ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.956

Г.В. ДАЛЛАКЯН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе доказывается, что решение граничной задачи в неограниченной области Ω может быть получено как предел при $r \to \infty$ решения u_r граничной задачи в ограниченной области $\Omega_r = \Omega \cap B_{r,\mu}$, где $B_{r,\mu} = \{x: |x|_\mu < r\}$ – обобщенный шар. Аналогичный результат получается и для решений задач в полупространстве.

§1. Уравнение $P(D)u + \lambda Q(x,D)u = f$ в R^n. Будем пользоваться следующими обозначениями: R^n – n-мерное евклидово пространство вещественных векторов, N_0^n – целочисленная решетка, т. е. множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, где $\alpha_i (i = 1,...,n)$ – целые неотрицательные числа. Далее, пусть $m = (m_1,...,m_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $m_0 = \max\limits_{1\le j\le n} m_j$, $\mu_0 = 1/m_0$, $\mu = (\mu_1,...,\mu_n)$, где $\mu_j = 1/m_j$, $j = 1,...,n$, $|\mu| = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j$. Если $x \in R^n$, $\alpha \in N_0^n$, то положим

$$(\mu,\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j,\alpha_j, \quad |x|_\mu = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2/\mu_j})^{1/2},$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}, \; D^\alpha = D_1^{\alpha_1}...D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} (j = 1,...,n).$$

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор μ-порядка 2 с постоянными действительными коэффициентами, символ $P(\xi)$ которого представлен в виде

$$P(\xi) = P^0(\xi) + P^1(\xi) = \sum_{(\mu,\alpha)=2} \gamma_\alpha \xi^\alpha + \sum_{(\mu,\alpha)<2} \gamma_\alpha \xi^\alpha .$$

Определение. Оператор $P(D)$ называется полуэллиптическим (см. [1]), если существует число $\chi > 0$ такое, что

$$|P^0(\xi)| \ge \chi |\xi|_\mu^2, \quad \forall \xi \in R^n . \tag{1.1}$$

Для каждой области $\Omega \subset R^n$ обозначим через $H^{lm}(\Omega)(l \in N)$ анизотропное пространство Соболева, т. е. множество измеримых функций u с конечной нормой

$$\|u\|_{m,l,\Omega} = \|u\|_{l,\Omega} = \|u\|_\Omega + \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{lm_i} u\|_\Omega , \tag{1.2}$$

где $\|\cdot\|_\Omega$ – норма пространства $L_2(\Omega)$.

Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (1.2) обозначим через $\overset{0}{H}{}^{lm}(\Omega)$. В дальнейшем через c обозначим различные положительные константы.

Рассмотрим полуэллиптическое уравнение (определение см. в [1]) вида

$$A(x,D)u \equiv P(D)u + Q(x,D)u = f \quad \text{в} \quad R^n. \tag{1.3}$$

Здесь $P = P(D)$ – полуэллиптический оператор μ-порядка 2, $Q = Q(x,D)$ – дифференциальный оператор μ-порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_\mu \geq a$, $f \in L_{2,a}(R^n)$ (т. е. $f \in L_2(R^n)$ и $f(x) = 0$ при $|x|_\mu > a$).

Будем предполагать, что оператор $P(D)$ удовлетворяет условию

$$P(\xi) \neq 0, \ \forall \xi \in R^n. \tag{1.4}$$

Известно, что такой оператор имеет бесконечно дифференцируемое в $R^n \setminus \{0\}$ и экспоненциально убывающее на бесконечности фундаментальное решение $E(x)$, производные которого также экспоненциально убывают на бесконечности, т. е.

$$\left|D^\alpha E(x)\right| \leq c(\alpha) e^{-\gamma_1 |x|_\mu^{\mu_0}} \quad \text{при} \quad |x|_\mu > 1, \tag{1.5}$$

где γ_1 – некоторое положительное число (см. [2,3]). Пусть $P^{-1}\omega = E * \omega$. Тогда справедлива

Лемма 1 (см. [3]). Функция $u \in H^{2m}(R^n)$ является единственным решением уравнения (1.3) тогда и только тогда, когда $\omega = Pu$ является единственным принадлежащим $L_{2,a}(R^n)$ решением уравнения

$$\omega + QP^{-1}\omega = f.$$

Отметим, что уравнение (1.3) однозначно разрешимо в классе $H^{2m}(R^n)$ (см. [3]).
Положим
$B_{r,\mu} = \{x; |x|_\mu < r\}$ (μ-шар), $S_{r,\mu} = \{x; |x|_\mu = r\}$ (μ-сфера).

Рассмотрим краевую задачу

$$A(x,D)u_r = f, \quad x \in B_{r,\mu}, \tag{1.6}$$

$$u_r \in \overset{0}{H}{}^m(B_{r,\mu}). \tag{1.7}$$

Теорема 1. Пусть полуэллиптический оператор $A(x,D)$ (см. (1.3)) удовлетворяет условию (1.4). Тогда для любых $f \in L_{2,a}(R^n)$ и $r \geq a$ задача (1.6), (1.7) имеет притом единственное решение $u_r \in H^{2m}(B_{r,\mu})$ (см. [4]). Если u и u_r – решения соответственно уравнения (1.3) и задачи (1.6), (1.7), то при достаточно больших r имеет место оценка

$$\|u - u_r\|_{1,B_{r,\mu}} \leq c e^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \|f\|_{L_{2,a}(R^n)}. \tag{1.8}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и ограниченности оператора $P_r^{-1}: L_{2,a}(R^n) \to H^{2m}(B_{r,\mu})$ формула $u_r = P_r^{-1}\omega_r$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между принадлежащими $L_{2,a}(R^n)$ решениями уравнения

$$\omega_r + QP_r^{-1}\omega_r = f$$

и принадлежащими $H^{2m}(B_{r,\mu})$ решениями задачи (1.6), (1.7).

Рассмотрим операторы $F = I + \lambda QP^{-1}$, $F_r = I + \lambda QP_r^{-1}$, отображающие $L_{2,a}(R^n)$ в себя (I – единичный оператор в $L_{2,a}(R^n)$).

Покажем, что

$$\|F - F_r\| \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}}. \tag{1.9}$$

Имеем $v_r = u - u_r = P^{-1}\omega - P_r^{-1}\omega_r \in H^{2m}(B_{r,\mu})$. Функция v_r удовлетворяет задаче

$$P(D)v_r(x) = 0, \ \ x \in B_{r,\mu},$$

$$v_r - P^{-1}\omega \in \overset{0}{H}{}^m(B_{r,\mu}).$$

Из оценки (1.5) следует, что при $|x|_\mu \to \infty$

$$\left|D^\alpha(P^{-1}\omega)\right| = \left|D^\alpha E * \omega\right| \le c(\alpha)e^{-\gamma_1|x|_\mu^{\mu_0}} \int|\omega|dy \le c(\alpha)e^{-\gamma_1|x|_\mu^{\mu_0}} \|\omega\|_{L_{2,a}(R^n)},$$

поэтому в силу теоремы 1.3 работы [3]

$$\left\|P_r^{-1}\omega_r - P^{-1}\omega\right\|_{1,B_{r,\mu}} \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \|\omega\|_{L_{2,a}(R^n)}. \tag{1.10}$$

Отсюда, очевидно, следует (1.9). А т. к. $u = A^{-1}f = P^{-1}F^{-1}f$, то из (1.9) и (1.10) следует и оценка (1.8).

Замечание. В дальнейшем будем пользоваться оценками

$$\left\|A^{-1}f\right\|_{2,R^n} \le c\|f\|_{L_{2,a}(R^n)}; \ \left\|A_r^{-1}f\right\|_{2,B_{r,\mu}} \le c(r)\|f\|_{L_{2,a}(R^n)}, \ r \ge a, \tag{1.11}$$

которые видны из доказательства теоремы 1.

§2. Граничные задачи в неограниченных областях с конечной границей. Пусть $\Omega \subset R^n$ – неограниченная область с ограниченной бесконечно гладкой границей Γ и пусть $B_{r,\mu} \supset R^n \setminus \Omega$ для некоторого r.

Рассмотрим краевые задачи

$$A(x,D)u = f, \ x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega). \tag{2.2}$$

$$A(x,D)u_r = f, \ x \in \Omega_{r,\mu} = \Omega \cap B_{r,\mu}, \tag{2.3}$$

$$u_r \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu}). \tag{2.4}$$

Предварительно сделаем следующее

Замечание. Когда будет рассматриваться уравнение во всем пространстве, область Ω предполагается такой, чтобы коэффициенты оператора $A(x,D)$ можно было продолжить в область $R^n \setminus \overline{\Omega}$ так, чтобы уравнение (2.1) имело единственное решение в $H^{2m}(R^n)$ для любой $f \in L_{2,a}(R^n)$ (см. [5], [3]).

*Теорема 2**. Пусть задача (2.1) (2.2) для любой $f \in L_{2,a}(R^n)$ имеет решение в классе $H^{2m}(\Omega)$ ([7], теорема 2.8). Тогда для (каждого) решения u задачи (2.1), (2.2) при достаточно больших r существует такое решение $u_r \in H^{2m}(\Omega_{r,\mu})$ задачи (2.3), (2.4), что

$$\|u - u_r\|_{1,\Omega_{r,\mu}} \le c e^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} [\|f\|_{L_{2,a}(\Omega)} + \|u\|_{\Omega_{a,\mu}}]. \tag{2.5}$$

Доказательство. Будем искать решение задачи (2.1), (2.2) в виде сужения на область Ω решения уравнения во всем пространстве

$$A(x,D)\breve{u} = f + g, \quad \breve{u} \in H^{2m}(R^n) \tag{2.6}$$

с неизвестной функцией $g \in L_2(R^n \setminus \Omega)$. Здесь и в дальнейшем, когда функция $f \in L_2(\Omega)$ (или $g \in L_2(R^n \setminus \Omega)$) рассматривается как элемент $L_2(R^n)$, предполагается, что она продолжена в область $R^n \setminus \Omega$ (или Ω) со значением ноль. Обозначим через $\aleph$ следующий оператор из $L_2(R^n)$ в $\overset{0}{H}{}^m(\Omega)$:

$$\aleph h = BA^{-1}h,$$

где $B : H^{2m}(\Omega) \to \overset{0}{H}{}^m(\Omega)$, через $\aleph'$ – сужение оператора $\aleph$ на $L_2(R^n \setminus \Omega)$. Тогда для того чтобы решение уравнения (2.6) являлось решением задачи (2.1), (2.2), необходимо и достаточно, чтобы g удовлетворяла уравнению

$$\aleph' g = -\aleph f. \tag{2.7}$$

Оператор $\aleph'$ непрерывно отображает все пространство $L_2(R^n \setminus \Omega)$ на пространство $\overset{0}{H}{}^m(\Omega)$. Действительно, в силу (1.11)

$$\|\aleph h\|_{1,\Omega} = \|B(A^{-1}h)\|_{1,\Omega} \le c\|A^{-1}h\|_{1,R^n} \le c\|h\|_{R^n \setminus \Omega}.$$

Через $\breve{u}$ обозначим какое-нибудь продолжение без потери гладкости функции u на все пространство R^n. Тогда

$$A(x,D)\breve{u} = g,$$

где $g \in L_2(R^n \setminus \Omega)$, при этом $\breve{u} = A^{-1}g$, и поэтому

$$\aleph' g = BA^{-1}g = B\breve{u}.$$

Теперь отыщем u_r в виде сужения на $\Omega_{r,\mu}$ решения задачи

$$A(x,D)\breve{u}_r = f + g_r, \quad x \in B_{r,\mu}, \tag{2.8}$$

$$\breve{u}_r \in \overset{0}{H}{}^m(B_{r,\mu}) \tag{2.9}$$

* Доказательство основано на рассуждениях, проведенных ранее Б.Р. Вайнбергом в работе [6].

с неизвестной функцией $g_r \in L_2(R^n \setminus \Omega)$. Обозначим через $\aleph_r$ следующий оператор из $L_{2,a}(R^n)$ в $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu})$:

$$\aleph_r h = BA_r^{-1} h,$$

и через $\aleph'_r$ – сужение оператора $\aleph_r$ на $L_2(R^n \setminus \Omega)$. Тогда, чтобы решение задачи (2.8), (2.9) являлось решением задачи (2.3), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы g_r удовлетворяла уравнению

$$\aleph'_r g_r = -\aleph_r f. \tag{2.10}$$

Аналогично получаем, что оператор $\aleph'_r$ непрерывно отображает пространство $L_2(R^n \setminus \Omega)$ в $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu})$. В силу оценок (1.9)–(1.11)

$$\|(\aleph_r - \aleph)h\|_{1,\Omega_{r,\mu}} = \|B(A_r^{-1} - A^{-1})h\|_{1,\Omega_{r,\mu}} \le c\|(A_r^{-1} - A^{-1})h\|_{1,B_{r,\mu}} \le$$

$$\le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \|h\|_{L_{2,a}(R^n)},$$

поэтому $\|\aleph_r - \aleph\| \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}}$. $\quad$ (2.11)

Обозначим ядро оператора $\aleph'$ через N, ядро оператора $\aleph'_r$ – через N_r, и пусть $M_1 = L_2(R^n \setminus \Omega)/N$ и $M_1^r = L_2(R^n \setminus \Omega)/N_r$ – факторпространства. Обозначим через $\aleph''$, $\aleph''_r$ сужения операторов $\aleph'$ и $\aleph'_r$ на M_1 и M_1^r соответственно. В силу (2.11) из доказанных свойств операторов $\aleph'$ и $\aleph'_r$ следует

Лемма 2. Оператор $\aleph''$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает все пространство M_1 на все пространство $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu})$. При достаточно больших r оператор $\aleph''_r$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает все пространство M_1^r на все пространство $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu})$. Обозначим через $\mathfrak{R}_r$ такое отображение пространства M_1 в M_1^r, при котором каждому элементу $h \in M_1$, такому, что $\aleph'' h = \psi \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega_{r,\mu})$, соответствует элемент $h_r \in M_1^r$, для которого $\aleph''_r h_r = \psi$. Из леммы 2 и оценки (2.11) следует

Лемма 3. При достаточно больших r отображение $\mathfrak{R}_r$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами M_1 и M_1^r. При этом

$$\|h - \mathfrak{R}_r h\|_{R^n \setminus \Omega} \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \|h\|_{R^n \setminus \Omega}. \tag{2.12}$$

Пусть $\tilde{\mathfrak{R}}_r : N \to N_r$ ставит в соответствие каждому элементу $h \in N$ его проекцию на N_r. Из леммы 3 и оценки (2.11) следует

Лемма 4. При достаточно больших r отображение $\tilde{\mathfrak{R}}_r : N \to N_r$ является взаимно однозначным и выполняется соотношение

$$\left\|h-\tilde{\mathfrak{R}}_r h\right\|_{R^n\setminus\Omega} \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \left\|h\right\|_{R^n\setminus\Omega}. \tag{2.13}$$

Пусть $u\in H^{2m}(\Omega)$ является решением задачи (2.1), (2.2). По этой функции построим u. Обозначим через $\breve{u}$ продолжение функции u без потери гладкости в область $R^n\setminus\Omega$ так, чтобы выполнялось уравнение (2.6) и g удовлетворяла уравнению (2.7). Пусть

$$g=g^{(1)}+g^{(2)},\quad g^{(1)}\in M_1,\quad g^{(2)}\in N. \tag{2.14}$$

Тогда из (2.7) следует, что

$$g^{(1)}=-\aleph''^{-1}\aleph f. \tag{2.15}$$

Положим

$$g_r=-\aleph_r''^{-1}\aleph_r f+\tilde{\mathfrak{R}}_r g^{(2)} \tag{2.16}$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.10). Пусть $\breve{u}_r$ – решение задачи (2.8), (2.9) с построенной функцией g_r в правой части уравнения (2.8). Тогда сужение $\breve{u}$ на область $\Omega_{r,\mu}$ является решением задачи (2.3), (2.4).

Остается получить оценку (2.5). Из (2.11)–(2.16) и лемм 2, 3 следует, что

$$\left\|g-g_r\right\|_{R^n\setminus\Omega} \le ce^{-\gamma_1 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} [\left\|f\right\|_{L_{2,a}(\Omega)}+\left\|g\right\|_{R^n\setminus\Omega}]. \tag{2.17}$$

Продолжение $\breve{u}$ функции u можно построить так, чтобы

$$\left\|\breve{u}\right\|_{2,R^n\setminus\Omega} \le c\left\|u\right\|_{2,\Omega_{b,\mu}},\quad (b<a,\ R^n\setminus\Omega\subset B_{b,\mu}).$$

Тогда $\left\|g\right\|_{R^n\setminus\Omega} \le c\left\|u\right\|_{2,\Omega_{b,\mu}} \le c[\left\|f\right\|_{L_{2,a}(\Omega)}+\left\|u\right\|_{\Omega_{a,\mu}}]$. (2.18)

Последнее неравенство – это локальная априорная оценка для решений полуэллиптических уравнений (см. [8]). Т .к. $\breve{u}=A^{-1}(f+g)$, $\breve{u}_r=A_r^{-1}(f+g_r)$, то из (2.17), (2.18) и теоремы 1 следует (2.5).

Теорема доказана.

§3. Задачи в полупространстве. Рассмотрим в $R_+^n=\{x\in R^n; x_n>0\}\,(n\ge 2)$ задачу

$$P(D)u(x)=f(x),\quad x\in R_+^n, \tag{3.1}$$

$$B_j(D)u(x)\Big|_{x_n=0}=\varphi_j(x'),\quad j=1,\dots,m_0. \tag{3.2}$$

Здесь $P(D)=D_n^{2m_0}+\sum\limits_{\substack{(\mu',\alpha')\le 2-k\mu_0\\ 0\le k\le 2m_0-1}} \gamma_{\alpha',\alpha_n} D^{\alpha'}D_n^k$ – полуэллиптический оператор, удовлетворяющий условию (1.4), $\mu'=(\mu_1,\dots,\mu_{n-1})$, $\alpha'\in N_0^n$, $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$, $f\in L_{2,a}(R_+^n)$, $B_j(D)=D_n^{\rho_j}+\sum\limits_{\substack{(\mu',\alpha')\le 2t_j-k\mu_0\\ 0\le k\le \rho_j-1}} \beta_{\alpha',k}^{(j)} D^{\alpha'}D_n^k$, где $\rho_j\in N_0^1$, $\rho_j\le m_0-1$, $t_j\in R^1$, $t_j\le\dfrac{1-\mu_0}{2}$, $j=1,\dots,m_0$, $\varphi_j\,(j=1,\dots,m_0)$ – заданные функции (принадлежность их некоторым классам объясняется ниже).

Для любого вещественного τ обозначим через $H^\tau(\mu',R^{n-1})$ пространство Соболева-Лиувилля, т. е. множество тех медленно растущих обобщенных функций

Φ (см. [1]), преобразование Фурье которых является измеримой функцией с конечной нормой

$$\|\Phi\|^2_{H(\mu',R^{n-1})} = \int_{R^{n-1}} \left|\tilde{\Phi}(\xi')\right|^2 (1+|\xi'|_{\mu'})^{2\tau} d\xi'.$$

Через $P(D,r)$ обозначим оператор, который получается, если к каждому одночлену μ-порядка q оператора $P(D)$ дописать множитель $r^{2-(\mu,q)}$. Аналогично получается оператор $B_j(D,r)$ из оператора $B_j(D)$ (с помощью множителя $r^{\rho_j-(\mu,q)}$).

Рассмотрим задачу вида

$$P(D,r)\tilde{u}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in R^n_+, \tag{3.3}$$

$$B_j(D,r)\tilde{u}(\tilde{x})\Big|_{x_n=0} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}'), \quad j = 1,\dots,m_0. \tag{3.4}$$

Положим $H^\tau(\mu',a,R^{n-1}) = \left\{f \in H^\tau(\mu',R^{n-1}); f(x') = 0 \quad \text{при} \quad |x'|_{\mu'} > a\right\}$.

Лемма 3 (см. [9]). Пусть задача (3.3), (3.4) является полуэллиптической задачей с параметром, $f \in L_{2,a}(R^n_+)$, $\varphi_j \in H^{1-t_j-\frac{\mu_0}{4}}(\mu',a,R^{n-1})$ $(j = 1,\dots,m_0)$. Тогда задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение u в классе $H^{2m}(R^n_+)$ и при $|x|_\mu \to \infty$ справедлива оценка

$$\left|D^\alpha u(x)\right| \le ce^{-\gamma_2|x|_\mu^{\mu_0}} [\|f\|_{L_{2,a}(R^n_+)} + \sum_{j=1}^{m_0} \|\varphi_j\|_{H^{1-t_j-\frac{\mu_0}{4}}(\mu',a,R^{n-1})}], \tag{3.5}$$

где γ_2 – некоторое положительное число, $(\mu,\alpha) \le 2$.

Пусть $G_{1,\mu} \subset R^n_+$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\Gamma_{1,\mu}$, для которой

$$\left\{x; |x|_\mu < 1, \ x_n = 0\right\} \subset \Gamma_{1,\mu}.$$

Далее, пусть для $r \ge 1$

$$G_{r,\mu} = \left\{x; \frac{x}{r^\mu} \in G_{1,\mu}\right\}, \Gamma_{r,\mu} = \left\{x; \frac{x}{r^\mu} \in \Gamma_{1,\mu}\right\}, \Gamma'_{r,\mu} = \Gamma_{r,\mu} \cap \{x_n = 0\},$$

$$\Gamma''_{r,\mu} = \Gamma_{r,\mu} - \Gamma'_{r,\mu}.$$

Рассмотрим задачу

$$P(D)u_r(x) = f, \ x \in G_{r,\mu}, \tag{3.6}$$

$$B_j(D)u_r\Big|_{\Gamma_{r,\mu}} = \varphi'_j, \ j = 1,\dots,m_0, \tag{3.7}$$

где
$$\varphi'_j = \begin{cases} \varphi_j, & x \in \Gamma'_{r,\mu}, \\ 0, & x \in \Gamma''_{r,\mu}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда при достаточно больших r задача (3.6), (3.7) имеет единственное решение u_r в пространстве $H^{2m}(G_{r,\mu})$, при этом для решения u задачи (3.1), (3.2) справедлива оценка

$$\|u - u_r\|_{1,G_{r,\mu}} \le ce^{-\gamma_2 r^{\mu_0}} r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}} \|f\|_{L_{2,a}(R^n_+)}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Функция $\vartheta_r = u - u_r$ удовлетворяет задаче

$$P(D)\vartheta_r(x)=0,\quad x\in G_{r,\mu},$$

$$B_j(D)\vartheta_r\Big|_{\Gamma_{r,\mu}}=0,\quad B_j(D)\vartheta_r\Big|_{\Gamma'_{r,\mu}}=B_j(D)u\Big|_{\Gamma'_{r,\mu}},\quad j=1,\dots,m_0.$$

Отсюда в силу (3.5) и теоремы 1.3 работы [3] следует (3.9).

Аналогично доказывается

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 3, $f\in L_2(R^n_+)$, $\varphi_j\in H^{1-l_j-\frac{\mu_0}{4}}(\mu',R^{n-1})(j=1,\dots,m_0)$. Тогда при достаточно больших r задача (3.6), (3.7) имеет единственное решение u_r в $H^{2m}(G_{r,\mu})$ и для решения u задачи (3.1), (3.2) выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\|u-u_r\|_{1,G_{r,\mu}}=0.$$

Рассмотрим теперь задачи

$$A(x,D)u\equiv P(D)u+Q(x,D)u=f,\quad x\in R^n_+,\tag{3.10}$$

$$[B_j(D)+C_j(x,D)]u\Big|_{x_n=0}=\varphi_j,\quad j=1,\dots,m_0,\tag{3.11}$$

$$A(x,D)u_r=f,\quad x\in G_{r,\mu},\tag{3.12}$$

$$[B_j(D)+C_j(x,D)]u_r\Big|_{\Gamma_{r,\mu}}=\varphi'_j,\quad j=1,\dots,m_0,\tag{3.13}$$

где $Q(x,D)$ – оператор μ-порядка не выше 2 с бесконечно гладкими в R^n_+ коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_\mu\ge a$, $C_j(x,D)$ – операторы μ-порядка не выше $1-\mu_0$ с бесконечно гладкими коэффициентами, которые равняются нулю при $|x|_\mu\ge a$, φ' имеет вид (3.8).

Теорема 5. Пусть выполнены условия леммы 3 и пусть задача (3.10), (3.11) имеет решение $u\in H^{2m}(R^n_+)$ для любых $f\in L_{2,a}(R^n_+),\varphi_j\in H^{1-l_j-\frac{\mu_0}{4}}(\mu',a,R^{n-1})$ $(j=1,\dots,m_0)$. Тогда существует такое решение $u_r\in H^{2m}(G_{r,\mu})$ задачи (3.12), (3.13), что при $r\to\infty$ выполняется соотношение

$$\|u-u_r\|_{1,G_{r,\mu}}\le ce^{-\gamma_2 r^{\mu_0}}r^{1+\frac{|\mu|-\mu_0}{2}}\|f\|_{L_{2,a}(R^n_+)}.$$

Кроме того, если решение задачи (3.10), (3.11) единственно, то при достаточно больших r решение задачи (3.12), (3.13) также единственно. Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 3.3 работы [10].

В заключение автор благодарит своего научного руководителя Г.А. Карапетяна за постановку задачи и ценные замечания.

Кафедра математических методов и моделирования *Поступила 17.09.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хермандер Л.** Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., Наука, 1965.
2. **Паламодов В.П.** Об условиях на бесконечности обеспечивающих корректную разрешимость некоторого класса уравнений вида $P(i\frac{\partial}{\partial x})u = f$. – ДАН СССР, 1959, т. 129, №4,с.740–744.
3. **Карапетян Г.А., Даллакян Г.В.** Об аппроксимации решений полуэллиптических уравнений в R^n. – Изв. НАН Армении (в печати), 2000.
4. **Никольский С.М.** Вариационная задача. – Мат. сборник, 1963, т. 65(104), №1, с. 53–75.
5. **Бесов О.В., Ильин В.П.** Естественное расширение класса областей в теоремах вложения. – Мат. сборник, 1968, т. 75(177), №4, с. 483–495.
6. **Вайнберг Б.Р.** Об эллиптических задачах в неограниченных областях. – Мат. сборник, 1968, т. 75, 3(121), с. 115–194.
7. **Карапетян Г.А.** Существование и единственность решения задачи Дирихле для гипоэллиптических уравнений в неограниченных областях. – Уч. записки ЕГУ, 1982, 3, с. 3–12.
8. **Казарян Г.Г.** Оценка в L_p смешанных производных через дифференциальные многочлены. Тр. МИАН СССР, 1969, т. 105, с. 66–76.
9. **Карапетян Г.А.** Регулярные уравнения с параметром. – Изв. АН Арм. ССР, 1990, т. 25, №2, с. 193–202.
10. **Шимон Л.** Об аппроксимации решений граничных задач в неограниченных областях. – Дифф. ур., 1973, т. 9, №8, с.1482–1492.

Գ.Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ Ω անսահմանափակ տիրույթում տրված եզրային խնդրի լուծումը կարող է ստացվել որպես $\Omega_r = \Omega \bigcap B_{r,\mu}$ ($B_{r,\mu} = \{x; |x|_\mu < r\}$-ը ընդհանրացված գունդ է) սահմանափակ տիրույթում տրված խնդրի լուծման սահման, երբ $r \to \infty$: Նմանատիպ արդյունք է ստացվում նաև կիսատարածությունում տրված եզրային խնդիրների լուծումների համար: