ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

А.В. ЦУЦУЛЯН

АТТРАКТОРЫ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей статье доказывается существование аттракторов полугрупп, порожденных смешанными задачами для вырождающихся эволюционных уравнений второго порядка, при этом вырождение может осуществляться как на всей границе, так и на ее части.

Устанавливается компактность аттракторов в пространстве L_2 и строится функция Ляпунова, позволяющая выяснить их структуру.

Одной из важных проблем современной теории дифференциальных уравнений является изучение поведения их траекторий на бесконечности. Как оказалось, эта задача тесно связана с существованием многообразий, называемых аттракторами, которые обладают свойством притяжения. Этому кругу вопросов посвящено довольно много работ (см., напр., [1,2] и приведенную в них библиографию).

§1. Постановка задачи. 1.1. Пусть Ω – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, лежащая в полупространстве $R_+^n = \{x_n \in R^n, x_n > 0\}$ $\Gamma_0 = \Gamma \cap \{x_n = 0\} \neq 0$.

Пусть $Q_T = \{0, T\} \times \Omega$.

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу для нелинейного вырождающегося параболического уравнения вида

$$u_t + L(u) = 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u|_{\Gamma^*} = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

где

$$L(u) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i a_i(x, \nabla u) + c(x, u), \tag{1.4}$$

$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$.

Γ^* либо будет совпадать со всей границей Γ, либо $\Gamma^* = \Gamma \setminus \Gamma_0$.

1.2. Введем функциональные пространства, в которых будет исследована задача (1.1)–(1.3).

Пространство $W_{p,\sigma}^1(\Omega), p > 2, \sigma \in R^1$, по определению (см. [3]), – весовой класс функций $u(x)$, определенных на Ω, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W_{p,\sigma}^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega x_n^{p\sigma} |\partial_i u|^p dx \right)^{1/p} \tag{1.5}$$

Как известно, с этой нормой классы $W^1_{p,\sigma}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами.

Обозначим далее

$$\|u\|_1 = \left(\int\limits_{\Omega} x_n^{p\sigma} |u|^p dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} x_n^{p\sigma} |\partial_i u|^p dx \right)^{1/p} \qquad (1.6)$$

Норма (1.6) также порождает банахово пространство, которое обозначим ${}_1W^1_{p,\sigma}(\Omega)$.

Исследование начально-краевых задач диктует необходимость введения подпространств этих пространств.

Пространство $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, по определению, – замыкание в норме $W^1_{p,\sigma}(\Omega)$ линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, оно при $-\dfrac{1}{p} < \sigma < 1 - \dfrac{1}{p}$ имеет структуру

$$\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega) = \left\{ u \in W^1_{p,\sigma}(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0 \right\}, \qquad (1.7)$$

а при $\sigma \geq 1 - \dfrac{1}{p}$ имеем $u|_{\Gamma^*} = 0$.

1.3. Опишем класс рассматриваемых операторов.

i) Функции

$$a_i(x,\xi) \in C^2(\overline{\Omega} \times R^n),\ i = \overline{1,n},$$
$$c(x,\eta) \in C^1(\overline{\Omega} \times R^1),$$

при этом справедливы следующие оценки:

$$|a_i(x,\xi)| \leq C x_n^{p\sigma} |\xi|^{p-1},$$
$$|a_{ij}(x,\xi)| \leq C x_n^{p\sigma} |\xi|^{p-2},$$
$$C_1 x_n^{p\sigma} |u|^p \leq c(x,u)u \leq C_2 x_n^{p\sigma} |u|^p,$$

где $a_{ij}(x,\xi) = \dfrac{\partial a_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}$, а $C > 0$ – некоторая постоянная.

ii) Существуют постоянные $\mu_i > 0, i = \overline{0,4}$, такие, что для любых $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$ справедливы оценки

$$\mu_0 x_n^{p\sigma} |\xi|^p \leq \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \leq \mu_1 x_n^{p\sigma} |\xi|^p,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\xi)\xi_i\xi_j \geq \mu_2 x_n^{p\sigma} |\xi|^p,$$
$$\mu_3 x_n^{p\sigma} |u|^{p-2} \leq \frac{\partial c(x,u)}{\partial u} \leq \mu_4 x_n^{p\sigma} |u|^{p-2}.$$

1.4. В этом пункте будет приведена теорема существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3), доказанная в [2], на которую мы будем существенно опираться в дальнейшем.

Для ее формулировки введем нелинейную форму

$$L(u,u)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i(x,\nabla u)\partial_i u dx+\int_{\Omega}c(x,u)udx \tag{1.8}$$

и обозначим

$$<L(u),u>=\int_0^T L(u,u)dt. \tag{1.9}$$

Введем, наконец, банахово пространство $L_p(0,T;W^1_{p,\sigma}(\Omega))$ функций $u(x,t):[0,T]\to W^1_{p,\sigma}(\Omega)$ с нормой

$$|||u|||=\left(\int_0^T\|u(t)\|^p_{W^1_{p,\sigma}(\Omega)}dt\right)^{1/p} \tag{1.10}$$

Определение 1.1. Функция $u\in L_p^{loc}(0,\infty;\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega))$ называется обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), если для любой функции $v\in L_p^{loc}(0,\infty;\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega))$ имеет место следующее интегральное тождество:

$$\int_0^T\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}vdxdt+<L(u),v>=0. \tag{1.11}$$

В работе [4] доказана следующая

Теорема A ([4], теорема 3.1). Пусть выполнены условия i), ii). Тогда для любых начальных данных $u_0\in\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение.

§2 Аттракторы. Из теоремы A следует существование семейства операторов $\{S_t,t\geq 0\}$, определенных на множестве начальных данных задачи (1.1)–(1.3), задаваемых следующим образом: $S_t u_0=u(t)$, где u – обобщенное решение задачи. Легко видеть, что $\{S_t\}$ – полугруппа.

Доказательство существования аттракторов опирается на одну общую теорему, установленную в [1].

Теорема 2.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям i), ii). Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1.1)–(1.3), обладает аттрактором $\mathcal{A}\subset\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, ограниченным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 2.1. Операторы $\{S_t\}$, действующие на пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, непрерывны в $L_2(\Omega)$ при $t\geq 0$.

Доказательство. Пусть u_0^1 и u_0^2 – произвольные элементы пространства $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, а $u^1(x,t)$ и $u^2(x,t)$ – соответствующие им обобщенные решения задачи (1.1)–(1.3). Утверждение леммы равносильно следующей оценке, справедливой для любого $t\geq 0$:

$$\left\|S_t u_0^1-S_t u_0^2\right\|\leq\left\|u_0^1-u_0^2\right\|, \tag{2.1}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Из определения обобщенного решения следует, что для любых $t>0$ и $v\in L_p^{loc}(0,\infty;\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega))$

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial(u^1-u^2)}{\partial} v(x,\tau)dxd\tau+\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega[a_i(x,\nabla u^1)-a_i(x,\nabla u^2)]\partial_i v dxd\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega[c(x,u^1)-c(x,u^2)]vdxd\tau=0.$$

Подставляя $v(x,t)=u^1(x,t)-u^2(x,t)$, получим

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial(u^1-u^2)}{\partial\tau}(u^1-u^2)dxd\tau+<L(u^1)-L(u^2),u^1-u^2>=0. \tag{2.2}$$

Из (2.2) получаем в силу монотонности оператора L (см. [4], теорему 2.1)

$$\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left|u^1-u^2\right|^2 dxd\tau\le 0.$$

т.е. $\int_\Omega\left|u^1(x,\tau)-u^2(x,\tau)\right|^2 dx\Big|_0^t\le 0$, отсюда следует $\left\|u^1-u^2\right\|^2\le\left\|u_0^1-u_0^2\right\|^2$, что равносильно оценке (2.1).

Лемма доказана.

Лемма 2.2. Обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет неравенству

$$\left\|S_tu_0\right\|^2=\left\|u(t)\right\|^2\le e^{-2C_2t}\left\|u_0\right\|^2. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи. Умножим тождество (1.1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем обе его части по области Ω. Получим

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}udx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega a_i(x,\nabla u)\partial_i udx+\int_\Omega c(x,u)udx=0$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|u\right\|^2+L(u,u)=0.$$

В силу условий i), ii) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}\left\|u\right\|^2+c_0\left\|u\right\|_1^p\le 0. \tag{2.4}$$

Поскольку $p>2$, то $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)\subset L_2(\Omega)$, и из (2.4) следует

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|u\right\|^2+c_2\left\|u\right\|^2\le 0. \tag{2.5}$$

Применяя к (2.5) неравенство Гронуолла, приходим к оценке (2.3)

$$\left\|u(t)\right\|^2\le e^{-2\int_0^t C_2d\tau}\left\|u_0\right\|^2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Проверим справедливость теоремы B с учетом замечания 2.1, где мы положим $K=\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, $X=L_2(\Omega)$. Легко видеть, что подмножество $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$ замкнуто в $L_2(\Omega)$. Далее в силу теоремы 3.1 оно слабо инвариантно:

$$S_t \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega) \subset \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega),\ t \geq 0.$$

Выполнение условия а) теоремы вытекает из леммы 2.2.

В самом деле, пусть $B \subset \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$ – произвольное ограниченное в $L_2(\Omega)$ множество

$$B = \left\{ u \in \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega) : \|u\| \leq R < \infty \right\}. \tag{2.6}$$

В силу оценки (2.3) имеем при любом $t \in [0,T], \forall u_0 \in B$

$$\|S_t u_0\|^2 \leq R^2 < \infty,$$

и, стало быть, полугруппа $\{S_t\}$ равномерно ограничена.

Условие с) равносильно утверждению леммы 2.1.

Проверим справедливость условия b). С этой целью обозначим

$$B_0 = \left\{ u \in \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega) : \|u\| \leq R_0 < \infty \right\}$$

и покажем, что оно является поглощающим. В самом деле, пусть $B \subset \overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$ – произвольное ограниченное в $L_2(\Omega)$ множество, как в (2.6).

В силу оценки (2.3), для любого $u_0 \in B$ имеем

$$\|S_t u_0\|^2 \leq e^{-2C_0 t}(R^2 + R_0),$$

откуда следует, что существует $T = T(R) > 0$ такое, что при $t \geq T$

$$\|S_t u_0\| \leq \frac{R_0}{2},$$

а это означает, что B_0 – поглощающее множество полугруппы S_t.

Таким образом, выполнены все условия теоремы B, и, стало быть, у полугруппы $\{S_t\}$ существует аттрактор $\mathcal{A}$, ограниченный в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2.1 доказана.

2.2. В этом пункте будет доказано существование компактного аттрактора полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (1.1)–(1.3). В этой связи приведем одну теорему вложения для весовых пространств $W^m_{p\sigma}(\Omega)$.

Теорема С ([13], теорема 1.1.3). Пусть $p \geq 1$, m и k – целые числа, которые удовлетворяют условию $0 \leq k \leq m$, а весовой показатель σ – условию: $-\frac{1}{p} \leq \sigma \leq m - \frac{1}{p}$. Тогда вложение $W^m_{p\sigma}(\Omega) \to W^k_{p\alpha}(\Omega)$ компактно в том и только том случае, если $m - \sigma > k - \alpha$.

Замечание 2.2. Ниже мы применим эту теорему для значений $\alpha = k = 0$, $m = 1$. В этом случае имеем компактное вложение

$$W^1_{p\sigma}(\Omega) \to L_p(\Omega), \tag{2.7}$$

поскольку $1-\sigma>0$.

Предложение 2.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям i), ii). Тогда, если решение $u(t,x)$ принадлежит пространству

$$L_p(0,T;\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)\bigcap W^2_{p\sigma}(\Omega)),$$

семейство операторов $\{S_t\}$, порожденных задачей (2.1)–(2.3), отображает множества $B\subset\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, ограниченные в $L_2(\Omega)$, в ограниченные множества пространства $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть

$$U_0=\left\{u_0\in\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega):\|u_0\|\le R_0<\infty\right\}\tag{2.8}$$

произвольное замкнутое ограниченное подмножество в $L_2(\Omega)$.

Пусть, далее, $u(t,x)$ – обобщенное решение задачи, соответствующее начальному условию $u_0\in U_0$. Подставляя его в уравнение (2.1), умножая обе части последнего на $t^pL(u)$ и интегрируя по области Ω, получим

$$\int_\Omega t^pL(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx+t^p\int_\Omega|L(u)|^2dx=0.\tag{2.9}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_\Omega t^pL(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx\le 0.\tag{2.10}$$

Интегрируя по частям (2.10), получим

$$\sum_{i=1}^n\int_\Omega t^p\frac{\partial}{\partial t}(\partial_iu)a_i(x,\nabla u)dx+\int_\Omega t^pc(x,u)\frac{\partial u}{\partial t}dx\le 0.\tag{2.11}$$

Интегрируя последнее неравенство по $t\in[0,T]$, получим

$$\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega t^p\frac{\partial}{\partial t}(\partial_iu\cdot a_i)dxdt+\int_0^T\int_\Omega t^p\frac{\partial}{\partial t}(c(x,u)u)dxdt\le 0.\tag{2.12}$$

Введем обозначения

$$J_1=\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega t^p\frac{\partial}{\partial t}(\partial_iu\cdot a_i)dxdt=\sum_{i=1}^n\int_\Omega t^p(\partial_iu,a_i)dx\Big|_0^T-$$
$$-p\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega t^{p-1}a_i(x,\nabla u)\partial_iudtdx,$$

$$J_2=\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega t^p\frac{\partial}{\partial t}(c(x,u)u)dtdx=\int_\Omega t^pc(x,u)udx\Big|_0^T-p\int_0^T\int_\Omega t^{p-1}c(x,u)udxdt.$$

Подставляя в (2.12) вместо J_1 и J_2 их значения, имеем

$$T^p\sum_{i=1}^n\int_\Omega a_i(x,\nabla u)\partial_iudx+T^p\int_\Omega c(x,u)udx\le J_1'+J_2',\tag{2.13}$$

где

$$J_1'=p\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega t^{p-1}a_i(x,\nabla u)\partial_iudtdx,$$

$$J_2' = p\int_0^T\int_\Omega t^{p-1}c(x,u)udxdt.$$

Оценим интегралы, используя i), ii):

$$\left|J_1'\right| \le C\cdot pT^{p-1}\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_\Omega x_n^{p\sigma}\left|\partial_i u\right|^p dxdt, \tag{2.14}$$

$$\left|J_2'\right| \le C_2\cdot pT^{p-1}\int_0^T\int_\Omega x_n^{p\sigma}\left|u\right|^p dxdt. \tag{2.15}$$

Возвращаясь теперь к оценке (2.13), в силу (2.14), (2.15) имеем

$$T^p L(u,u) \le C_5\cdot pT^{p-1}\int_0^T\|u\|_1^p dt.$$

Отсюда получаем

$$\left|L(u,u)\right| \le C_6\cdot \|\|u\|\|^p. \tag{2.16}$$

В силу условий i), ii) имеем при $t = T$

$$\left|L(u,u)\right| \ge C_0\|u(T)\|_1^p. \tag{2.17}$$

Оценка (2.4) здесь имеет вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 + C_0\|u\|_1^p \le 0. \tag{2.18}$$

Интегрируя теперь неравенство (2.18) по $t\in[0,T]$, придем к оценке

$$C_0\|\|u\|\|^p \le -\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2 dt = -\frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2,$$

откуда

$$\|\|u\|\|^p \le \frac{1}{2C_0}\|u_0\|^2 = C_7\|u_0\|^2, \tag{2.19}$$

где $C_7 = \dfrac{1}{2C_0}$.

Из (2.13), (2.17) и (2.19) приходим к окончательной оценке

$$\|S_t u_0\|_{W_{p\sigma}^1}^p \le C_8\|u_0\|^2. \tag{2.20}$$

Поскольку $u_0\in U_0$, то $\|S_t u_0\|_{W_{p\sigma}^1}^p \le C_8R^2 = C_9(R)$, что завершает доказательство предложения 2.1.

Теорема 2.2. Пусть оператор L удовлетворяет условиям предложения 2.1. Тогда полугруппа $\{S_t\}$, порожденная задачей (1.1)–(1.3), обладает аттрактором, компактным в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. В соответствии с теоремой B нам надлежит проверить лишь выполнение условия b), поскольку остальные условия теоремы проверены в процессе доказательства теоремы 2.1.

Итак, докажем существование компактного в $L_2(\Omega)$ поглощающего множества. В силу предложения 2.1 произвольное замкнутое ограниченное в $L_2(\Omega)$ множество $U_0\in \overset{0}{W}{}_{p\sigma}^1(\Omega)$ оператором S_t при $t>0$ отображается в ограниченное множество пространства $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$. В силу теоремы C и замечания 2.2 множество S_tU_0 компактно в $L_p(\Omega)$, и поскольку $p<2$, то S_tU_0 компактно в $L_2(\Omega)$.

Пусть B_0 - ограниченное в $L_2(\Omega)$ поглощающее множество, существование которого обеспечивается теоремой 2.1. Тогда множество $B^0=S_1B_0$ компактно в $L_2(\Omega)$. Докажем, что B^0 - поглощающее множество. В самом деле, существует $T>0$ такое, что $S_tU_0\subset B_0$ при $t\geq T$. Далее, поскольку $\{S_t\}$ - полугруппа, то $S_tU_0=S_1S_tU_0\subset S_1B_0=B^0$ при $t\geq T+1$, а это и означает в силу произвольности U_0, что B^0 - поглощающее множество.

Из теоремы B следует, что у полугруппы $\{S_t\}$ имеется аттрактор, компактный в $L_2(\Omega)$.

Теорема доказана.

§3.Построение функции Ляпунова. В этом параграфе для некоторого специального класса уравнений вида (2.1) будет построена функция Ляпунова и с ее помощью описана структура аттракторов. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\partial_i a_i(x,\partial_i u)+c(x,u)=0 \tag{3.1}$$

и введем обозначения

$$A(x,\xi,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\xi_i}a_i(x,\tau)d\tau+\int_0^{\tau}c(x,\eta)d\eta. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Phi(u)=\int_\Omega A(x,u,\nabla u)dx, \tag{3.3}$$

определенный на пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$.

Теорема 3.1. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.2. Тогда функционал $\Phi(u)$, задаваемый выражением (3.3), является функцией Ляпунова полугруппы $\{S_t\}$, порожденной задачей (3.1), (1.2), (1.3).

Доказательство. В силу теоремы 2.2 полугруппа $\{S_t\}$ обладает аттрактором $\mathcal{A}$, компактным в $L_2(\Omega)$. Далее в соответствии с определением функции Ляпунова (см. [1]) проверим вначале, что функционал Φ непрерывен на множестве $\mathcal{A}$.

С этой целью составим разность

$$\Phi(u)-\Phi(v)=\int_\Omega[A(x,..,\nabla u)-A(x,...,\nabla v)]dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\int_0^1 a_i(x,\partial_j v+t(\partial_i u-\partial_i v))\partial_i(u-v)dtdx+\int_\Omega\int_0^1 c(x,v+t(u-v))(u-v)dtdx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a_i(x,\partial_i\omega^*)\partial_i(u-v)dx+\int_\Omega c(x,\omega^*)(u-v)dx,$$

где $\omega^*=v+t^*(u-v)$, а $0<t^*<1$.

Из условий i) имеем

$$|\Phi(u)-\Phi(v)| \le C\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} x_n^{p\sigma}|\partial_i\omega^*|^{p-1}|\partial_i(u-v)|dx\right]+$$

$$+C\left[\int_{\Omega} x_n^{p\sigma}|\omega^*|^{p-1}|u-v|dx\right]=$$

$$=C\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} x_n^{(p-1)\sigma}|\nabla\omega^*|^{p-1}x_n^{\sigma}\partial_i(u-v)dx+\int_{\Omega} x_n^{(p-1)\sigma}|\omega^*|^{p-1}x_n^{\sigma}|u-v|dx\right].$$

Отсюда

$$|\Phi(u)-\Phi(v)| \le C\|u-v\|_1\|\omega^*\|_1^{p-1} \le C(\|u\|_1+\|v\|_1)^{p-1}\|u-v\|_1. \qquad (3.4)$$

Поскольку множество $\mathcal{A}$ в силу предложения 2.1 ограничено в $\overset{0}{W}{}^1_{p\sigma}(\Omega)$, то из (3.4) следует, что $|\Phi(u)-\Phi(v)| \le C_1\|u-v\|_1$ с некоторой постоянной C_1, и непрерывность функционала Φ на $\mathcal{A}$ установлена.

Покажем, что функционал Φ дифференцируем в смысле Фреше. Имеем для любых $u,v\in\mathcal{A}$

$$<\Phi'(u),v>=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a_i(x,\partial_i u)\partial_i v dx+\int_{\Omega} c(x,u)v dx.$$

Далее в соответствии с определением функции Ляпунова покажем, что $\Phi(S_t u_0)$ как функция переменной t убывает при $t\ge 0$ и что множество решений уравнения $Lu=0$ совпадает с множеством неподвижных точек полугруппы $\{S_t\}$.

В самом деле, для любого $u_0\in\mathcal{A}$

$$\partial_t\Phi(S_t u_0)=\partial_t\Phi(u(t,x))=<\Phi'(u),\frac{\partial u}{\partial t}>=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} a_i(x,\partial_i u)\frac{\partial}{\partial t}\partial_i u dx+$$

$$+\int_{\Omega} c(x,u)\frac{\partial u}{\partial t}dx=-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\partial_i a_i(x,\partial_i u)\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int_{\Omega} c(x,u)\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_{\Omega} L(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx=$$

$$=-\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\le 0 \qquad (3.5)$$

и, стало быть, функция $\Phi(S_t u_0)$ убывает при $t\ge 0$.

Предположим, что при некотором $t=\tau\ge 0$

$$\Phi(u(t,x))=\Phi(u(0,x))=\Phi(u_0).$$

Имеем в силу (3.5)

$$0=\Phi(u(\tau,x))-\Phi(u_0)=\int_0^{\tau}\partial_t\Phi(u(t,x))dt=-\int_0^{\tau}|L(u)|^2 dt,$$

откуда следует, что $L(u)=0$ при $t\in[0,\tau]$. Положим $z=u_0(x)$.

Поскольку $Lu_0=Lu(0,x)$ и $\frac{\partial u_0}{\partial t}=0$, то функция $z(x)$ является решением задачи (3.1), (1.2), (1.3) и, следовательно, $S_t z=z$, т.е. z – неподвижная точка полугруппы $\{S_t\}$.

Теорема доказана.

Из теорем 3.1, 2.2 и 10.2[1] непосредственно следует

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теорем 2.2 и 3.1 и пусть множество $M = (z_1(x),...,z_s(x))$ решений уравнения $L(u) = 0$ конечно. Тогда аттрактор $\mathscr{A}$ имеет следующую структуру:

$$\mathscr{A} = \bigcup_{z_i \in M} N(z_i),$$

где $N(z_i)$ – неустойчивое инвариантное многообразие, исходящее из точки z_i.

Кафедра диф. уравнений и функционального анализа
Поступила 16.06.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. – УМН, 1983, т. 38, №4 (232), с. 133–187.
2. **Бабин А.В., Вишик М.И.** Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
3. **Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В.** Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Изв. ВУЗ-ов, сер. математ., 1988, т. 8 (315), с. 4–30.
4. **Акопян Г.С., Шахбагян Р.Л.** Краевые задачи для нелинейных уравнений, вырождающихся на части границы. – Изв. НАН Армении, сер. математ., 1998, т. 33, №5.
5. **Дубинский Ю.А.** Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка. – УМН, 1968, т. 23, 1 (123), с. 45–90.

Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ

ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ԷՎՈԼՅՈՒՑԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱՏՐԱԿՏՈՐՆԵՐԸ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում ապացուցված է երկրորդ կարգի էվոլյուցիոն հավասարման համար խառը խնդրի կիսախմբի ատրակտորի գոյությունը, ընդ որում, վերասերումը կարող է իրականանալ ինչպես ամբողջ եզրի, այնպես էլ նրա մի մասի վրա:

Ցույց է տրված ատրակտորի կոմպակտությունը L_2 տարածությունում և կառուցված է Լյապունովի ֆունկցիան, որը թույլ է տալիս պարզել ատրակտորի կառուցվածքը: