ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2.2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.51

С.А. ЕПИСКОПОСЯН

О РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША

Пусть последовательности $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированы так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}(M_{2k}-M_{2k-1})=+\infty,\ \beta_k>0,\ \lim_{k\to\infty}\beta_k=0.$$

В работе доказывается, что существует функция $f_0(x)\in L^1_{[0,1]}$, такая, что ряд Фурье от функции $f_0(x)$ по подсистеме $\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{W_m(x): M_{2s-1}\le \le m\le M_{2s},\ s=1,2,\dots\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, и коэффициенты Фурье-Уолша удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|\beta_{n_k}<\infty$.

Сначала приведем определение системы Уолша-Пели (см. [1]):

$$W_0(x)=1,\ W_n(x)=\prod_{s=1}^{k}r_{m_s}(x),\ n=\sum_{s=1}^{k}2^{m_s},\ m_1>m_2>\dots m_s, \tag{1}$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – система Радемахера

$$r_0(x)=\begin{cases}1,\ x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ -1,\ x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right];\end{cases}$$

$$r_0(x+1)=r_0(x),\ r_k(x)=r_0(2^k x),\ k=1,2,\dots$$

Известна следующая теорема (см. [2], с. 125).

Теорема. Существует функция $f_0(x)\in L^1_{[0.1]}$, ряд Фурье-Уолша которой расходится по норме пространства $L^1_{[0.1]}$.

Естественен вопрос: можно ли следить за спектром и убыванием коэффициентов ряда Фурье-Уолша “плохой” функции $f_0(x)$?

Оказывается, что поставленный вопрос имеет положительный ответ.

В наших дальнейших рассуждениях будем считать, что $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ фиксированы так, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}(M_{2k}-M_{2k-1})=+\infty,\ \beta_k>0,\ \lim_{k\to\infty}\beta_k=0,$$

и рассмотрим подсистему

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{W_m(x):\ M_{2s-1}\le m\le M_{2s},\ s=1,2,\ldots\}. \qquad (2)$$

В настоящей работе мы докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Для любого $\varepsilon>0$ существует функция $f_0(x)\in L^1_{[0,1]}$, $f_0(x)=0$, вне $[0,\varepsilon]$, ряд Фурье-Уолша которой по системе $\{W_{n_k}\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f_0)|\beta_n<\infty,$$

$$a_n(f_0)=0,\ n\notin\bigcup_{s=1}^{\infty}[M_{2s-1},M_{2s}].$$

Теорема 2. Для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $E\subset[0,1]$ с $|E|>1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f(x)\in L^1_{[0,1]}$ можно найти функции $F(x)\in L^1_{[0,1]}$ и $H(x)\in L^1_{[0,1]}$, $F(x)=H(x)=f(x)$ на E такие, что

1) ряд Фурье-Уолша от функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ сходится в метрике $L^1_{[0,1]}$,

2) ряд Фурье-Уолша от функции $H(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$,

3) коэффициенты Фурье-Уолша функций $F(x)$ и $H(x)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n_k}(F)|\beta_{n_k}<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n_k}(H)|\beta_{n_k}<\infty.$$

Замечание. Заметим, что теорема 2 следует из теоремы 1 и из нижесформулированной теоремы, доказанной М.Г. Григоряном (см. [3]).

Теорема. Для любого $\varepsilon>0$ существует измеримое множество $G\subset[0,1]$ с $|G|>1-\varepsilon$, такое, что для любой функции $f(x)\in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $F(x)\in L^1_{[0,1]}$, $F(x)=f(x)$ на G такую, что ряд Фурье-Уолша от функции $F(x)$ по системе $\{W_{n_k}\}$ сходится в метрике $L^1_{[0,1]}$, и коэффициенты Фурье-Уолша функции $F(x)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_n(F)|\beta_n<\infty,$$

$$c_n(F)=0,\ n\notin\bigcup_{s=1}^{\infty}[M_{2s-1},M_{2s}].$$

При доказательстве теоремы 1 мы воспользуемся следующими свойствами ядер Дирихле-Уолша и констант Лебега (см. [2], стр. 27 и стр. 46–47):

(1^0) $$\int_0^1|D_{2^k}(x)|dx=1,$$

(2^0) $$D_{2^k}(x)=\begin{cases}2^k,\ x\in\left[0,\dfrac{1}{2^k}\right];\\ 0,\ x\in\left(\dfrac{1}{2^k},1\right].\end{cases}$$

(3^0) Существует последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, $2^{k-1}\le n_k<2^k$, такая, что для последовательности константов Лебега $\{L_{n_k}\}$ справедливо неравенство

$$L_{n_k}>\frac{1}{4}\log_2 n_k,\ k=0,1,2\ldots$$

При доказательстве теоремы 1 мы используем следующую лемму.

Лемма. Для любых чисел $\varepsilon>0,\ N>1,\ B>10$ существует полином по системе $\{W_{n_k}\}_{s=1}^{\infty}$ вида

$$Q(x)=\sum_{N\le n_s\le M}a_{n_s}W_{n_s}(x),$$

удовлетворяющий условиям

$$Q(x)=0,\ x\notin[0,\varepsilon],$$

$$\|Q(x)\|=\int_0^1|Q(x)|dx<\varepsilon,$$

$$\sum_{N\le n_s\le M}|a_{n_s}|\beta_{n_s}<\varepsilon,$$

$$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{N\le n_s\le m}a_{n_s}W_{n_s}(x)\right|dx>B.$$

Доказательство леммы. Возьмем натуральные числа p_0,k_0,ν_0 настолько большими, чтобы выполнялись следующие условия:

$$k_0\ge\frac{4B}{\varepsilon}+\log_2\varepsilon+1, \tag{3}$$

$$W_{\nu_0}(x)\cdot W_i(x)=W_{\nu_0+i}(x),\ 0\le i\le 2^{k_0}, \tag{4}$$

$$\nu_0+i\in[M_{2p_0-1},M_{2p_0}],\ 0\le i\le 2^{k_0}, \tag{5}$$

$$\beta_j<2^{-k_0-2},\ j\ge M_{2p_0-1}. \tag{6}$$

Положим (см. (2), (4), (5))

$$Q(x)=\sum_{N\le n_s\le M}a_{n_s}W_{n_s}(x)=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{i=0}^{2^{k_0}}W_{\nu_0+i}(x)=\frac{\varepsilon}{2}\cdot W_{\nu_0}(x)\cdot\sum_{i=0}^{2^{k_0}}W_i(x)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\cdot W_{\nu_0}(x)\cdot D_{2^{k_0}}(x), \tag{7}$$

где

$$a_{n_s}=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{2},\ \nu_0\le n_s\le\nu_0+2^{k_0}=M;\\ 0,\ n_s<\nu_0.\end{cases} \tag{8}$$

В силу (1^0), (2^0), (7), (8) будем иметь

$$Q(x)=0,\ x\in\left(2^{-k_0},1\right],$$

$$\int_0^1 |Q(x)|dx = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_0^1 \left|D_{2^{k_0}}(x)\right| dx = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sum_{N \le n_s \le M} \left|a_{n_s}\right| \beta_{n_s} < \max_{n_s \ge \nu_0} \beta_{n_s} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{k_0} < \varepsilon ,$$

т. е. условия 1), 2) и 3) леммы выполнены.

Теперь проверим выполнение условия 4) леммы. Согласно (3^0) существует натуральное число $m_{k_0} \in \left[2^{k_0 - 1}, 2^{k_0}\right)$, такое,что

$$L_{m_{k_0}} = \int_0^1 \left|D_{m_{k_0}}(x)\right| dx > \frac{1}{4} \log_2 m_{k_0} > \frac{k_0 - 1}{4}.$$

Отсюда и из (3) вытекает, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{N \le n_s \le m_{k_0}} a_{n_s} W_{n_s}(x) \right| dx > \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{k_0 - 1}{4} > B .$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть ε – наперед заданное положительное число. Если последовательно применим лемму, то можем найти последовательность непересекающихся полиномов по системе $\{W_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ вида

$$Q_s(x) = \sum_{N_{s-1} \le n_k < N_s} a_{n_k}^{(s)} W_{n_k}(x), \; s = 1,2,..., \tag{9}$$

удовлетворяющую условиям

$$Q_s(x) = 0, \; x \notin \left[0, \frac{\varepsilon}{2^s}\right], \tag{10}$$

$$\int_0^1 |Q_s(x)| dx < 2^{-s}, \tag{11}$$

$$\sum_{N_{s-1} \le n_k < N_s} \left|a_{n_k}^{(s)}\right| \beta_{n_k} < 2^{-s} , \tag{12}$$

$$\max_{N_{s-1} \le m < N_s} \int_0^1 \left| \sum_{N_{s-1} \le n_k \le m} a_{n_k}^{(s)} W_{n_k}(x) \right| dx > 2 . \tag{13}$$

Положим

$$f_0(x) = \sum_{s=1} Q_s(x) = \sum_{k=1} a_{n_k} W_{n_k}(x) . \tag{14}$$

Очевидно, что (см. (10), (12)–(14))

$$f_0(x) = 0, \; x \notin [0, \varepsilon],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{n_k}\right| \beta_{n_k} < \infty .$$

Из (11) и (14) следует

$$\int_0^1 |f_0(x)| dx \le \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^1 |Q_s(x)| dx \le 1,$$

т. е.

$$f(x) \in L^1_{[0,1]}.$$

Из (9) и (14) вытекает, что

$$a_{n_k} = \int_0^1 f_0(t) \cdot W_{n_k}(t) dt ,$$

т. е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} W_{n_k}(x)$$

является рядом Фурье функции $f_0(x)$, который в силу (13) расходится в метрике $L^1_{[0,1]}$.

Теорема 1 доказана.

В заключение выражаю благодарность проф. М.Г. Григоряну за постоянное внимание и обсуждения.

Кафедра высшей математики физфака *Поступила 03.12.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pely R.** A remarkable systems of orthogonal functions. – Proc. London Math. Soc., 1932, v. 34, p. 241–279.
2. **Голубов Б.И., Ефимов А.Б., Скворцов В.А.** Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
3. **Григорян М.Г.** О сходимости почти всюду рядов Фурье-Уолша суммируемых функций. – Изв. АН Арм. ССР, 1983, т. 18, №4, с. 291–304.

Ս.Ա. ԵՂԻՍԿՈՊՈՍՅԱՆ

ՖՈՒՐՅԵ-ՈՒՈԼՇԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՏԱՐԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուք $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ և $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ հաջորդականությունները ֆիքսված են այնպես, որ

$$\lim_{k\to\infty}(M_{2k} - M_{2k-1}) = +\infty,\ \beta_k > 0,\ \lim_{k\to\infty}\beta_k = 0:$$

Աշխատանքում ապացուցված է, որ գոյություն ունի $f_0(x) \in L^1_{[0,1]}$ ֆունկցիա, որի Ֆուրյեի շարքը Ուոլշի

$$\{W_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{W_m(x) : M_{2s-1} \le m \le M_{2s},\ s = 1, 2, \ldots\}$$

ենթահամակարգով տարամիտում է $L^1_{[0,1]}$-ում և Ֆուրյե-Ուոլշի գործակիցները բավարարում են

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| \beta_{n_k} < \infty$$

պայմանին: