ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.51

Г.В. БАДАЛЯН

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩЕЙ КЛАССИЧЕСКИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В отличие от двух общеизвестных методов введения классических ортогональных систем алгебраических полиномов (см. соответственно [1-5]) в настоящей работе предлагается совершенно иной метод введения этих же полиномов. Одновременно для них даются также отличные от известных интегральные представления. Последние, по сравнению с известными в литературе формулами Родрига, просты и, что еще важнее, подынтегральные функции немногозначны, а однозначны. В работе доказывается, что

система функций $$I^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a}(x)=\frac{æ_{n,n_1,a}}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{(1-\frac{x}{a})^{n_1+\zeta}\;(\frac{x}{a})^{-\zeta}}{\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)}\,\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)},$$

где $n_1\geq n\geq 0$ **– целые числа,** $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $a>0$ **– произвольные числа,** $x\in(0,a)$, **простой контур** C **охватывает окрестности точек** $0, -1, -2, \ldots, -n$, $æ_{n,n_1,a}=\Gamma(n_1+n+\alpha+\beta+2)$, **порождает вышеуказанные ортогональные полиномы, а именно: при** $n_1=n$, $a=1$ **получаются полиномы Якоби, а при** $n_1=a\to\infty$ **– полиномы Лагерра** $L^{(\beta)}_n(x)$, **умноженные на** e^{-x}. **На концах** $[0,a]$ $Y^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a}(x)$ **понимается в смысле** $x\to 0+$ **и** $x\to a-$.

В учебной и научной литературе хорошо известно, что алгебраические ортогональные полиномы приводятся двумя существенно разными методами: или – разрозненно, вне их взаимной связи (см., напр., [1–3]), или – как решения двух частных видов гипергеометрических (обычных и вырожденных) уравнений (см., напр., [4,5]).

В настоящей работе предлагается другой, отличный от известных, прямой метод введения вышеуказанных систем полиномов, откуда: 1) все эти полиномы могут быть получены из системы функций, названной нами порождающей или основной, как частный случай (полиномы Якобиева типа), или как предельный случай (полиномы Лагерра, а следовательно и Эрмита); 2) одновременно получаются также (опять единым подходом) новые интегральные представления указанных полиномов.

Эти представления, по сравнению с теми, которые вытекают из соответствующих формул Родрига (см. [4,5]), где фигурируют интегралы от многозначных функций с довольно сложными контурами (петлями), имеют то преимущество, что интегралы в них – от однозначных функций, поэтому и с простыми контурами.

1°. Основная система функций. Введем в рассмотрение систему полиномов

$$I^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a}(x)=\frac{æ_{n,n_1,a}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n_1+\zeta}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\zeta}}{\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)}\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)},\tag{1}$$

где $n_1\geq n\geq 0$ – целые числа, $\alpha>-1,\beta>-1,a>0$ – произвольные числа, $x\in(0,a)$, контур C охватывает окрестности точек $0,-1,-2,...,-n$,

$$æ_{n,n_1,a}=\Gamma(n_1+n+\alpha+\beta+2)a^{-n-\alpha-\beta}.\tag{2}$$

Обозначим

$$\Upsilon^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,k}=<I^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a}(x),x^k>=\int\limits_0^a I^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a}(x)x^k(a-x)^\alpha x^\beta\frac{dx}{a},\tag{3}$$

и докажем центральную в работе теорему.

Теорема 1 (основная). Пусть $n_1\geq n\geq k\geq 0$ – целые числа, тогда

$$\Upsilon^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,k}=\begin{cases}0,\ 0\leq k<n,\\(-1)^n,\ k=n.\end{cases}\tag{3'}$$

Доказательство. Из (3) после замены $x=ax'$ согласно (1) получаем

$$\Upsilon^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,k}=\frac{æ_{n,n_1,a}a^{k+\alpha+\beta}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\int\limits_0^1(1-x)^{n_1+\zeta+\alpha}x^{-\zeta+\beta+k}dx}{\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)}\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)},$$

где контур C может быть выбран так, чтобы $n_1+\alpha+\operatorname{Re}\zeta>-1$, $\beta+k-\operatorname{Re}\zeta>-1$, поэтому

$$\Upsilon^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,k}=$$

$$=\frac{a^{k+\alpha+\beta}æ_{n,n_1,a}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+k+\beta+1)}{\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1-\zeta+k+\beta+1)\Gamma(n_1+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)}\times$$

$$\times\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}=\frac{a^{k+\alpha+\beta}æ_{n,n_1,a}}{\Gamma(n_1+k+\alpha+\beta+2)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}(-\zeta+\beta+\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta,\tag{3''}$$

что получается в силу равенства

$$\Gamma(-\zeta+k+\beta+1)=\prod_{\nu=1}^{k}(-\zeta+\beta+\nu)\Gamma(-\zeta+\beta+1),\ \prod_{\nu=1}^{0}(\cdot)=1.$$

Из (3″) очевидно, что при $0\leq k<n$

$$\Upsilon^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,k}=0,\tag{4}$$

а при $k=n$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}(-\zeta+\beta+\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(-\zeta+\beta+\nu)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}d\zeta=(-1)^n,\tag{5}$$

поэтому из (3″) согласно (2) получаем

$$\mathrm{Y}^{(\alpha,\beta)}_{n,n_1,a,n}=(-1)^n. \tag{4'}$$

Теорема 1 доказана.

2°. Первое применение теоремы 1, полиномы Якоби для промежутка [0,1]. Примем в (1) $n_1=n$, $a=1$ и сформулируем первое следствие теоремы 1.

Теорема 1′. Для определенной по (1) функции $\mathrm{Y}^{(\alpha,\beta)}_{n,n,1}(x)$ справедливы равенства

$$<I^{(\alpha,\beta)}_{n,n,1}(x),x^k>=\int_0^1 I^{(\alpha,\beta)}_{n,n,1}(x)x^k(1-x)^\alpha x^\beta dx=\begin{cases}0,\ k=0,1,\dots,n-1,\\(-1)^n,\ k=n\ .\end{cases} \tag{6}$$

Обозначим теперь

$$I^{(\alpha,\beta)}_{n,n,1}(x)=I^{(\alpha,\beta)}_n(x)=\frac{æ_n}{2\pi i}\int_C\frac{(1-x)^{n+\zeta}x^{-\zeta}}{\Gamma(n+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)}\frac{d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}, \tag{7}$$

где $æ_n=æ_{n_1,n,1}=\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)$, $x\in(0,1)$. (8)

Обозначим также

$$\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x)=\frac{I^{(\alpha,\beta)}_n(x)}{\sqrt{\hat{æ}_n}}, \tag{9}$$

где

$$\hat{æ}_n=\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+1)}. \tag{10}$$

Утверждаем, что система функций (9) – это ортонормальная система полиномов Якоби для промежутка [0,1], а именно:

Теорема 2. Для системы полиномов (9) справедливы равенства

$$\left\langle\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_m(x),\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x)\right\rangle=\int_0^1\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_m(x)\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x)(1-x)^\alpha x^\beta dx=\delta_{m,n},$$

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}0, & m\neq n,\\1, & m=n.\end{cases} \tag{11}$$

Действительно, пусть $m\le n$, тогда при 1) $m<n$ согласно теореме 1′ и (9)

$$\left\langle\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_m(x),\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x)\right\rangle=0. \tag{11'}$$

Пусть теперь 2) $m=n$ и пусть старший коэффициент в $I^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ равняется a_n, тогда согласно теореме 1′

$$\left\langle\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x),\hat{I}^{(\alpha,\beta)}_n(x)\right\rangle=\frac{a_n}{\sqrt{\hat{æ}_n}}\frac{1}{\sqrt{\hat{æ}_n}}\int_0^1 I^{(\alpha,\beta)}_n(x)(1-x)^\alpha x^{n+\beta}dx=(-1)^n\frac{a_n}{\hat{æ}_n}. \tag{12}$$

Найдем теперь численное значение a_n.

Для этого заметим, что $I^{(\alpha,\beta)}_n(x)$ согласно равенству (7) может быть представлено также в виде

$$I^{(\alpha,\beta)}_n(x)=\frac{æ_n}{2\pi i}\int_C\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n+\zeta}{k}(-x)^k x^{-\zeta}d\zeta}{\Gamma(n+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}, \tag{7'}$$

при $k \ge n$ $\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)$ полностью сокращается с $\binom{n+\zeta}{k}$, в результате чего под контурным интегралом остается аналитическая функция.

Из (7′) старший член $I_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ определится из равенства

$$a_n x^n = æ_n \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{\zeta=-n+k} \frac{\binom{n+\zeta}{k}(-x)^k x^{-\zeta}}{\Gamma(n+\zeta+\alpha+1)\Gamma(-\zeta+\beta+1)\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)},$$

поэтому

$$a_n = æ_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(n-k+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(-1)^k k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n æ_n}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+1)} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \prod_{\nu=k}^{n}(\nu+\alpha+1)\prod_{\nu=0}^{k}(n-\nu+\beta+1). \quad (13)$$

Но сравнение старших членов в тождестве

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(1+x)^{n+\alpha} x^{n+\beta}\right] = \frac{d^n(x^{2n+\alpha+\beta}+\ldots)}{dx^n}$$

показывает, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \prod_{\nu=k}^{n}(\nu+\alpha+1)\prod_{\nu=0}^{k}(n-\nu+\beta+1) = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \quad (14)$$

Таким образом доказано, что

$$a_n = \frac{(-1)^n \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\, æ_n}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+1)} = (-1)^n \hat{æ}_n. \quad (13')$$

Из (12) согласно (13′) и (10) получаем

$$\left\langle \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(x), \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\rangle = 1. \quad (12')$$

Теорема 2 доказана.

Тем самым одновременно получены новые представления посредством контурных интегралов для полиномов Якоби, Чебышева, Лежандра для промежутка $x \in (0,1)$.

3°. Второе применение теоремы 1, полиномы Лагерра. Рассмотрим теперь предельный случай функций $I_{n,n_1,a}^{(\alpha,\beta)}(x)$ из (1), когда $a = n_1 \to +\infty$, $\alpha = 0$.

Прежде чем сформулировать результат настоящего пункта, найдем вид функции

$$I_{n,\infty,\infty}^{(0,\beta)}(x) = \lim_{a=n_1\to+\infty} I_{n,n_1,a}^{(0,\beta)}(x). \quad (15)$$

С этой целью предварительно найдем предельные значения отдельных компонентов из $I_{n,n_1,a}^{(0,\beta)}(x)$. Имеем

$$1)\ \lim_{n_1=a\to+\infty}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n_1+\zeta} = e^{-x}, \quad (16)$$

$$2)\ æ_{n,n_1,a} \cdot \frac{a^\zeta}{a} : \Gamma(n_1+\zeta+1) = \frac{\Gamma(n_1+n+\beta+2)n_1^\zeta}{\Gamma(n_1+\zeta+1)n_1^{n+\beta+1}} = \frac{\Gamma(n_1+n+\beta+2)}{n_1^{n-\zeta+\beta+1}\prod_{\nu=0}^{n_1}(\zeta+\nu)\Gamma(\zeta)} =$$

$$=\frac{\Gamma(n_1+n+\beta+2)}{n_1^{n+\beta+1}\Gamma(n_1+1)}\cdot\frac{n_1^{\zeta}}{\zeta\prod\limits_{\nu=1}^{n_1}\left(1+\frac{\zeta}{\nu}\right)\cdot\Gamma(\zeta)}\overset{n_1\to\infty}{\sim}\frac{\Gamma(n_1+n+\beta+2)}{n_1^{n+\beta+1}\Gamma(n_1+1)},$$

поэтому

$$2')\ \lim_{n_1\to\infty}\frac{æ_{n,n_1,n_1}n_1^{\zeta-1}}{\Gamma(n_1+\zeta+1)}=\lim_{n_1\to\infty}\frac{\Gamma(n_1+n+\beta+2)}{n_1^{n+\beta+1}\Gamma(n_1+1)}=\lim_{n_1\to\infty}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n_1}(n+\beta+1+\nu)\Gamma(n+\beta+1)}{n_1^{n+\beta+1}\quad n_1!}=$$

$$\Gamma(n+\beta+1)\lim_{n_1\to\infty}\frac{(n+\beta+1)\prod\limits_{\nu=1}^{n_1}(1+\frac{n+\beta+1}{\nu})}{n_1^{n+\beta+1}}=\Gamma(n+\beta+1)\cdot\frac{1}{\Gamma(n+\beta+1)}=1.$$

Этим из (1) получаем

$$I_{n,\infty,\infty}^{(0,\beta)}(x)=\frac{e^{-x}}{2\pi i}\int_C\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\Gamma(-\zeta+\beta+1)\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}. \tag{17}$$

Из теоремы 1 для функции $I_{n_1\infty,\infty}^{(0,\beta)}(x)$ следует.

Теорема 1″. Для функции справедливы равенства

$$\left\langle I_{n,\infty,\infty}^{(0,\beta)}(x),x^k\right\rangle=\int_0^\infty x^{\beta+k}I_{n_1\infty,\infty}^{(0,\beta)}(x)dx=\begin{cases}0,\ k=0,1,2,\dots,n-1\\(-1)^n,\ k=n.\end{cases} \tag{18}$$

В справедливости равенств (18) можно убедиться также непосредственно.

Обозначим полином

$$L_n^{(\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{2\pi i}\int_C\frac{x^{-\zeta}d\zeta}{\Gamma(-\zeta+\beta+1)\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\nu)}=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta+1)}\frac{(-x)^\nu}{\nu!(n-\nu)!}. \tag{19}$$

Теорема 1″ позволяет доказать следующее предложение.

Теорема 3. Система функций

$$\hat{L}_n^{(\beta)}(x)=\hat{æ}_n L_n^{(\beta)}(x),\ n=0,1,2,\dots, \tag{20}$$

где $L_n^{(\beta)}(x)$ определен в (19),

$$\hat{æ}_n=\sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}}, \tag{21}$$

ортонормальна на $(0,\infty)$ при весовой функции $p(x)=e^{-x}x^\beta,\ \beta>-1$, т.е.

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\beta\hat{L}_n^{(\beta)}(x)\hat{L}_m^{(\beta)}(x)dx=\delta_{n,m}=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\1,\ m=n.\end{cases} \tag{22}$$

Для доказательства достаточно заметить, что коэффициент старшего члена, определенного в (19) полинома $L_n^{(\beta)}(x)$, равняется

$$\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)}. \tag{23}$$

По этой причине и согласно теореме 1″ имеем

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\beta\hat{L}_m^{(\beta)}(x)\hat{L}_n^{(\beta)}(x)dx=(-1)^m\frac{\hat{æ}_n}{\Gamma(m+1)}\int_0^\infty e^{-x}x^{m+\beta}\hat{L}_n^{(\beta)}(x)dx=$$

$$= (-1)^m \text{æ}_m \hat{\text{æ}}_n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(m+1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{m+\beta} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^{-\zeta} d\zeta}{\Gamma(-\zeta+\beta+1) \prod_{\nu=0}^{n} (\zeta+\nu)} dx =$$

$$= (-1)^m \hat{\text{æ}}_m \hat{\text{æ}}_n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(m+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Gamma(m+\beta-\zeta+1)}{\Gamma(-\zeta+\beta+1) \prod_{\nu=0}^{n} (\zeta+\nu)} d\zeta =$$

$$(-1)^m (-1)^m \hat{\text{æ}}_m \hat{\text{æ}}_n \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(m+1)} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{m} (\zeta-\nu-\beta)}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta+\nu)} d\zeta = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m<n. \end{cases} \qquad (22')$$

Теорема 3 доказана, чем и доказано, что система функций (20) – это ортонормальная система полиномов Лагерра с индексом $\beta > -1$.

Этим согласно известной связи полиномов Эрмита с полиномами Лагерра (см., напр., [3], с. 106) получено также представление и для полиномов Эрмита, так как

$$H_{2q}(x) = \frac{(-1)^q}{(2q-1)!!} L_q^{-(\frac{1}{2})} (\frac{x^2}{2}), \; H_{2q+1}(x) = \frac{(-1)^{q+1}}{(2q+1)!!} x L_q^{(\frac{1}{2})} (\frac{x^2}{2}) \qquad (24)$$

(см. [3], с. 106).

Замечание 1. Как известно, для полиномов, именно (19), имеется готовая формула Кристоффеля-Дербу, которую можем использовать для полиномов как Лагерра, так и Эрмита.

В случае же классических ортогональных полиномов Якобиевского типа для использования известной формулы Кристоффеля-Дарбу нам следует введенные для промежутка (0,1) полиномы $I_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$, $\theta \in (0,1)$, выразить посредством таких же полиномов, но для общепринятого промежутка (-1,1).

Для этого согласно теореме 2 нам следует исходить из равенства (11), а именно из

$$\left\langle \hat{I}_m^{(\alpha,\beta)}(\theta), \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \right\rangle = \int_0^1 \hat{I}_m^{(\alpha,\beta)}(x) \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-\theta)^\alpha \theta^\beta d\theta = \delta_{m,n} \,. \qquad (11'')$$

Откуда после замены

$$\theta = \frac{x+1}{2} \; (x = x_0 + \theta(1-x_0) = -1 + \theta(1+1) = -1 + 2\theta)$$

будем иметь

$$\left\langle \hat{I}_m^{(\alpha,\beta)}(\theta), \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \right\rangle = \int_{-1}^1 \hat{I}_m^{(\alpha,\beta)}(\frac{x+1}{2}) \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(\frac{x+1}{2}) \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{2^{\alpha+\beta+1}} dx =$$

$$= \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \qquad (11''')$$

Из последнего равенства следует, что обычные полиномы Якоби для промежутка [-1,1], обозначим их через $Y_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, – это суть введенные нами полиномы $\hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(\frac{x+1}{2})$, умноженные на $2^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}$ и соответственно – наоборот (см., напр., [2], с. 361).

Это обстоятельство позволяет здесь также использовать готовую для $\left\{\hat{I}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$ известную формулу Кристоффеля-Дербу без какого-либо затруднения.

Очевидно, вышесказанное распространяется на множество других формул по классическим алгебраическим ортогональным полиномам, их можно использовать и в готовом виде, а при желании – получать повторением известных подходов к введенным нами полиномам непосредственно в их же терминах.

Кафедра мат. анализа *Поступила 11.02.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Госиздат. тех.-теор.лит., 1962.
2. **Натансон И.П.** Конструктивная теория функций. М.–Л.: Госиздат. тех.-теор.лит., 1949.
3. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978, ч. II.
4. **Кратцер А., Франц В.** Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963.
5. **Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.** Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.

Հ.Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ԴԱՍԱԿԱՆ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ ԾՆՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում, ի տարբերություն դասական հանրահաշվական օրթոգոնալ համակարգերի ներմուծման հայտնի մեթոդների, նշված համակարգերի ֆունկցիաները ստացվում են մի համակարգից՝ որպես մասնավոր կամ սահմանային դեպքեր:

Միաժամանակ վերոհիշյալ բազմանդամների համար բնականորեն ստացվում են նաև նրանց համար հայտնի ներկայացումներից էապես տարբեր ներկայացումներ: