ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,2000 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

САРКИС В. САРКИСЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

Исследуется задача оптимальной стабилизации колебаний прямоугольной пластинки, одна сторона которой жестко закреплена, а остальные – свободны. Пластинка стабилизируется при помощи управляющей силы, приложенной к ее верхней поверхности. Задача решается с использованием балочных функций. Получено оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее целевой функционал, представляющий собой полную энергию.

Рассматривается однородная прямоугольная пластинка $(b\times a)$ плотности ρ, постоянной толщины h с жесткостью на изгиб D. Пусть одна сторона пластинки $(y=0)$ жестко закреплена, а остальные три $(y=a, x=0, x=b)$ – свободны.

В основу рассуждений принимается гипотеза недеформированных нормалей.

Пластинка стабилизируется при помощи распределенной силы $F(x,y,t)$, приложенной к ее поверхности. Поперечное перемещение точек срединной поверхности пластинки обозначено через $w(x,y,t)$. Дифференциальное уравнение колебательного движения будет иметь вид [1,2]

$$\frac{D}{\rho h}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F\ , \tag{1}$$

а граничные условия –

$$\begin{gathered} w(x,y,t)\Big|_{y=0}=0,\quad \frac{\partial w(x,y,t)}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big|_{y=a}=0,\quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]_{y=a}=0,\\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=a,b}=0,\quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=0,b}=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Начальные условия задачи представим в виде

$$\begin{gathered} w(x,y,t)\big|_{t=0}=f(x,y),\quad w(x,y,t)\big|_{t\to\infty}\to 0,\\ \frac{\partial\ w(x,y,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Phi(x,y),\quad \frac{\partial\ w(x,y,t)}{\partial t}\Big|_{t\to\infty}\to 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где функции $f(x,y)$ и $\Phi(x,y)$ – соответственно начальный прогиб и начальная скорость точек срединной поверхности пластинки, принадлежащие классу L_2 на прямоугольнике $[0,b]\times[0,a]$.

Для определения оптимального значения нормальной нагрузки $F(x,y,t)$ минимизируется полная энергия пластинки и стабилизирующего воздействия:

$$J = K + V + \frac{gx}{hj}\int_0^{\infty}\int_0^{b}\int_0^{a} F^2(x,y,t)\,dxdydt. \tag{4}$$

Значения кинетической K- и потенциальной V-энергий, определенные в [2], имеют вид

$$K = \frac{\rho h}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{b}\int_0^{a}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dxdydt,$$

$$V = \frac{D}{2}\int_0^{\infty}\int_0^{b}\int_0^{a}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-v)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdydt. \tag{5}$$

Ставится следующая задача оптимальной стабилизации колебаний пластинки распределенной нагрузкой: определить такое оптимальное стабилизирующее воздействие $F^0(x,y,t)\in L_2$ на прямоугольнике $[0,b]\times[0,a]$, чтобы минимизировался функционал (4) с прогибом $w(x,y,t)$, удовлетворяющим граничным и начальным условиям (2), (3).

Решение уравнения (1) с заданной правой частью с учетом граничных условий (2) целесообразно представить в виде ряда по собственным формам однородной краевой задачи [6]

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) X_m(x)\cdot Y_n(y), \tag{6}$$

где $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ – собственные формы колебаний однородных балок. $X_m(x)$ удовлетворяют краевым условиям балки со свободными концами:

$$X_m''(0) = X_m'''(0) = 0, \quad X_m''(b) = X_m'''(b) = 0,$$

а $Y_n(y)$ – краевым условиям для балки, жестко заделанной на конце y=0, и со свободным концом y=a:

$$Y_n(0) = Y_n'(0) = 0, \quad Y_n''(a) = Y_n'''(a) = 0.$$

Разложение (6) является решением исходной граничной задачи.

Балочные функции $X_m(x)$ и $Y_n(y)$ имеют следующий вид:

$$X_m(x) = A_m\left[S(\lambda_m x) - \frac{T(\lambda_m b)}{U(\lambda_m b)}T(\lambda_m x)\right],$$
$$Y_n(y) = B_n\left[U(\mu_n y) - \frac{V(\mu_n b)}{S(\mu_n b)}V(\mu_n y)\right], \tag{7}$$

где $S(\cdot)$, $T(\cdot)$, $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ – функции Крылова, а λ_m, μ_n определяются из известных трансцендентных уравнений [1]. Произвольные постоянные A_m и B_m из формулы (7) определяются из условий ортогональности собственных функций

$$\int_0^b X_m(x)X_k(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k, \\ \alpha_m^2 & \text{при } m = k, \end{cases}$$

$$\int_0^a Y_n(y)Y_k(y)dy = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq k, \\ \beta_n^2 & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Значение управляющей нагрузки можно представить аналогично ряду (6):

$$F(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_{mn}(t)X_m(x)Y_n(y)\,dxdy. \quad (8)$$

Имея в виду, что система функций $\{X_m(x)Y_n(x)\}$составляет ортогональный базис пространства L_2 на прямоугольнике $[0,b]\times[0,a]$, и учитывая (6) и (8), уравнение (1) для каждых пар гармоник m и n (m, n = 1,2,...) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{T}_{mn}(t)+k_{mn}^2T_{mn}(t)=U_{mn}(t), \quad (9)$$

где

$$k_{mn}^2=\frac{D}{\rho h\alpha_m^2\alpha_n^2}\left[\left(\lambda_m^4+\mu_n^4\right)\alpha_m^2\beta_n^2+2C_{mn}\right];$$

$$C_{mn}=\int_0^b\int_0^a X_m''(x)Y_n''(y)X_m(x)Y_n(y)dxdy,$$

$$U_{mn}(t)=-\frac{1}{\alpha_m^2\beta_n^2}\int_0^b\int_0^a F(x,y,t)X_m(x)Y_n(y)dxdy.$$

Тогда минимизируемый функционал (4) примет следующий вид:

$$J=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_{mn}=\int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[M_{mn}T_{mn}^2(t)+E_{mn}\left(\dot{T}_{mn}(t)\right)^2+L_{mn}U_{mn}^2(t)\right]dt, \quad (10)$$

где коэффициенты M_{mn}, E_{mn} и L_{mn} определяются из (4), (5) с использованием (6) и (8).

Начальные условия для дифференциальных уравнений (9) будут таковыми:

$$T_{mn}(t)=a_{mn}, T'_{mn}(t)=b_{mn} \text{ при } t=0, \quad (11)$$

где

$$a_{mn}=\frac{1}{k_{mn}\alpha_m^2\beta_n^2}\int_0^b\int_0^a f(x,y)X_m(x)Y_n(y)\,dxdy;$$

$$b_{mn}=\frac{1}{\alpha_m^2\beta_n^2}\int_0^b\int_0^a \Phi(x,y)X_m(x)Y_n(y)\,dxdy.$$

Для определения оптимального значения $U_{mn}(t)$ достаточно минимизировать лишь функционал J_{mn} из (10) при начальных условиях (11) и при условиях

$$T_{mn}(t)\big|_{t\to\infty}\to 0,\ T'_{mn}(t)\big|_{t\to\infty}=0.$$

Таким образом, поставленная задача оптимальной стабилизации приводится к задаче аналитического конструирования оптимального регулятора [2–4]. Решая эту задачу для каждого (m, n), получим оптимальное значение управляющего воздействия $U_{mn}^0(t)$ в виде

$$U_{mn}^0(t)=l_{mn}\exp(\xi_{mn}t)+r_{mn}\exp(\eta_{mn}t),$$

где коэффициенты l_{mn}, r_{mn} зависят от M_{mn}, E_{mn}, а

$$\xi_{mn}=\frac{\sqrt{\dfrac{\rho h}{2\chi}-k_{mn}^2-2\sqrt{k_{mn}^4+\dfrac{\rho hM_{mn}}{2\chi E_{mn}}}}-\sqrt{\dfrac{\rho h}{2\chi}-k_{mn}^2+\sqrt{k_{mn}^4+\dfrac{\rho hM_{mn}}{2\chi L_{mn}}}}}{2},$$

$$\eta_{mn}=\frac{\sqrt{\frac{\rho h}{2\chi}-k_{mn}^{2}-2\sqrt{k_{mn}^{4}+\frac{\rho h M_{mn}}{2\chi E_{mn}}}}+\sqrt{\frac{\rho h}{2\chi}-k_{mn}^{2}+\sqrt{k_{mn}^{4}+\frac{\rho h M_{mn}}{2\chi L_{mn}}}}}{2}$$

имеют отрицательные действительные части.

После несложных преобразований можно также найти минимальное значение функционала.

Нетрудно проверить, что управляющее воздействие $F(x,y,t)$ равномерно сходится по $t\in[0,\infty)$ на множестве $[0,b]\times[0,a]$, а $minJ$ – ограниченная величина [4].

Таким образом получено оптимальное управляющее воздействие, стабилизирующее пластинку, в виде двойного ряда

$$F^{0}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(U_{mn}^{0}(t)X_{m}(x)\right)Y_{n}(y)\right].$$

Кафедра теоретической механики *Поступила 23.06.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабаков И.М.** Теория колебаний. М: Наука, 1968, 559с.
2. **Саркисян В.С., Габриелян М.С., Юсиф Дж. Юсиф.** Об оптимальной стабилизации ортотропной прямоугольной пластинки. – Уч. записки ЕГУ, 1987, с. 37-42.
3. **Летов А.М.** Аналитическое конструирование регуляторов. – Автоматика и телемеханика, М., 1960, т.21, N4, 5, 6; 1961, т. 22, N4.
4. **Габриелян М.С.** О стабилизации механической системы мощности континуума. – Уч. записки ЕГУ, 1973, N5.

ՍԱՐԳԻՍ Վ.ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱՄՐԱՑՎԱԾ ՍԱԼԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հետազոտված է մի կողմը կոշտ ամրացված, իսկ մյուս կողմերը ազատ ուղղանկյուն սալի տատանումների օպտիմալ կայունության խնդիրը: Սալը կայունացվում է իր արտաքին մակերևույթի վրա կիրառված ղեկավարող ազդեցությամբ: Խնդիրը լուծվել է հեծանային ֆունկցիաների միջոցով: Որոշվել է օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունը, որը նվազարկում է նպատակային ֆունկցիոնալը՝ լրիվ էներգիան: