ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Математика

УДК 513.8

М.И. КАРАХАНЯН

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ БАНАХОВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННОЙ СДВИГАМИ ДЕЛЬСАРТА

Данная работа посвящена спектральной теореме банахова представления компактной группы G в банаховом пространстве X, порожденной сдвигами Дельсарта.

Пусть $BL(X)$ – комплексная банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве X. Если для оператора $h \in BL(X)$ имеет место равенство $\|\exp(ith)\| = 1$ для всех вещественных t, то оператор h называется "эрмитовым" (см. [1,2]). Напомним, что оператор $n \in BL(X)$ называется нормальным, если $n = h + ik$, $[h,k] = hk - kh = 0$, где $h,k \in BL(X)$ – "эрмитовы" операторы. Как показал Ю.П. Любич (см. [3,4]), для полноты системы собственных векторов компактного "эрмитова" оператора h в слабо полном банаховом пространстве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ и $\varphi \in X^*$ функция $\varphi(\exp(ith))$ была боровской, почти периодической на вещественной оси $\mathbf{R}$. В дальнейшем в работах [5,6] были обобщены результаты работ [3,4] на случай нормального оператора.

1. Пусть G – компактная группа и $\mathcal{A}(G)$ – некоторая ее компактная группа автоморфизмов. Пусть μ – мера Хаара на G и ν – нормированная мера Хаара на $\mathcal{A}(G)$. Напомним (см. [7]), что семейство операторов $\tau^G = \{\tau^s\}_{s \in G}$ – обобщенные сдвиги Дельсарта (сдвиги Дельсарта) на пространстве $C(G)$ всех комплекснозначных непрерывных функций, если

$$\tau^s f(t) = \int_{\mathcal{A}(G)} f(t \circ a(s)) d\nu(a), \tag{1.1}$$

где $a(s)$ – образ элемента $s \in G$ при действии автоморфизма $a \in \mathcal{A}(G)$. Нетрудно видеть, что сдвиги Дельсарта удовлетворяют следующим условиям:

i) $\tau^s(\alpha f + \beta g) = \alpha \tau^s f + \beta \tau^s g$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$;

ii) $\tau^e f(t) = f(t)$, т. е. $\tau^e = I$ – единичный оператор, где e – единичный элемент группы G;

iii) $\tau_s^r \tau^s f(t) = \tau_t^s \tau^r f(t)$, где $r,s,t \in G$;

iv) для любого $f \in C(G)$ функция $F(s,t) = \tau^s f(t)$ непрерывна по совокупности точек (s,t).

Обозначим $D(G)=\{f\in C(G):\tau^s f(t)\big|_{t=e}=f(s)\}$. Предполагается, что если $C(G)$ – бесконечномерное пространство, то $D(G)$ – также бесконечномерное пространство.

Легко видеть, что для любого фиксированного $t=t_0\in G$ функция $g(s)=\tau^s f(t)\big|_{t=t_0}\in D(G)$, а также то, что если $f\in C(G)$ есть такая функция, что $f(a(s))=f(s)$ для всех $a\in\mathcal{A}(G)$, то $f\in D(G)$.

Если пространство $D(G)$ пополнить по норме $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$, где $\langle f,g\rangle=\int\limits_G f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$, то получим гильбертово пространство $L_D^2(G)$, в котором для семейства сдвигов Дельсарта возникает семейство сопряженных операторов $\overset{\times}{\tau}{}^G=\left\{\overset{\times}{\tau}{}^s\right\}_{s\in G}$, определяемых равенством

$$\langle\tau^s f,g\rangle=\int\limits_G\tau^s f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)=\int\limits_G f(t)\overline{\overset{\times}{\tau}{}^s g(t)}d\mu(t)=\left\langle f,\overset{\times}{\tau}{}^s g\right\rangle.$$

Одновременно по формуле $\theta^s f(t)=\tau^t f(s)$ возникает “двойственное” семейство сдвигов Дельсарта $\theta^G=\{\theta^s\}_{s\in G}$ со своим сопряженным семейством $\overset{\times}{\theta}{}^G$, для которых $[\tau^s,\theta^t]=0$.

Сдвиги Дельсарта τ^G и θ^G порождают правое и левое регулярные представления $R:G\to BL(L_D^2(G))$ и $L:G\to BL(L_D^2(G))$, определяемые соответственно формулами

$$R(\tau^s)f(t)=\tau^s f(t)=\int\limits_{\mathcal{A}(G)}f(t\circ a(s))d\nu(a),$$
$$L(\theta^s)f(t)=\theta^s f(t)=\int\limits_{\mathcal{A}(G)}f(s\circ a(t))\,d\nu(a). \tag{1.2}$$

Эти представления есть унитарные представления группы G в гильбертовом пространстве $L_D^2(G)$.

Аналогично по пространству Дельсарта $D(G)$ можно ввести групповую алгебру $L_D^1(G)$, в которой свертка, порожденная сдвигами Дельсарта, задается по формуле

$$(f\times g)_\tau(t)=\int\limits_G f(s)\overset{\times}{\theta}{}^s g(t)d\mu(s)=\int\limits_G\overset{\times}{\tau}{}^s f(t)g(s)d\mu(s). \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что в полученной групповой алгебре $L_D^1(G)$ свертки, порожденные сдвигами Дельсарта τ^G и θ^G, совпадают, т. е. $(f\times g)_\tau=(f\times g)_\theta$, а также что

$$\int\limits_G\overset{\times}{\tau}{}^s f(t)\,d\mu(s)=\int\limits_G\overset{\times}{\theta}{}^s f(t)d\mu(s)=\int\limits_G f(s)d\mu(s). \tag{1.4}$$

При этом групповая алгебра $L^1_D(G)$ – симметричная банахова алгебра относительно инволюции $f \to f^*$, где $f^*(s) = \overline{\overset{\times}{\tau}{}^s f(e)}$ (т. е. $\|f\|_{1,D} = \|f^*\|_{1,D}$). Заметим также, что $L^2_D(G) \subset L^1_D(G)$, $\|f\|_{2,D} \geq \|f\|_{1,D}$, и для сдвигов Дельсарта τ^G имеет место непрерывность по параметру $s \in G$, т.е.

$$\|\tau^s f - \tau^{s'} f\|_p < \varepsilon, \quad \left\|\overset{\times}{\tau}{}^s f - \overset{\times}{\tau}{}^{s'} f\right\|_p < \varepsilon,$$

когда $f \in L^p_D(G)$, $p = 1,2$, и $s' \in U(s)$,где $U(s)$ – достаточно малая окрестность точки s в G.

Нетрудно видеть (см. [8,9]), что для любой функции $f \in L^1_D(G)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\varphi \in L^1_D(G)$, что $\|f \times \varphi - f\|_{1,D} < \varepsilon$, $\|\varphi \times f - f\|_{1,D} < \varepsilon$. Отсюда получается, что замкнутое подпространство $J \subset L^1_D(G)$ тогда и только тогда является левым (соответственно правым) идеалом в групповой алгебре $L^1_D(G)$, когда J инвариантен относительно сдвига τ^G (соответственно θ^G).

Пусть $Z_D(G) = Z(L^1_D(G))$ – центр групповой алгебры $L^1_D(G)$. Если $\{U^\alpha\}$ – система всех попарно неэквивалентных унитарных неприводимых (следовательно, конечномерных) представлений компактной группы G, порожденной сдвигами Дельсарта, и χ_α – характеры представлений U^α, $n_\alpha = \dim U^\alpha$, то $\chi_\alpha \in Z_D(G)$ и линейная оболочка характеров плотна в $Z_D(G)$. Более того, эти характеры образуют ортонормированный базис в $L^2_D(G) \cap Z_D(G)$.

Свертка характеров χ_α и χ_β при этом имеет следующий вид:

$$\chi_\alpha \times \chi_\beta = \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{k(n_\beta)} \chi_\beta, \tag{1.5}$$

где $k(n_\beta)$ – константа, зависящая от β. Полагая $\sigma_\alpha = k(n_\alpha)\chi_\alpha$, получаем следующее нормированное условие свертки:

$$\sigma_\alpha \times \sigma_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \sigma_\beta. \tag{1.6}$$

Пусть $J^{<\alpha>}_D(G) = \{f \in L^1_D(G) : f \times \sigma_\alpha = f\}$. Тогда $J^{<\alpha>}_D(G)$ – конечномерный (и потому замкнутый), минимальный, симметричный, двусторонний идеал в групповой алгебре $L^1_D(G)$, образованный линейными комбинациями матричных элементов представления U^α.

Напомним, что банахово пространство Y – замкнутая прямая сумма $Y = \overline{\sum_\alpha Y_\alpha}$ семейства замкнутых подпространств $\{Y_\alpha\}$, если:

а) пространство Y – замыкание совокупности конечных сумм вида

$$y_{\alpha_1} + \ldots + y_{\alpha_n}, \quad y_{\alpha_k} \in Y_{\alpha_k};\ k = 1,\ldots,n;\quad n = 1,2,\ldots;$$

б) если последовательность $y^{(m)} = y^{(m)}_{\alpha_1} + \ldots + y^{(m)}_{\alpha_m}$ сходится к нулю по норме Y, а при фиксированном α – $\left\{y^{(m)}_{\alpha}\right\}_{m=1}^{\infty}$ сходится по норме, то $\left\|y^{(m)}_{\alpha}\right\| \to 0$.

Отметим, что каждый ненулевой, минимальный, замкнутый, двусторонний идеал в алгебре $L^1_D(G)$ совпадает с одним из идеалов $J_D^{<\alpha>}(G)$ и

$$L^1_D(G) = \overline{\sum_{\alpha} J_D^{<\alpha>}(G)}, \tag{1.7}$$

где $\dim J_D^{<\alpha>}(G) = n_\alpha^2$ (см. [8]).

Заметим, что если $(u^{\alpha}_{ij})_{ij=1}^{n_\alpha}$ – матрица представления U^α в каком-нибудь ортонормированном базисе, тогда идеал $J_D^{<\alpha>}(G)$ – линейная оболочка матричных элементов $(u^{\alpha}_{ij})_{ij=1}^{n_\alpha}$. Идеал $J_D^{<\alpha>}(G)$ изоморфен алгебре всех линейных операторов, действующих в пространстве представления U^α.

Правило свертывания (1.6) порождает семейство интегральных операторов

$$\Pi_\alpha : L^1_D(G) \to Jm(\Pi_\alpha) = J_D^{<\alpha>}(G), \tag{1.8}$$

действующих по формуле $\Pi_\alpha(f) = f \times \sigma_\alpha$. Из соотношения (1.6) следует, что операторы Π_α – проекторы, для которых имеет место формула

$$\Pi_\alpha \Pi_\beta = \delta_{\alpha\beta} \Pi_\beta. \tag{1.9}$$

Так как проекторы Π_α конечномерны, то значит есть компактные операторы. Резюмируя все вышесказанные свойства идеалов, можно утверждать, что семейство проекторов $\{\Pi_\alpha\}$ полно, минимально, тотально (т. е. $L^1_D(G) = \overline{\sum_{\alpha} J_D^{<\alpha>}(G)}$; $J_D^{\alpha}(G) \cap \overline{\sum_{\beta\neq\alpha} J_D^{<\beta>}(G)} = \{0\}$ для всех α и $\bigcap_{\alpha} Ker(\Pi_\alpha) = \{0\}$).

Легко видеть, что $[\Pi_\alpha, \tau^s] = 0$ и значит $[\Pi_\alpha, \theta^s] = 0$ и $R(\tau)(J_D^{<\alpha>}(G)) \subset J_D^{<\alpha>}(G)$, $L(\theta)(J_D^{<\alpha>}(G)) \subset J_D^{<\alpha>}(G)$.

Вышеописанная классическая ситуация есть основа для анализа банаховых представлений компактных групп, порожденных сдвигами Дельсарта.

II. Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел и $T: G \to BL(X)$ – представление компактной группы G в пространстве X, порожденной сдвигами Дельсарта, т. е.

$$\tau^s f(t) = \int_{\mathcal{A}(G)} T(t \circ a(s)) d\nu(a) = T(s)T(t). \tag{2.1}$$

Так как представление T топологической группы предполагается сильно непрерывным, то в силу теоремы Банаха-Штейнгауза имеем $M = \sup_{t\in G}\|T(t)\| < \infty$. В случае, когда $\mathcal{A}(G) = \{e\}$, получаем обычное представление группы G, порожденной сдвигом на группе G.

Представление T определяет преобразование Фурье-Гельфанда $\wedge: L^1_D(G) \to BL(X)$, заданное формулой

$$\hat{f} = \int_G f(t) T(t^{-1}) d\mu(t), \tag{2.2}$$

осуществляет непрерывный гомоморфизм $L_D^1(G)$ в $BL(X)$, т. к. $\|\hat{f}\| \le M\|f\|_{1,D}$.

Имеет место следующая теорема, которая усиливает результаты, приведенные в [10,11].

Теорема 2.1. Пусть $T: G \to BL(X)$ – представление компактной группы G, порожденной сдвигами Дельсарта в банаховом пространстве X. Тогда ограниченные операторы

$$P_\alpha = \int_G \tau_\alpha(t) T(t^{-1}) d\mu(t) \qquad (2.3)$$

образуют полную, минимальную, тотальную систему попарно аннулирующих проекторов, коммутирующих с представлением T, так что подпространства $X_\alpha = Jm(P_\alpha)$ инвариантны для представления T

$$X = \overline{\sum_\alpha X_\alpha}. \qquad (2.4)$$

Кроме того, любое инвариантное подпространство, на котором представление T эквивалентно U^α, содержится в X_α.

Доказательство. Так как $P_\alpha = \hat{\sigma}_\alpha$, то $P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha,\beta} P_\beta$. Так как проекторы P_α – образы функций σ_α при преобразовании Фурье–Гельфанда и операторы $T(t)$ входят в сильное замыкание образа $L_D^1(G)$ при этом преобразовании, то $[P_\alpha, T(t)] = 0$ для всех $t \in G$.

Для каждого $x \in X$ рассмотрим непрерывный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : L_D^1(G) \to X$ по формуле $\mathcal{L}_x f = \hat{f}x$. Тогда $\mathcal{L}_x$ сплетает регулярное представление $R(\tau)$ и данное представление T, т. е. $\mathcal{L}_x R(\tau^s) = T(s)\mathcal{L}_x$ $(s \in G)$. Отсюда имеем, что $\mathcal{L}_x \tau_\alpha = P_\alpha x$.

Убедимся в полноте системы проекторов $\{P_\alpha\}$. В самом деле, пусть $\varphi \in X^*$ – такой функционал, что $\varphi\big|_{X_\alpha} = 0$ при всех α. Рассмотрим произвольные элементы $x \in X$ и $f \in L_D^1(G)$. Тогда $\mathcal{L}_x(f \times \sigma_\alpha) = P_\alpha \hat{f}x = P_\alpha \mathcal{L}_x f$. Так как $\mathcal{L}_x : L_D^1(G) \to X$, то $\mathcal{L}_x^* : X^* \to L_D^1(G)^*$.

Поэтому для каждого функционала $\psi \in X^*$ имеем, что

$$\mathcal{L}_x^* \psi(f \times \sigma_\alpha) = \psi(\mathcal{L}_x(f \times \sigma_\alpha)) = \psi(P_\alpha \mathcal{L}_x f). \qquad (2.5)$$

Ввиду того что $\varphi\big|_{X_\alpha} = 0$, то в силу (2.5) функционал $\mathcal{L}_x^* \varphi$ также аннулируется на подпространствах $J_D^{<\alpha>}(G)$, и так как $L_D^1(G) = \overline{\sum_\alpha J_D^{<\alpha>}(G)}$, то $\mathcal{L}_x^* \varphi = 0$.

Так как $x \in Jm(\mathcal{L}_x)$, то $\varphi(x) = 0$ и значит $\varphi = 0$.

Покажем тотальность системы проекторов $\{P_\alpha\}$. Пусть элемент $x \in X$ такой, что для всех α $P_\alpha x = 0$. Так как $\mathcal{L}_x(f \times \sigma_\alpha) = 0$, то при каждом $\varphi \in X^*$ функционал $\mathcal{L}_x^* \varphi = 0$. Значит $\mathcal{L}_x^* = 0$, т. е. $\mathcal{L}_x = 0$. Тогда $\hat{f}x = 0$ для всех функций $f \in L_D^1(G)$. В связи с тем, что сильное замыкание групповой алгебры $L_D^1(G)$ при преобразовании Фурье–Гельфанда содержит единичный оператор (т. к. $\lim_U \hat{\chi}_{U(e)} x = x$), то $x = 0$.

Наконец, пусть $Y \subset X$ – инвариантное подпространство для представления T такое, что $T|_Y \sim U^\alpha$. Для каждого элемента $x \in X$ и каждого функционала $\varphi \in X^*$ функция $f(t) = \varphi(T(t)x)$ – линейная комбинация системы метрических элементов $(u_{ij}^\alpha(t))$. Поэтому $\varphi(P_\alpha x) = (\sigma_\alpha \times f)(e) = (\Pi_\alpha f)(e) = f(e) = \varphi(x)$. Но тогда $x = P_\alpha x \in X_\alpha = Jm(P_\alpha)$. Теорема доказана.

Напомним, что множество тех унитарных, неприводимых представлений U^α, для которых $X_\alpha = Jm(P_\alpha) \neq (0)$ (т. е. $P_\alpha \neq 0$), называется спектром представления T. Поэтому вышеописанное разложение есть спектральное разложение для представления T.

Следствие 2.2. Для банахова представления $T : G \to BL(X)$ компактной группы G в банаховом пространстве X, порожденной сдвигом Дельсарта, система конечномерных подпредставлений образует полную систему.

Если G – топологическая группа и T – представление G в пространстве X, то вектор $x \in X (x \neq 0)$, порождающий одномерное инвариантное подпространство для представления T называется весовым. При этом $T(t)x = \chi(t)x$, где $\chi : G \to C^* = C \setminus \{0\}$ – одномерный комплексный характер группы G (т. е. непрерывный гомоморфизм группы G в C^*).

Следствие 2.3. Если G – абелева компактная группа и $T : G \to BL(X)$ – банахово представление групп G в банаховом пространстве X, порожденное сдвигом Дельсарта, то X разлагается в топологическую прямую сумму весовых подпространств.

Отметим, что если характер χ такой, что $|\chi(t)| = 1$ для всех $t \in G$, то характер χ называется унитарным. Все характеры компактной группы являются унитарными.

В случае, когда $X = D(G)$ и $T(t) = R(\tau')$ – правое регулярное представление, порожденное сдвигами Дельсарта, то получаем:

Следствие 2.4. (Б.М.Левитан). Пусть G – компактная группа, тогда каждая функция $f \in D(G)$ может быть равномерно аппроксимирована на G линейными комбинациями вида

$$S_N(t) = \sum_{P=1}^{N} \sum_{ij=1}^{\alpha_p} a_{ij}^{(\alpha_p)} u_{ij}^{\alpha_p}(t) = \sum_{p=1}^{N} tr(A^{\alpha_p} U^{\alpha_p}(t)), \tag{2.6}$$

где $tr(B)$ – след матрицы B.

Доказательство. Беря в качестве $T(t) = R(\tau')$, мы получаем систему взаимно аннулирующих проекторов

$$P_\alpha = \int_G \sigma_\alpha(t) R(\tau') d\mu(t),$$

т. е. $P_\alpha f(s) = \int_G \sigma_\alpha(t) \tau' f(s) d\mu(t) = \int_{\mathcal{A}(G)} P_\alpha^{<a>} f(s) d\nu(a)$,

где $P_\alpha^{<a>} f(s) = \int_G \sigma_\alpha(t) f(s \circ a(t)) d\mu(t)$, $a \in \mathcal{A}(G)$.

Система проекторов $\{P_\alpha\}$ коммутирует с представлением $R(\tau)$ и образует полную, минимальную, тотальную систему. Таким образом пространство Дельсарта $D(G)=\overline{\sum_\alpha D_\alpha(G)}$, где $D_\alpha(G)=Jm(P_\alpha)$, $\dim D_\alpha(G)<\infty$. Следствие доказано.

В случае, когда группа G абелева, то $D(G)=\overline{\sum_\chi D_\chi(G)}$, где $D_\chi(G)$ – весовые подпространства для правого регулярного представления $R(\tau)$.

Заметим, что если $\mathcal{A}(G)=\{e\}$, то $R(\tau^s)f(t)=f(ts)$ – обычный сдвиг по группе, $D(G)=C(G)$ и в силу теоремы 2.1 имеем $C(G)=\overline{\sum_\alpha C_\alpha(G)}$, где

$$C_\alpha(G)=Jm(P_\alpha),\ \text{а}\ P_\alpha f(s)=\int_G \sigma_\alpha(t)f(st)d\mu(t).$$

В этом случае получаем следующее:

Следствие 2.5. Каждая непрерывная функция f на компактной группе G равномерно на G аппроксимируется линейными комбинациями вида (2.6).

Замечание 2.6. Отметим, что в некоторых случаях операторы обобщенного сдвига попадают в класс сдвигов Дельсарта. В этом смысле показателен следующий случай (см. [11]).

Пусть операторы обобщенного сдвига τ^{R^n} порождаются генераторами $\delta_{k,s}$ с постоянными коэффициентами. Тогда $\overset{x}{\delta_i}=\delta_i$. Поэтому функция $u(s,t)=\tau^s f(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\delta_{k,s}u=\delta_{k,t}u; \qquad k=1,\dots,p\ge n, \tag{2.7}$$

$$u\big|_{s=0}=f(t), \tag{2.8}$$

$$D_s^\lambda u\big|_{s=0}=c_\lambda f(t), \tag{2.9}$$

где $D_s^\lambda=\dfrac{\partial^{|\lambda|}}{(\partial s_1)^{\lambda_1}\dots(\partial s_n)^{\lambda_n}}$, $|\lambda|=\lambda_1+\dots+\lambda_n$, c_λ – константы.

Если искать решение уравнения (2.7) в виде преобразования Фурье, т. е.

$$u(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)e^{i[<\alpha,t>+<\rho,s>]}d\alpha, \tag{2.10}$$

где

$$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ \rho=(\rho_1,\dots,\rho_n), <\alpha,t>=\sum_{k=1}^n \alpha_k t_k,\ <\rho,s>=\sum_{k=1}^n \rho_k s_k,\ d\alpha=d\alpha_1\dots d\alpha_n.$$

Здесь $\rho_1,\dots,\rho_n$ – некоторые функции от $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, которые следует определить. Из (2.7) в предположении, что $\delta_k=\sum a_{k,\gamma_k}D^{\gamma_k}$, имеем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum a_{k,\gamma_k}(i\rho_1)\gamma_{k_1}\dots(i\rho_n)\gamma_{k_n}=\sum a_{k,\gamma_k}(i\alpha_1)\gamma_{k_1}\dots(i\alpha_n)\gamma_{k_n}, \tag{2.11}$$

в которой правые части известны. Пусть число решений системы (2.11) есть m, т. е.

$$\rho_r^{(q)}=\varphi_r^{(q)}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\quad (r=1,\dots,n;q=1,\dots,m). \tag{2.12}$$

Ясно, что число начальных данных (2.8)–(2.9) должно равняться m. При фиксированном q формулы (2.12) определяют преобразование $\boldsymbol{R}^n$ в $\boldsymbol{R}^n$ (или C^n). Эти преобразования образуют полугруппу. Чтобы преобразования (2.12) образовали группу, необходимо, чтобы при фиксированном q уравнения (2.12) были однозначно разрешимы относительно переменных $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Это может быть лишь в том случае, когда система (2.12) линейна:

$$\rho_r^{(q)} = \sum_{j=1}^{n} a_{r,j}^{(q)} a_j \,. \tag{2.13}$$

В случае преобразования вида (2.13) обобщенный сдвиг имеет следующий вид:

$$\tau^s f(t) = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) e^{i[<\alpha,t> + \sum_{r=1}^{n} s_r \sum_{\lambda=1}^{n} a_{r\lambda}\alpha_\alpha]} d\alpha = \frac{1}{m} \sum_{q=1}^{m} f(t_1 + \sum_{r=1}^{n} a_{r,1}^{(q)} s_r, \dots, t_n + \sum_{r=1}^{n} a_{r,n}^{(q)} s_r),$$

т. е. получили частный случай сдвига Дельсарта.

Кафедра дифференциальных уравнений *Поступила 29.06.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горин Е.А.** Неравенства Берштейна с точки зрения операторов. – Вест. Харьковского ун-та. (Прикл. матем. и механика), 1980, в. 45, №205, с. 77–105.
2. **Bonsall F.F., Duncan J.** Complete Normed Algebras Springer, 1973.
3. **Любич Ю.И.** Почти-периодичность в спектральном анализе операторов. – ДАН СССР, 1960, т. 132, №3, с.518–520.
4. **Любич Ю.И.** Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора. – УМН., 1963, т.18, в. 1(109), с. 165–171.
5. **Караханян М.И.** Почти-периодичность в спектральном анализе нормальных операторов. – ДАН Арм. ССР, 1986, т.83, №4, с. 154–157.
6. **Караханян М.И.** Об условиях полноты системы собственных векторов обобщенно нормального оператора. – Уч. записки ЕГУ, 1988, №3,(169), с. 3–8.
7. **Левитан Б.М.** Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962.
8. **Наймарк М.А.** Теория прдставлений групп. М.: Наука, 1976.
9. **Наймарк М.А.** Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
10. **Любич Ю.И.** Введение в теорию банаховых представлений групп. Харьков: Выща школа, 1985.
11. **Любич М.Ю., Любич Ю.И.** Почти-периодичность полугруппы операторов и теория Перрона-Фробениуса. – XV Зимняя воронежская школа, 1987, ДЕП ВИНИТИ, №5691.

Մ.Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

ԴԵԼՍԱՐՏԻ ՏԵՂԱՇԱՐԺԵՐՈՎ ԾՆՎԱԾ ԿՈՄՊԱԿՏ ԽՄԲԻ ԲԱՆԱԽԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում G-կոմպակտ խմբի T Բանախի ներկայացման համար ապացուցված է հետևյալ արդյունքը: Դիցուք $T: G \to BL(X)$-ի G-խմբի Բանախի ներկայացումն է X կոմպլեքս Բանախի տարածությունում: Այդ դեպքում $P_\alpha = \int_G \sigma_\alpha(t) T(t^{-1}) d\mu(t)$ պրոեկտորների ընտանիքը կազմում է լրիվ, մինիմալ, տոտալ, զույգ առ զույգ ոչնչացնող համակարգ: Որպես կիրառություն ստացվում են որոշ մոտարկման թեորեմներ կապված համարյա պարբերական ֆունկցիաների հետ: