

Վ. Ջ. ԱՅՐԱՔԵՅԱՆ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ
 ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ
 ПРЯМОУГОЛЬНИКА

В настоящей работе приводится решение плоской задачи теории упругости для цилиндрически ортотропной пластинки в виде прямоугольника, на одной кромке которой заданы перемещения, а на трех остальных – напряжения. Введен малый физический параметр, и функция напряжений рассматривается в задаче по степени этого параметра. В рекуррентных краевых задачах функцию напряжений представляют в виде рядов Фурье. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Решение задачи для конкретных значений параметров доведено до числовых результатов, позволяющих исследовать характер распределения напряжений вблизи заделки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим упругую анизотропную плоскую пластинку постоянной толщины в виде прямоугольника с размерами (a,b), находящуюся в равновесии под действием сил, расположенных по краю; объемные силы отсутствуют.

Предполагаем, что пластинка обладает цилиндрической ортотропией, причем ось анизотропии g нормальна к срединной плоскости пластинки; в каждой точке имеются три плоскости упругой симметрии. Примем полюс анизотропии за начало цилиндрической системы координат r, φ, z , направив полярную ось x произвольно в срединной плоскости [1, 2].

Обобщенный закон Гука будет

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_\varphi}{E_\varphi} \sigma_\varphi, \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{\nu_r}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\varphi} \sigma_\varphi, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Составляющие напряжения определяются через функцию напряжений по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где функция напряжения определяется из следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{E_\varphi} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{E_\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \varphi^2} -$$

$$-\frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{E_r} + \frac{1}{G} - \frac{2\nu_r}{E_r} \right) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь E_r, E_φ – модули Юнга для растяжения-сжатия в радиальном направлении r и в тангенциальном направлении φ , G – модуль сдвига, ν_r, ν_φ – коэффициенты Пуассона.

Для решения поставленной задачи целесообразно представить уравнение (1.3) в прямоугольных декартовых координатах. Далее, для определенности предположим, что $E_r > E_\varphi$. Тогда можно ввести малый физический параметр δ таким образом:

$$\delta = \frac{E_r - E_\varphi}{E_r + E_\varphi} \quad (0 < \delta < 1). \quad (1.4)$$

После некоторых преобразований дифференциальное уравнение (1.3) можно представить так:

$$e \nabla^2 [\Phi] + \delta H [\Phi] = 0, \quad (1.5)$$

где для операторов $\nabla^2 []$ и $H []$ приняты следующие обозначения:

$$\nabla^2 [] = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} H [] = & (x^2 + y^2)^2 \left\{ [kx^2y^2 - y^4] \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2xy[2y^2 - k(x^2 - y^2)] \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + \right. \\ & + x[6y^2 - k(x^2 - 3y^2)] \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3y[-(4 + 3k)x^2 + (2 + k)y^2] \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - \\ & - (2 + k)(x^2 - y^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4(2 + k)xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - [6x^2y^2 - k(x^4 - 4x^2y^2 + y^4)] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + (2 + k)(x^2 - y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 3x[(2 + k)x^2 - (4 + 3k)y^2] \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + y[3(2 + k)x^2 - ky^2] \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \\ & \left. + 2xy[(2 + k)x^2 - ky^2] \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - (x^4 - kx^2y^2) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right\}, \quad (1.7) \end{aligned}$$

а для e и k –

$$e = \frac{E_r}{E_r + E_\varphi}, \delta k = \frac{E_r(E_\varphi - 2\nu_\varphi G - 2G)}{G(E_r + E_\varphi)}, \quad (1.8)$$

$$F(r, \varphi) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x}\right) = \Phi(x, y) \quad (1.9)$$

Напряжения выражаются через новую функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (1.10)$$

а перемещения определяются соотношениями

$$u_x = -\frac{v_\varphi}{E_\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{E_r} \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \delta \int \left[\frac{x^2 y^2 (1 - k_1)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{y^2 (y^2 + k_1 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{xy(2y^2 + k_1 x^2 - k_1 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx + f(y), \quad (1.11)$$

$$u_y = -\frac{v_r}{E_r} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{E_\varphi} \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \delta \int \left[\frac{y^2 (k x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2 (1 + k)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{xy(2y^2 - k x^2 + k y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dy + \varphi(x), \quad (1.12)$$

где

$$\delta k_1 = \frac{E_\varphi (E_r - 2\nu_r G - 2G)}{G(E_r + E_\varphi)}. \quad (1.13)$$

Таким образом решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения (1.3) в частных производных с неразделяющимися переменными с учетом (1.10)–(1.13)

2. Метод решения задачи. Дифференциальное уравнение (1.5) содержит малый параметр δ . Следовательно, естественно представить решение в виде ряда по степеням малого параметра [2]:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \delta \Phi_1(x, y) + \delta^2 \Phi_2(x, y) + \dots \quad (2.1)$$

Тогда при помощи (2.1), (1.14), и (1.5) для определения неизвестных $\Phi_j(x, y)$ получим следующие рекуррентные уравнения:

$$\nabla^2 [\Phi_0] = 0, \quad (2.2)$$

$$e \nabla^2 [\Phi_i] = -H[\Phi_{i-1}] \quad (i \geq 1). \quad (2.3)$$

Далее, принимая во внимание (2.1), можно установить, что

$$\langle \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle \sigma_x^{(j)}, \sigma_y^{(j)}, \tau_{xy}^{(j)}, u^{(j)}, v^{(j)} \rangle \delta^j, \quad (2.4)$$

где

$$\sigma_x^{(j)} = \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2}, \sigma_y^{(j)} = \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2}, \tau_{xy}^{(j)} = -\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x \partial y}, (j \geq 0), \quad (2.5)$$

$$u^{(j)} = -\frac{v_\varphi}{E_\varphi} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{1}{E_r} \int \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial y^2} dx + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \delta \int \left[\frac{x^2 y^2 (1 - k_1)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x^2} + \frac{y^2 (y^2 + k_1 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial y^2} + \frac{xy(2y^2 + k_1 x^2 - k_1 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x \partial y} \right] dx + f(y),$$

$$+ \frac{xy(2y^2 + k_1x^2 - k_1y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x \partial y} \Big] dx + f(y), \quad (2.6)$$

$$v^{(j)} = -\frac{v_r}{E_r} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \frac{1}{E_\varphi} \int \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} dy + \\ + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \int \left[\frac{y^2(kx^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2(1+k)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{xy(2y^2 - kx^2 + ky^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{j-1}}{\partial x \partial y} \right] dy + \varphi(x) \quad (j=0,1,2,\dots), \quad (2.7)$$

причем

$$\delta k_1 = \frac{E_\varphi(E_r - 2\nu_r G - 2G)}{G(E_r + E_\varphi)}, \quad \Phi_{-1} = 0.$$

Таким образом, решение второй задачи, т.е. решение плоской задачи теории упругости для цилиндрически ортотропной пластинки в виде прямоугольника, находящейся в равновесии под действием сил, также сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений (2.2)–(2.3) с учетом (2.4)–(2.7) при соответствующих граничных условиях.

3. Изгиб консольной цилиндрически ортотропной балки поперечной силой. Предположим, что один конец балки, материал которой обладает цилиндрической ортотропией, закреплен, а на другой – действует нагрузка, приводящая к изгибающей силе.

Решение рассматриваемой задачи приводится к определению функции напряжений $F(t, \varphi)$, удовлетворяющей рекуррентным дифференциальным уравнениям (2.2), (2.3), при следующих граничных условиях:

$$\frac{1}{E_r} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} dx - \nu_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) - ay + b = 0, \quad \frac{1}{E_\varphi} \left(\int \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} dy - \nu_\varphi \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) + ax + c = 0 \\ \text{при } x = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \lambda_k x \quad \text{при } y = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k1} \cos \lambda_k x, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = - \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \lambda_k x \quad \text{при } y = b,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} e_{k1} \sin \beta_k y, \quad \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} = - \frac{f_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos \beta_k y \quad \text{при } x = a,$$

$$-\frac{\nu_\varphi}{E_\varphi} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + \frac{1}{E_r} \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dx + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \int \left[\frac{x^2 y^2(1-k_1)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{y^2(y^2 + k_1 x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial y^2} + \frac{xy(2y^2 + k_1 x^2 - k_1 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial x \partial y} \right] dx = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$-\frac{v_r}{E_r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{1}{E_\varphi} \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dy + \frac{E_r + E_\varphi}{E_r E_\varphi} \int \left[\frac{y^2 (k x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial x^2} - \frac{x^2 y^2 (1+k)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial y^2} + \frac{xy(2y^2 - k x^2 + k y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial x \partial y} \right] dy = 0 \quad \text{при } x=0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } y=0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } y=b,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{при } x=a,$$

где

$$\lambda_k = (2k-1) \frac{\pi}{2a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b). \quad (3.3)$$

Функция $\Phi_0(x, y)$ ищется в виде [3]:

$$\Phi_0(x, y) = A_0(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y + B_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y + \lambda_k y (C_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k y + D_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k y)] \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_{k0} \operatorname{ch} \beta_k x + F_{k0} \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (G_{k0} \operatorname{ch} \beta_k x + H_{k0} \operatorname{sh} \beta_k x)] \sin \beta_k y. \quad (3.4)$$

Используя граничные условия (3.1), для определения неизвестных коэффициентов $a, b, c, A_0, A_{k0}, B_{k0}, E_{k0}$ и F_{k0} получаем соотношения

$$a = -\frac{v_r}{E_r} A_0, \quad b = 0, \quad c = \frac{1+v_\varphi}{E_\varphi b} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_k - c_k}{\lambda_k^2} - \frac{2}{1+v_\varphi} \left(C_{k0} + D_{k0} \operatorname{th} \frac{\lambda_k b}{2} \right) \operatorname{sh} \lambda_k b \right],$$

$$A_0 = -\frac{f_0}{2} - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k - c_k}{\lambda_k}, \quad A_{k0} = -\frac{a_k}{\lambda_k^2},$$

$$B_{k0} = -\lambda_k b (D_{k0} + C_{k0} \operatorname{cth} \lambda_k b) + \frac{1}{\lambda_k^2} \left(a_k \operatorname{cth} \lambda_k b - \frac{c_k}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right), \quad (3.5)$$

$$E_{k0} = -G_{k0} \left(\beta_k a + \frac{1-v_r}{1+v_r} \operatorname{th} \beta_k a \right) - H_{k0} \beta_k \operatorname{ath} \beta_k a - \frac{e_k}{\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k a}, \quad F_{k0} = \frac{1-v_r}{1+v_r} G_{k0}.$$

Удовлетворяя условиям (3.1), с учетом (3.5) после некоторых преобразований, получим следующие бесконечные системы линейных уравнений:

$$X_p = \sum_{k=1,3}^{\infty} a_{kp} Z_k + \sum_{k=1,3}^{\infty} b_{kp} W_k + m_p,$$

$$Y_p = \sum_{k=2,4}^{\infty} c_{kp} Z_k + \sum_{k=2,4}^{\infty} d_{kp} W_k + n_p,$$

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} e_{kp} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} f_{kp} Y_k + r_p, \quad (3.6)$$

$$W_p = \sum_{k=1}^{\infty} g_{kp} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} h_{kp} Y_k + s_p \quad (p=1,2,3\dots),$$

где введены новые обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^k \lambda_k^2}{b} (C_{k0} \operatorname{sh} \lambda_k b + D_{k0} \operatorname{ch} \lambda_k b) &= X_k - Y_k, & \frac{(-1)^k \lambda_k^2}{b} D_{k0} X_k + Y_k, \\ \frac{\beta_k^2}{a} (G_{k0} \operatorname{sh} \beta_k a + H_{k0} \operatorname{ch} \beta_k a) &= Z_k - W_k, & \frac{\beta_k^2}{a} G_{k0} = Z_k + W_k, \end{aligned} \quad (3.7)$$

а коэффициенты при X_k, Y_k, Z_k, W_k в (3.7) известны.

Бесконечные системы (3.6) квазивполне регулярны при любых отношениях размеров пластинки и возможных значениях коэффициента Пуассона [3].

Решение уравнения (2.3) с граничными условиями (3.2) состоит из суммы двух решений: решения $\Phi_i^0(x, y)$ однородного уравнения и частного решения $\tilde{\Phi}_i(x, y)$.

Функция $\Phi_i^0(x, y)$ также ищется в виде (3.4).

Для получения частного решения $\tilde{\Phi}_i(x, y)$ сначала разложим правую часть (2.3) в ряд Фурье таким образом:

$$H[\Phi_{i-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni}(y) \cos \lambda_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_{ni}(x) \sin \beta_n y, \quad (3.8)$$

где

$$a_{ni}(y) = \frac{1}{a} \int_0^a H[\Phi_{i-1}] \cos \lambda_n x dx, \quad b_{ni}(x) = \frac{1}{b} \int_0^b H[\Phi_{i-1}] \sin \beta_n y dy. \quad (3.9)$$

Затем, применяя метод вариаций произвольных постоянных, можно определить величины $A_{ni}, B_{ni}, C_{ni}, D_{ni}$, которые являются функциями переменной y , и $E_{ni}, F_{ni}, G_{ni}, H_{ni}$ – функциями переменной x .

Имея первые два приближения, функции напряжения $\Phi(x, y)$ по (2.1), на основании (2.4)–(2.5) можно определить напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

В качестве численного примера рассмотрим изгиб консольной балки, когда нагрузка приложена на конце балки $x=a$ по следующему закону.

$$\tau_{xy}(a, y) = qy(y-b), \quad q = \text{const}. \quad (3.10)$$

Пользуясь разложениями (3.1), имеем

$$f_0 = 2 \frac{P}{b}, \quad f_p = \frac{24}{p^2 \pi^2} \frac{P}{b}, \quad (p=2, 4, 6, \dots), \quad (3.11)$$

где

$$P = - \int_0^b \tau_{xy}(a, y) dy = - \int_0^b qy(y-b) dy = \frac{qh^3}{6}. \quad (3.12)$$

Предположим, что

$$\frac{E_r}{E_\phi} = \frac{\nu_r}{\nu_\phi} = 1.2, \quad \nu_r = 0.3, \quad a = 5b. \quad (3.13)$$

На основании (2.4)–(2.7), (3.4)–(3.7) и (3.11)–(3.13) для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и перемещения v будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \left\{ (X_k + Y_k) \left[2 \operatorname{sh} \lambda_k (b-y) - \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k (b-y) + \lambda_k b \frac{\operatorname{sh} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (X_k - Y_k) \left[(2 - \lambda_k b \operatorname{cth} \lambda_k b) \operatorname{sh} \lambda_k y + \lambda_k y \operatorname{ch} \lambda_k y \right] \right\} \cos \lambda_k x + \\ &\quad + a \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left(\frac{1 - \nu_r}{1 + \nu_r} - \beta_k x \right) \left(\operatorname{ch} \beta_k x - \operatorname{sh} \beta_k x \right) \sin \beta_k y + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \left[b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{sh \lambda_n b} \left\{ (X_n + Y_n) \left[2sh \lambda_n (b-y) - \lambda_n y ch \lambda_n (b-y) + \lambda_n b \frac{sh \lambda_n y}{sh \lambda_n b} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (X_n - Y_n) [(2 - \lambda_n bcth \lambda_n b) sh \lambda_n y + \lambda_n y ch \lambda_n y] \right\} \cos \lambda_n x + \right. \\
& \quad \left. + a \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n + W_n) \left(\frac{1-v_r}{1+v_r} - \beta_n x \right) (ch \beta_n x - sh \beta_n x) \sin \beta_n y + \frac{\partial^2 \Phi_1^r}{\partial y^2} \right], \quad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, y) & = b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{sh \lambda_k b} \left\{ (X_k + Y_k) \left[\lambda_k y ch \lambda_k (b-y) - \lambda_k b \frac{sh \lambda_k y}{sh \lambda_k b} \right] \right. \\
& \quad \left. + (X_k - Y_k) [\lambda_k bcth \lambda_k b \cdot sh \lambda_k y - \lambda_k y ch \lambda_k y] \right\} \cos \lambda_k x - \\
& \quad - a \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left(\frac{3+v_r}{1+v_r} - \beta_k x \right) (ch \beta_k x - sh \beta_k x) \sin \beta_k y + \\
& \quad + \delta \left[b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{sh \lambda_n b} \left\{ (X_n + Y_n) \left[\lambda_n y ch \lambda_n (b-y) - \lambda_n b \frac{sh \lambda_n y}{sh \lambda_n b} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (X_n - Y_n) [\lambda_n bcth \lambda_n b \cdot sh \lambda_n y - \lambda_n y ch \lambda_n y] \right\} \cos \lambda_n x - \right. \\
& \quad \left. - a \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n + W_n) \left(\frac{3+v_r}{1+v_r} - \beta_n x \right) (ch \beta_n x - sh \beta_n x) \sin \beta_n y + \frac{\partial^2 \Phi_1^r}{\partial x^2} \right], \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(x, y) & = \frac{f_0}{2} + b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{sh \lambda_k b} \left\{ (X_k + Y_k) \left[ch \lambda_k (b-y) - \lambda_k y sh \lambda_k (b-y) + \lambda_k b \frac{ch \lambda_k y}{sh \lambda_k b} \right] \right. \\
& \quad \left. - (X_k - Y_k) [(1 - \lambda_k bcth \lambda_k b) ch \lambda_k y + \lambda_k y sh \lambda_k y] \right\} \sin \lambda_k x - \\
& \quad - a \sum_{k=1}^{\infty} (Z_k + W_k) \left(\frac{2}{1+v_r} - \beta_k x \right) (ch \beta_k x - sh \beta_k x) \cos \beta_k y + \\
& \quad + \delta \left[b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{sh \lambda_n b} \left\{ (X_n + Y_n) \left[ch \lambda_n (b-y) - \lambda_n y sh \lambda_n (b-y) + \lambda_n b \frac{ch \lambda_n y}{sh \lambda_n b} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (X_n - Y_n) [(1 - \lambda_n bcth \lambda_n b) ch \lambda_n y + \lambda_n y sh \lambda_n y] \right\} \sin \lambda_n x - \right. \\
& \quad \left. - a \sum_{n=1}^{\infty} (Z_n + W_n) \left(\frac{2}{1+v_r} - \beta_n x \right) (ch \beta_n x - sh \beta_n x) \cos \beta_n y - \frac{\partial^2 \Phi_1^r}{\partial x \cdot \partial y} \right], \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$v(x, y) = -\frac{1+v_\varphi}{E_\varphi} b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\lambda_k sh \lambda_k b} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ (X_k + Y_k) \left[\frac{1-v_\varphi}{1+v_\varphi} ch \lambda_k (b-y) + \lambda_k y sh \lambda_k (b-y) + \lambda_k b \frac{ch \lambda_k y}{sh \lambda_k b} \right] \right. \\
& \quad \left. + (X_k - Y_k) \left[\lambda_k y sh \lambda_k y - \left(\frac{1-v_\varphi}{1+v_\varphi} + \lambda_k bcth \lambda_k b \right) ch \lambda_k y \right] \right\} \cos \lambda_k x +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1+\nu_\varphi}{E_\varphi} a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k + W_k}{\beta_k} \left(\frac{3-\nu_r}{1+\nu_r} - \beta_k x \right) (ch\beta_k x - sh\beta_k x) \cos \beta_k y + \\
& \quad + \frac{4}{E_\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\lambda_k^2} Y_k - 2\nu_r \frac{P}{E_r} \frac{x}{b} + \\
+ \delta \left[- \frac{1+\nu_\varphi}{E_\varphi} b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n sh\lambda_n b} \left\{ (X_n + Y_n) \left[\frac{1-\nu_\varphi}{1+\nu_\varphi} ch\lambda_n (b-y) + \lambda_n y sh\lambda_n (b-y) + \lambda_n b \frac{ch\lambda_n y}{sh\lambda_n b} \right] \right\} + \right. \\
& \quad + \frac{1+\nu_\varphi}{E_\varphi} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n + W_n}{\beta_n} \left(\frac{3-\nu_r}{1+\nu_r} - \beta_n x \right) (ch\beta_n x - sh\beta_n x) \cos \beta_n y + \\
& \quad \left. + \frac{4}{E_\varphi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^2} Y_n - 2\nu_r \frac{P}{E_r} \frac{x}{b} \right]. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Из (2.2) для прогиба правого конца изогнутой оси балки получаем

$$v \left(a, \frac{b}{2} \right) = \frac{16a^2}{E_\varphi \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} Y_k - 2\nu_r \frac{P}{E_r} \frac{a}{b}. \quad (3.18)$$

Значения напряжений для двух приближений в четырех сечениях вблизи закрепленного края $x=0$ приведены в табл. 1-6. Картина изменения напряжения иллюстрирована на рис. 1-3.

Таблица 1

Значения $\frac{b}{P} \sigma_x^{(0)}(x, y)$

X/b y/b	1/30	1/20	1/10	1/5
0.9	21.88	23.05	23.48	23.52
0.8	15.77	16.99	17.51	17.72
0.7	10.74	11.12	11.42	11.71
0.6	5.684	5.467	5.566	5.766
0.5	-0.0038	-0.0017	-0.0012	-0.0019
0.4	-5.658	-5.462	-5.524	-5.754
0.3	-10.73	-11.09	-11.39	-11.69
0.2	-15.75	-16.97	-17.46	-17.65
0.1	-21.87	-23.04	-23.42	-23.45

Таблица 2

Значения $\frac{a}{P} [\sigma_x^{(0)} + \delta\sigma_x^{(1)}]$

1/30	1/20	1/10	1/5
19.692	19.823	19.723	21.638
14.193	14.611	14.708	16.302
9.666	9.563	9.593	10.773
5.089	4.702	4.675	5.305
-0.0034	-0.0015	-0.0016	-0.002
-5.092	-4.697	-4.833	-5.294
-9.657	-9.537	-9.568	-10.755
-14.175	-14.594	-14.666	-16.238
-19.683	-19.814	-19.673	-21.574

Таблица 3

Значения $-\frac{b}{P} \tau_{xy}^{(0)}(x, y)$

X/b y/b	1/30	1/20	1/10	1/5
0.9	3.950	2.561	1.744	0.9743
0.8	0.4855	1.110	1.235	1.104
0.7	-1.595	-0.072	0.6267	1.091
0.6	-1.136	-0.3687	0.2319	0.9535
0.5	-0.5885	-0.3224	0.1058	0.8692
0.4	-1.148	-0.3721	0.2323	0.9556
0.3	-1.605	-0.0791	0.6294	1.087
0.2	0.4933	1.118	1.229	1.099
0.1	3.928	2.546	1.734	0.5679

Таблица 4

Значения $-\frac{a}{P} [\tau_{xy}^{(0)} + \delta\tau_{xy}^{(1)}]$

1/30	1/20	1/10	1/5
3.476	2.202	1.465	0.887
0.427	0.951	1.037	1.005
-1.404	-0.067	0.526	0.993
-0.999	-0.317	0.195	0.868
-0.518	-0.277	0.089	0.791
-1.010	-0.320	0.195	0.870
-1.412	-0.068	0.529	0.989
0.434	0.961	1.032	1.000
3.458	2.189	1.456	0.517

Таблица 5

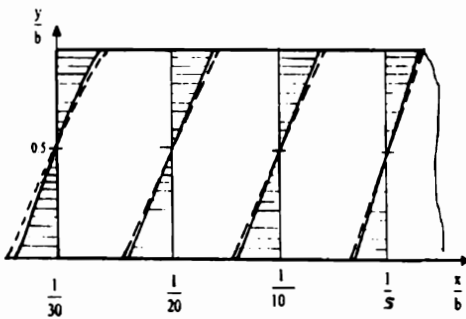
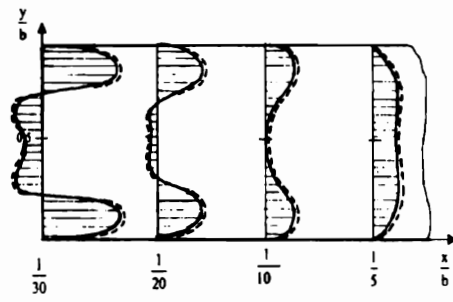
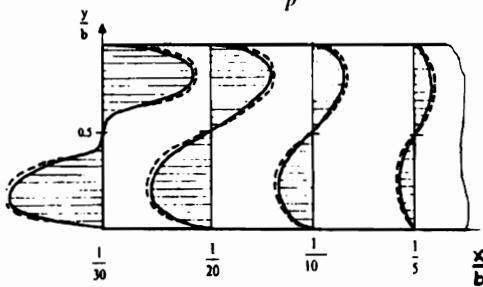
Значения $\frac{b}{P} \sigma_y^{(0)}(x, y)$

X/b	1/30	1/20	1/10	1/5
y/b				
0.9	6.082	3.402	1.847	0.5705
0.8	7.288	4.269	2.529	0.8347
0.7	3.548	2.756	1.976	0.8741
0.6	0.3315	1.046	0.9474	0.5318
0.5	0.0053	0.0025	0.0015	0.0019
0.4	-0.3341	-0.9940	-0.9271	-0.5130
0.3	-3.585	-2.724	-1.910	-0.8490
0.2	-7.239	-4.191	-2.491	-0.8780
0.1	-6.022	-3.338	-1.765	-0.5619

Таблица 6

Значения $\frac{a}{P} [\sigma_y^{(0)} + \delta\sigma_y^{(1)}]$

1/30	1/20	1/10	1/5
5.352	2.926	1.551	0.522
6.413	3.671	2.124	0.764
3.122	2.370	1.659	0.800
0.292	0.899	0.796	0.487
0.0047	0.0021	0.0013	0.002
-0.294	-0.855	-0.779	-0.469
-3.155	-2.343	-1.604	-0.777
-6.370	-3.604	-2.092	-0.803
-5.299	-2.871	-1.483	-0.514

Рис. 1. Эпюры $\frac{b}{P} \sigma_y(x, y)$ Рис. 2. Эпюры $\frac{b}{P} \tau_{xy}(x, y)$ Рис. 3. Эпюры $\frac{b}{P} \sigma_y(x, y)$

Кафедра механики сплошной среды

Результаты показывают, что значения напряжений, вычисленные по двум приближениям, отличаются от значений напряжений, вычисленных по одному приближению. Они совпадают со значениями рассматриваемой задачи при изотропном материале и больше, чем в случае с анизотропным материалом. Для этих значений относительная погрешность составляет 10 %.

Поступила 16.06.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехвицкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1957.
2. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер. Изд-во ЕГУ, 1976.
3. Галфаян П.О. Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. – Изв.АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т.16, N1, с.39-61.

Վ.Ժ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ
ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում բերված է ուղղանկյունաձև գլանային օրթոտրոպ սալի համար առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը, որի մի կողմում տրված են տեղափոխումները, իսկ մյուս երեք կողմերում՝ լարումները: Ներմուծված է փոքր ֆիզիկական պարամետր և դիտարկված խնդրի լուծումը կառուցված է ըստ այդ պարամետրի աստիճանային շարքի: Լարումների ֆունկցիան ռեկուրենտ եզրային խնդիրներում ներկայացված է Ֆուրյեի շարքով, որի վերլուծության գործակիցները որոշելու համար ստացված են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգեր: Որպես օրինակ դիտարկված է կոնսոլային հեծանի ծոման խնդիրը: Դիտարկվող խնդրի լուծումը հասցված է մինչև թվային արդյունքների, որոնց միջոցով ուսումնասիրված է ամրակցման մոտակայքում լարումների բաշխման բնույթը: