Получена с рецензии 25.06.2026

Утверждена 26.08.2026

ЛИТЕРАТУРА

1. Маргарян В.Г., Гайдукова Е.В., и др. Особенности формирования весеннего половодья в бассейне реки Арпа. *Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление* 3 (2021), 126–152.
https://doi.org/10.35567/19994508-2021_3_7
2. Маргарян В.Г., Гайдукова Е.В., и др. О прогнозе максимальных расходов весеннего половодья реки Арпа. *Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление* 3 (2022), 75–87.
https://doi.org/10.35567/19994508-2022_3_6
3. Sumachev A.E., Gaidukova E.V., et al. Experience in Applying Probabilistic Approaches in Predicting the Level Regime of the Marmarik River. *Dokl. Earth Sci.* 516 (2024), 1067–1074.
<https://doi.org/10.1134/S1028334X2460124X>
4. Георгиевский Ю.М., Шаночкин С.В. *Прогнозы стока горных рек*. Ленинград, ЛГМИ, (1987), 55.
5. Георгиевский Ю.М., Шаночкин С.В. *Гидрологические прогнозы* (учеб.). Санкт-Петербург, Изд-во РГТМУ (2007), 436.
6. Христофоров А.В., Юмина Н.М., Белякова П.А. Прогноз паводкового стока рек черноморского побережья кавказа с заблаговременностью одни сутки. *Вестник МГУ. Серия 5. География* 3 (2015), 50–57.
7. Борщ С.В., Симонов Ю.А. Оперативная система краткосрочных гидрологических прогнозов расхода воды на реках бассейна Кубани. *Тр. Гидрометцентра России* 349 (2013), 63–87.

8. Болтабаев В.Г., Овчинников А.М. Краткосрочные прогнозы стока горных рек методом множественной регрессии. *Тр. САНИГМИ* 52 (1970), 90–98.
9. Мухин В.М. Методические основы физико-статистических видов краткосрочных прогнозов стока горных рек. *Тр. Гидрометцентра России* 349 (2013), 5–46.
10. Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В. Моделирование гидрологических процессов. Санкт-Петербург, Изд-во РГГМУ (2006), 559.
11. Эспития С.Э.Ф., Гайдукова Е.В., Коваленко В.В. Краткосрочный прогноз расходов воды на реках Колумбии с использованием фрактальной диагностики. *Ученые записки РГГМУ* 47 (2017), 16–24.
12. Мисакян А.Э., Аракелян А.А. и др. Оценка уязвимости максимальных расходов воды реки Агстев в условиях изменения климата. *Ученые записки ЕГУ. Геол. и геогр.* 56 (2022), 25–36. <https://doi.org/10.46991/PYSU:C.2022.56.1.025>
13. Шмакова М.В., Рахуба А.В. Методы математического моделирования в оценке внутренней нагрузки водоемов тяжелыми металлами. *Ученые записки ЕГУ. Геол. и геогр.* 59 (2025), 604–610. <https://doi.org/10.46991/PYSUC.2025.59.2.604>
14. Гайдукова Е.В., Маргарян В.Г. и др. Краткосрочное прогнозирование расходов воды на р. Самур. *Международный научно-исследовательский журнал* 6 (2021), 17–23. <https://doi.org/10.23670/IRJ.2021.108.6.064>
15. Gaidukova E.V., Margaryan V.G., et al. Probabilistic Forecast of Mountain Rivers Runoff in Dagestan and Armenia. *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science* 949 (2022), 012086. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/949/1/012086>

Ե. Գ. ԳԱՅԴՈՒԿՈՎԱ, Վ. Գ. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ, Լ. Վ. ԱԶԻԶՅԱՆ,
Ա. Է. ՄԻՍԱԿՅԱՆ, Վ. Օ. ՎԻՆՈՎՈՒՐՈՎ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԼԵՈՆԱՅԻՆ ԳԵՏԵՐՈՒՄ ՋՐԻ ԾԱԽՄԻ
ԿԱՆԽԱՏԵՍՄԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼՆԵՐԻ ՓՈՐՁԱՐԿՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Այս հոդվածը ուսումնասիրում է Հայաստանում գետային հոսքի ձևավորմանը կարգավորող ֆիզիկական, աշխարհագրական և կլիմայական պայմանները: Ուսումնասիրվել են Հայաստանի երկու լեռնային գետեր՝ Արփա և Ջորազետ գետերը: Կանխատեսումները հնարավորություն են տալիս առավելագույնս արդյունավետ օգտագործել երկրի ջրային ռեսուրսները, ինչպես նաև վաղաժամ նախապատրաստվել վտանգավոր հիդրոլոգիական իրադարձություններին, այդպիսով կանխելով կամ զգալիորեն նվազեցնելով դրանց կողմից ազգային տնտեսությանը հասցվող վնասը: Ուսումնասիրության նպատակն է ստուգել Հայաստանի լեռնային և կիսալեռնային գետերի մաթեմատիկական մոդելները և վերլուծել այդ մոդելների ներդրումից ստացված արդյունքները: Լեռնային գետերի հոսքի կանխատեսման համար օգտագործվել է օրական ջրային հոսքի ձևավորման դինամիկ մոդելների վրա հիմնված մոտեցում: Գետի հոսքի բնութագրերի փոփոխությունները կանխատեսելու համար օգտագործվել են առաջին և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների տեսքով ներկայացված մոդելներ: Ջերմուկի բնակավայրի հիդրոլոգիական կայաններից 2018 և 2019 թթ. ջրային հոսքի տվյալները օգտագործվել են որպես մուտքային տվյալներ, իսկ Ստեփանավան քաղաքի համար՝ 2017 և 2018 թթ.-ի համար՝ «Ջերմուկի» և «Ստեփանավանի» օդերևութաբանական կայաններում օդի միջին օրական ջերմաստիճանը, օրական տեղումները և ձյան ծածկույթի խորությունը: Փորձարկվել են Հայաստանի կիսալեռնային

գետերի և դրանց անալոգների ջրի արտահոսքի կանխատեսման մեթոդները Ռուսաստանում: Արփա և Ջորագետ գետերի համար առաջին և երկրորդ կարգի մոդելները համապատասխանաբար փոքր-ինչ թերագնահատում և գերագնահատում են կանխատեսված արժեքները: Այս գետերի ջրհոսքի ստուգիչ կանխատեսումներ կատարելիս ջրհեղեղների և տեղումների ժամանակ լավագույն արդյունքները ստացվել են առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման տեսքով մաթեմատիկական մոդելի միջոցով: Այս մոդելը հաշվի չի առնում ստորգետնյա հոսքը: Պարզվել է, որ կարճ ժամանակահատվածներում մոդելի պարամետրերը կարող են օպտիմալացվել զգալի սխալներով, օրինակ՝ ձնհալի ինտենսիվության համար պատասխանատու գործակիցը: Ընդհանուր առմամբ, դինամիկ մոդելները ցույց են տալիս բավարար արդյունքներ իրենց արդյունավետությունը գնահատելու հարցում:

E. V. GAIDUKOVA, V. G. MARGARYAN, L. V. AZIZYAN,
A. E. MISAKYAN, I. O. VINOKUROV

TESTING MATHEMATICAL MODELS FOR FORECASTING WATER DISCHARGE IN MOUNTAIN RIVERS OF ARMENIA

Summary

The paper considers the physical-geographical and climatic conditions formation of the river runoff of the rivers of Armenia. Two mountain rivers were considered Armenia – Arpa and Dzoraget. Relevance. Forecasts allow the most rational use of the country's water resources, as well as to prepare in advance for dangerous hydrological phenomena and these prevent or significantly reduce the damage, they cause to the people au pair. The purpose of the study is to test the mathematical models for mountainous and semi-mountainous rivers of Armenia and analysis of the results, obtained in the implementation of these models. For forecasting runoff of mountain rivers, an approach based on the application of dynamic models of daily water consumption formation. Used models presented as differential equations of the first and second order for predicting the process of changing characteristics river flow. As the initial data, water consumption for hydrological posts in Jermuk for 2018 and 2019 and for the city of Stepanavan for 2017 and 2018, average daily air temperature, sum daily precipitation, snow cover thickness according to weather stations “Jermuk” and “Stepanavan”. Cost forecasting methods tested waters on the semi-mountain rivers of Armenia and on their analogues on the territory of Russia. For the Arpa and Dzoraget Rivers, the models of the first and second orders are insignificantly underestimate and overestimate the predicted values, respectively. When conducting verification forecasts of water discharges on the mountain rivers Arpa and Dzoraget in the period of high water and rain floods, the best results are obtained by mathematical model in the form of a differential equation of the first order. This model does not take into account subsurface runoff. Revealed that with a short lead time, the model parameters can be optimized with a large error, for example, the coefficient responsible for snowmelt intensity. In general, dynamic models show a satisfactory result in assessing their effectiveness.