ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

Математика

УДК 517.946

В.Т. САРДАРЯН

ОЦЕНКИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ПОЛНОТА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Настоящая работа является продолжением работы [1] для некоторого класса несамосопряженных полуэллиптических операторов. В §1 доказывается оценка для собственных значений одного класса несамосопряженных полуэллиптических операторов в ограниченной области. В §2 показывается полнота собственных функций в $L_2(\Omega)$, точнее, доказывается, что $sp'(T) = L_2(\Omega)$, где через $sp'(T)$ обозначено замкнутое подпространство, покрытое собственными векторами оператора T, соответствующими ненулевым собственным значениям.

§1. Оценка для собственных значений несамосопряженных полуэллиптических операторов

Пусть $G(x,D)=\sum\limits_{(\alpha,\mu)\le k} a_\alpha(x)D^\alpha$ – дифференциальный оператор с главной частью $G_0(x,D)=\sum\limits_{(\alpha,\mu)=k} a_\alpha(x)D^\alpha$, $\mu=\left(\frac{1}{2m_1},\dots,\frac{1}{2m_n}\right)$. Оператор G называется полуэллиптическим, если выполнено неравенство $G_0(x,\xi)\ge C(\xi_1^{2m_1}+\dots+\xi_n^{2m_n})$ для некоторой постоянной C.

Для самосопряженных полуэллиптических операторов в работе [1] была доказана оценка для собственных значений. В настоящей заметке изучаются несамосопряженные операторы вида $G=G_0+B$, где G_0 – самосопряженный оператор, а B – оператор более низкого порядка. Будем использовать обозначения и определения работы [1].

Теорема 1.1. Пусть G_0 – замкнутый, плотно заданный оператор в $L_2(\Omega)$ такой, что $D(G_0)\subset H_{k\mu}(\Omega)$. В этом случае существует положительное число c такое, что для любого $u\in D(G_0)$ имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{k,\Omega}\le c(\|G_0u\|_{0,\Omega}+\|u\|_{0,\Omega}). \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $G\subset L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ является графиком оператора G_0. Это значит, что $G=\{(u,G_0u):u\in D(G_0)\}$. Так как оператор G_0 замкнут, то G является замкнутым подпространством пространства $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$. Введем отображение $G\to H_{k\mu}(\Omega)$, которое задано по формуле $(u,G_0u)\to u$. Это замкнутое линейное отображение гильбертова пространства G в гильбертово пространство $H_{k\mu}(\Omega)$. $(u_j, G_0 u_j)$ сходится к $(u, G_0 u)$ в $L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$, u_j сходится к v в $H_{k\mu}(\Omega)$, следовательно, сходится к v в $L_2(\Omega)$, так что $v=u$. По теореме о замкнутом графике, $(u,G_0u)\to u$ является непрерывным отображением из G в $H_{k\mu}(\Omega)$. Теорема доказана.

Теорема 1.2. Пусть G – несамосопряженный полуэллиптический оператор вида $G=G_0+B$, где G_0 – самосопряженный полуэллиптический оператор, а B – оператор более низкого порядка, и $D(G)=H_{k\mu}(\Omega)\cap \overset{0}{H}_{k\mu'}(\Omega)$, $\mu'=\left(\frac{1}{m_1},\ldots,\frac{1}{m_n}\right)$. Пусть также оператор B удовлетворяет неравенству

$$\|Bu\|_{0,\Omega}\le C_2\|u\|_{k-1,\Omega},\quad u\in D(B). \tag{1.2}$$

Тогда всякое невещественное направление является направлением минимального роста резольвенты оператора G.

Доказательство. Сначала предположим, что в теореме 1.1 оператор G_0 самосопряжен. Тогда для невещественных λ имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{0,\Omega}\le|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\|(\lambda-G_0)u\|_{0,\Omega},\quad u\in D(G_0)$$

или

$$\|(\lambda-G)^{-1}\|_{0,\Omega}\le|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}. \tag{1.3}$$

Из (1.1) получим при $u\in D(G_0)$

$$\|u\|_{k,\Omega}\le C\left[\ \|G_0u\|_{0,\Omega}+\|u\|_{0,\Omega}\ \right]\le C\left[\|\lambda-G_0\|u_{0,\Omega}+|\lambda|\|u\|_{0,\Omega}+\|u\|_{0,\Omega}\ \right]\le$$

$$\le C\left[\ \|(\lambda-G_0)u\|_{0,\Omega}+(|\lambda|+1)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\|(\lambda-G_0)u\|_{0,\Omega}\ \right]=C\left[1+\frac{|\lambda|+1}{|I_m\lambda|}\right]\|(\lambda-G_0)u\|_{0,\Omega},$$

так что

$$\|(\lambda-G_0)^{-1}\|_k\le C_1\frac{1+2|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{1.4}$$

Теперь рассмотрим оператор G. Возьмем любое невещественное λ. Имеем $\lambda-G=\lambda-G_0-B$. Умножив обе части на $(\lambda-G_0)^{-1}$, получим

$$(\lambda-G_0)^{-1}(\lambda-G)=1-(\lambda-G_0)^{-1}B, \tag{1.5}$$

это неравенство имеет место на пространстве $D(G_0)=D(G)$.

Оператор B отображает пространство $H_{(k-1)\mu}(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$, а $(\lambda-G_0)^{-1}$ отображает $L_2(\Omega)$ на $D(G_0)\subset H_{(k-1)\mu}(\Omega)$. Следовательно, оператор $(\lambda-G_0)^{-1}B$ отображает пространство $H_{(k-1)\mu}(\Omega)$ в само себя. Из выражений (1.3) и (1.4) следует, что норма оператора $(\lambda-G_0)^{-1}B$ в пространстве $H_{(k-1)\mu}(\Omega)$ ограничена величиной

$$C_1 C_2 \frac{(1+|\lambda|)^{1-\frac{1}{k}}}{|\operatorname{Im}\lambda|} . \qquad (1.6)$$

Если это число меньше $\frac{1}{2}$, то оператор $1-(\lambda-G_0)^{-1}B$ обратим и норма обратного ему оператора меньше 2. Так как $\lambda - G = (\lambda - G_0)(1-(\lambda-G_0)^{-1}B)$, то

$$(\lambda-G)^{-1} = \left[1-(\lambda-G_0)^{-1}B\right]^{-1}(\lambda-G_0)^{-1} \Rightarrow \left\|(\lambda-G)^{-1}\right\|_{k-1} \le 2\left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_{k-1}. \qquad (1.7)$$

Умножая обе части выражения (1.5) на $(\lambda-G)^{-1}$, получим

$(\lambda-G)^{-1} = (\lambda-G_0)^{-1} + (\lambda-G_0)^{-1}B(\lambda-G)^{-1}$, а из (1.2) и (1.7) –

$$\left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_0 \le \left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_0 \left[1+\left\|B(\lambda-G)^{-1}\right\|_0\right] \le \left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_0 \left[1+C_2\left\|(\lambda-G)^{-1}\right\|_{k-1}\right] \le$$
$$\le \left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_0 \left[1+2C_2\left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_{k-1}\right].$$

Так как выражение (1.7) меньше $\frac{1}{2}$, то из (1.4) получим, что

$2C_2\left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_{k-1} \le 1$, так что $\left\|(\lambda-G)^{-1}\right\|_0 \le 2\left\|(\lambda-G_0)^{-1}\right\|_0 \le \frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|}$.

Это значит, что если $|\operatorname{Im}\lambda| > 2C_1C_2\left(1+|\lambda|^{1-\frac{1}{k}}\right)$, то $\lambda \in \rho(G)$, и имеет место следующее неравенство:

$$\left\|(\lambda-G)^{-1}\right\|_0 \le \frac{2}{|\operatorname{Im}\lambda|}. \qquad (1.8)$$

Можно показать, что существует такая постоянная K, что если

$$|\operatorname{Im}\lambda| \ge K \max\left(|\operatorname{Re}\lambda|^{1-\frac{1}{k}}, 1\right), \qquad (1.9)$$

то выполняется также неравенство (1.8). Отсюда следует, что всякое невещественное направление является направлением минимального роста резольвенты оператора G, а все достаточно большие по модулю собственные значения G содержатся в области, задаваемой формулой (1.9). Теорема доказана.

Замечание. Если G_0 удовлетворяет также неравенству $(G_0u,u) \ge \lambda_0\|u\|^2_{0,\Omega}$, $u \in D(G_0)$, то можно показать, что отрицательная вещественная ось также является направлением минимального роста резольвенты G.

Теперь перейдем к доказательству результата, аналогичного результату работы [1] для самосопряженных операторов. В работе [1] важную роль играл тот факт, что всякое невещественное направление является направлением минимального роста резольвенты самосопряженного оператора. В теореме 1.2 было доказано, что операторы рассматриваемого вида также обладают этим свойством, следовательно, доказательство следующей теоремы во многом похоже на доказательство теоремы 1.2 работы [1].

Теорема 1.3. Пусть $G(x,D) = \sum_{(\alpha.\mu)\le k} a_\alpha(x)D^\alpha$ – полуэллиптический оператор, определенный в $D(G) = \overset{0}{H}_{\kappa\mu}(\Omega) \cap H_{\kappa\mu'}(\Omega)$, $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, и его главная часть G_0 является самосопряженным оператором. Пусть $G_0(x,i\xi)>0$ для любого $x\in\Omega$ и любого ненулевого $\xi\in R$.

Если $k<2\left[\frac{|\mu|}{2}\right]+1$, то предположим, что существует положительное целое число b такое, что $bk>2\left[\frac{|\mu|}{2}\right]+1$ и $D(G^b)=H_{bk\mu}(\Omega)\cap\overset{0}{H}_{bk\mu'}(\Omega)$. При выполнении этих условий спектр оператора G дискретен, а его собственные значения имеют конечную кратность. Для любого положительного ε только конечное число собственных значений лежит вне угла $|\arg\lambda|<\varepsilon$. Если $\{\lambda_j\}$ – последовательность собственных значений оператора G, повторенных по числу их кратности, а через $N(\lambda)$, $\lambda>0$, обозначить количество тех λ_j, для которых $\operatorname{Re}\lambda_j\le\lambda$, то

$$N(\lambda)=c_0\lambda^{\frac{|\mu|}{k}}+o\left(\lambda^{\frac{|\mu|}{k}}\right),\text{ где } c_0=(2\pi)^{-n}\int_\Omega\left|\{\xi:G_0(x,i\xi)<1\}\right|dx.$$

Доказательство. Пусть $\lambda_0\in\rho(G)$. Тогда $R\left((\lambda_0-G)^{-1}\right)=D(G)\subset\subset H_{k\mu}(\Omega)$. По теореме Реллиха, оператор $(\lambda_0-G)^{-1}$ компактен на $L_2(\Omega)$. Следовательно, спектр оператора $(\lambda_0-G)^{-1}$ дискретен, а его собственные значения имеют конечную кратность. Из того, что резольвентное множество оператора G не пусто, следует дискретность спектра оператора G, и его собственные значения имеют конечную кратность. Вместо G мы можем рассматривать оператор $G-\lambda_0$, следовательно, мы можем предполагать, что $0\in\rho(G)$ и оператор $T=G^{-1}$ компактен.

Известно, что для любого положительного ε существует λ_ε такое, что множество $\{\lambda:|\lambda|>\lambda_\varepsilon\}, |\arg\lambda|>\varepsilon\}$ содержится в резольвентном множестве оператора G (см. [2]). Отсюда непосредственно следует тот факт, что вне угла $|\arg\lambda|<\varepsilon$ лежит лишь конечное число собственных значений оператора. Заметим также, что условия для $|\mu|$, k и b ничем не отличаются от условий теоремы 2.2 работы [1] для самосопряженных операторов. Если $k\ge2\left[\frac{|\mu|}{2}\right]+1$, то в определении оператора G^b возьмем $b=1$. Подобным же образом получаем асимптотическое выражение для фиксированного $\arg\lambda$: $\sum_j\frac{1}{\lambda_j^b-\lambda}=c|\lambda|^{\frac{|\mu|}{kb}-1}+o\left(|\lambda|^{\frac{|\mu|}{kb}-1}\right)$, $|\lambda|\to\infty$, $\arg\lambda\ne0$. Теперь обозначим $q=\frac{|\mu|}{k}$ и $\lambda=-t$, $t>0$; при $t\to\infty$ получим

$$\sum_j\frac{1}{\lambda_j^b-\lambda}=c|t|^{\frac{q}{b}-1}+o\left(|t|^{\frac{q}{b}-1}\right).\qquad(1.10)$$

$\lambda_j^b = \vartheta_j^b \left(1 + i\frac{\nu_j}{\vartheta_j}\right)^b = \vartheta_j^b + \vartheta_j^b O\left(\frac{\nu_j}{\vartheta_j}\right)$, так что если $\left|\frac{\nu_j}{\vartheta_j}\right| < \varepsilon$ при $j > j_0$, то

$$\left|\sum_{j>j_0} \frac{1}{\lambda_j^b + t} - \sum_{j>j_0} \frac{1}{\mu_j^b + t}\right| \le \sum_{j>j_0} \frac{\left|\vartheta_j^b - \lambda_j^b\right|}{(\lambda_j^b + t)(\vartheta_j^b + t)} \le \gamma \cdot \varepsilon \sum_{j>j_0} \frac{\vartheta_j^b}{(\lambda_j^b + t)(\vartheta_j^b + t)} \le \gamma \cdot \varepsilon \sum_j \frac{1}{\lambda_j^b + t},$$

следовательно, $\sum_j \frac{1}{\vartheta_j^b + t} = ct^{\frac{q}{b}-1} + o\left(t^{\frac{q}{b}-1}\right)$.

Теперь мы можем применить теорему Харди-Литтлвуда (см. [2]), в результате получим

$N\left(\vartheta^{\frac{1}{b}}\right) = c\frac{\sin(\pi q/b)}{\pi q/b}\vartheta^{\frac{q}{b}} + o\left(\vartheta^{\frac{q}{b}}\right)$. Подставляя λ вместо $\vartheta^{\frac{1}{b}}$, получим

$$N(\lambda) = \frac{cb}{\pi q}\sin(\pi q/b)\lambda^q + o(\lambda^q),\ \lambda \to \infty, \tag{1.11}$$

Остается только вычислить c. В случае $\theta = \pi$ $\quad c = \int_\Omega \rho(x)dx$, где

$\rho(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} \frac{d\xi}{(G_0(x,i\xi))^b + 1}$. Обозначив $p(\xi) = (G_0(x,i\xi))^b$ и

$\nu(t) = \left|\{\xi : p(\xi) < 1\}\right|$, получим $\rho(x) = (2\pi)^{-n} \int_{E_n} \frac{d\xi}{p(\xi) + 1} = (2\pi)^{-n} \int_0^\infty \frac{1}{t+1} d\nu(t)$.

Так как $\nu(t) = t^{\frac{|\mu|}{kb}}\nu(1) = t^{\frac{q}{b}}\nu(1)$, то $\rho(x) = (2\pi)^{-n} \frac{q}{b}\nu(1)\int_0^\infty \frac{t^{\frac{q}{b}-1}}{t+1}dt =$

$= (2\pi)^{-n} \frac{\pi q}{b\sin(\pi q/b)}\nu(1)$, следовательно,

$\frac{cd}{\pi q}\sin(\pi q/b) = (2\pi)^{-n} \int_\Omega \nu(1)dx = (2\pi)^{-n} \int_\Omega \left|\{\xi : G_0(x,i\xi) < 1\}\right| dx$. Теорема доказана.

§2. Полнота собственных функций

В данном параграфе будут установлены условия, при которых собственные функции операторов рассматриваемого типа полностью покрывают гильбертово пространство или хотя бы определенное его подпространство. Сначала сформулируем некоторые теоремы относительно роста аналитической функции (без доказательства).

Теорема 2.1 (теорема Фрагмена–Ланделефа). Пусть $F(\lambda)$ – целая функция, и пусть $|F(\lambda)| \le C_1|\lambda|^{-1}$ на двух лучах, составляющих угол $\frac{\pi}{\alpha}$. Пусть $r_1 < r_2 < \ldots, r_k \to \infty$. Пусть также $\max_{|\lambda|=r_k}|F(\lambda)| \le C_2 e^{r_k^\beta}$, где $\beta < \alpha$. Тогда $|F(\lambda)| \le C_1|\lambda|^{-1}$ везде между двумя лучами.

Теорема 2.2. Пусть $F(\lambda)$ – целая функция конечного порядка ρ. Тогда для любого положительного ε существует последовательность $r_1 < r_2 < \ldots, r_k \to \infty$ такая, что $\min\limits_{|\lambda|=r_k} |F(\lambda)| \le C_2 e^{-r_k^{\rho+\varepsilon}}$. Доказательства этих теорем см. в [3].

Лемма 2.3. Пусть T – оператор, имеющий конечную двойную норму в гильбертовом пространстве X, а ε – положительное число. Тогда существует последовательность $r_1 < r_2 < \ldots, r_k \to \infty$ такая, что видоизмененная резольвента T_λ существует на окружностях $\{\lambda : |\lambda| = r_k\}$, и для $|\lambda| = r_k$ $|||T_\lambda||| < e^{r_k^{2+\varepsilon}}$.

Пусть T – линейный оператор на гильбертовом пространстве X. Обозначим через $sp(T)$ замкнутое подпространство, покрытое обобщенными собственными векторами оператора T, а через $sp'(T)$ – замкнутое подпространство, покрытое собственными векторами оператора T, соответствующими ненулевым собственным значениям. Очевидно, что $sp'(T) \subset \overline{R(T)}$. Далее приводится теорема, дающая условия, при которых $sp'(T) = \overline{R(T)}$. Доказательство этой теоремы см. в [4].

Теорема 2.3 Пусть T – оператор с конечной двойной нормой в гильбертовом пространстве X, такой, что существуют N направлений минимального роста видоизмененной резольвенты T, и угол между двумя соседними лучами меньше $\frac{\pi}{2}$ (таким образом $N \ge 5$). Тогда $sp'(T) = \overline{R(T)}$.

Теперь сформулируем основной результат данной главы.

Теорема 2.4 Пусть выполняются условия теоремы 1.3. Тогда $sp'(G) = L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть сначала $\frac{|\mu|}{2k} < 1$ и $\lambda_0 \in \rho(G)$. Тогда оператор $(G - \lambda_0)^{-1}$ отображает $L_2(\Omega)$ в $D(G) \subset H_{k\mu}(\Omega)$, по теореме Реллиха, он компактен. Рассматривая вместо G оператор $G - \lambda_0$, можно предполагать, что $0 \in \rho(G)$. Пусть $T = G^{-1}$. Очевидно, что $sp'(T) = sp(G)$. По теореме 1.1 работы [1], оператор T имеет конечную двойную норму. Так как $T_\lambda = -(\lambda - G)^{-1}$, то направления минимального роста для $(\lambda - G)^{-1}$ также являются направлениями минимального роста для T_λ. Таким образом, по теореме 2.3, $sp'(T) = \overline{R(T)}$. Но $R(T) = D(G)$, так что $\overline{R(T)} = L_2(\Omega)$. Следовательно, $sp(G) = sp'(T) = L_2(\Omega)$, в случае $\frac{|\mu|}{2k} < 1$ теорема доказана.

Теперь предположим, что $\frac{|\mu|}{2k} \ge 1$ и $\frac{1}{b} < \frac{2k}{|\mu|}$. Тогда $R(T^b) = D(G^b) \subset$ $\subset H_{kb\mu}(\Omega)$, так что оператор T^b имеет конечную двойную норму. $R(T^b)$ плотно в $L_2(\Omega)$, так как $R(T)$ плотно в $L_2(\Omega)$, а T – непрерывный оператор. Следовательно, $\overline{R(T^b)} = L_2(\Omega)$. Пусть $\omega_1,...,\omega_b$ – корни разложения единицы и пусть z – любое комплексное число, $|z|<1$. Тогда

$$z\sum_{i=1}^{b}\omega_i(1-\omega_i z)^{-1} = z\sum_{i=1}^{b}\omega_i\sum_{j=0}^{\infty}\omega_i^j z^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{b}\omega_i^{j+1}\right)z^{j+1}.$$

Теперь

$$\sum_{i=1}^{b}\omega_i^{j+1} = \begin{cases} b,\ j+1 = bv,\ v\in N, \\ 0,\ j+1\neq bv,\ v\in N. \end{cases}$$

Таким образом

$$z\sum_{i=1}^{b}\omega_i(1-\omega_i z)^{-1} = \sum_{v=1}^{\infty}bz^{vb} = bz^b(1-z^b)^{-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $1-z^b = \prod_{j=1}^{b}(1-\omega_j z)$ и деля на z, получим

$$\sum_{i=1}^{b}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{b}(1-\omega_i z) = bz^{b-1}.$$

Несмотря на то что последняя формула была выведена для $0<|z|<1$, она должна иметь место при всех комплексных z, так как обе ее части представляют собой многочлены от z. Заменив z оператором zT, получим

$$\sum_{i=1}^{b}\omega_i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{b}(1-\omega_i zT) = bz^{b-1}T^{b-1}.$$

Так как $\prod_{j=1}^{b}(1-\omega_i zT) = 1-z^bT^b$, то отсюда следует, что $z^b\in\rho_m(T^b)\Leftrightarrow\omega_j z\in\rho_m(T)$ для любого j. Умножая (6) на $(1-z^bT^b)^{-1} = \prod_{j=1}^{b}(1-\omega_j zT)^{-1}$, получим $\sum_{i=1}^{b}\omega_i(1-\omega_j zT)^{-1} = bz^{b-1}T^{b-1}(1-z^bT^b)^{-1}$. Умножим обе части полученного равенства на T, получим $\sum_{i=1}^{b}\omega_i T_{\omega_i z} = bz^{b-1}(T^b)_{z^b}$. Это равенство имеет место для всех z таких, что $z^b\in\rho_m(T^b)$.

Пусть $e^{i\theta}$ – комплексное число, все корни которого, кратные по номеру b, лежат на направлениях минимального роста видоизмененной резольвенты T. Из условий теоремы следует, что все числа, кроме конечного числа $e^{i\theta}$, удовлетворяют этому условию. Обозначив через $z = t^{1/b}e^{i\theta/b}$, получим $(T^b)_{te^{i\theta}} = b^{-1}t^{(1/b)-1}e^{i\theta(1-b)/b}\sum_{j=1}^{b}\omega_j T_{\omega_j t^{1/b}e^{i\theta/b}}$. Значит, если $\lambda = te^{i\theta}$, то

$$\left\|(T^b)_\lambda\right\| \le b^{-1}|\lambda|^{(1/b)-1}\sum_{j=1}^{b}\left\|T_{\omega_j t^{1/b}e^{i\theta/b}}\right\| \le b^{-1}|\lambda|^{(1/b)-1}\sum_{j=1}^{b}C\left|\omega_j t^{1/b}e^{i\theta/b}\right|^{-1} \le$$

$$\le b^{-1}|\lambda|^{(1/b)-1}|\lambda|^{-1/b} \le C|\lambda|^{-1}.$$

Таким образом $e^{i\theta}$ является направлением минимального роста видоизмененной резольвенты T^b. По теореме 2.3, $sp'(T^b) = \overline{R(T^b)} = L_2(\Omega)$. Теперь покажем, что $sp'(T^b) \subset sp'(T)$. Для любого $\alpha > 0$ рациональная функция $\prod_{j=1}^{b}(z-\omega_j)^{-\alpha}$ может быть разложена на частичные дроби. Для определенных комплексных чисел $c_{i\nu}$ имеем

$$\prod_{j=1}^{b}(z-\omega_j)^{-\alpha} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{i\nu}(z-\omega_i)^{-\nu}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\prod_{j=1}^{b}(z-\omega_j)^{\alpha}$, получим

$$\sum_{i=1}^{b}\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{i\nu}(z-\omega_i)^{\alpha-\nu}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{b}(z-\omega_j)^{\alpha} \equiv 1.$$

Заменяя z на оператор $z^{-1}T$ и умножая полученное выражение на $z^{\alpha b}$, получаем
$\sum_{i=1}^{b}\sum_{\nu=1}^{\infty} c_{i\nu} z^{\nu}(T-\omega_j z)^{\alpha-\nu}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{b}(T-\omega_j z)^{\alpha} = z^{\alpha b}$ для любого z.

Теперь предположим, что f – обобщенный собственный вектор оператора T^b, соответствующий ненулевому собственному значению λ. Для какого-либо $\alpha > 0$ $(T^b-\lambda)^{\alpha} f = 0$. Пусть $z^b = \lambda$. Тогда $T^b - \lambda = T^b - z^b = \prod_{j-1}^{b}(T-\omega_j z)$, следовательно, $\prod_{j=1}^{b}(T-\omega_j z)^{\alpha} f = 0$.

Отсюда следует, что для любого i, $i = 1,\ldots,b$, и для любого ν, $\nu = 1,\ldots,\alpha$,

$$(T-\omega_j z)^{\nu}\left[(T-\omega_j a)^{\alpha-\nu}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{b}(T-\omega_j z)^{\alpha} f\right] = 0,$$

так что вектор $(T-\omega_j z)^{\alpha-\nu}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{b}(T-\omega_j z)^{\alpha} f$ либо равен 0, либо является обобщенным собственным вектором оператора T, соответствующим собственному значению $\omega_i z$. Следовательно, этот вектор принадлежит $sp'(T)$, значит $z^{\alpha b} f \in sp'(T)$, а отсюда следует, что $f \in sp'(T) \Rightarrow sp'(T^b) \subset sp'(T)$. Теорема доказана.

Кафедра математических моделей и методов *Поступила 9.06.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Карапетян Г.А., Сардарян В.Т., Крмзян А.П.** Задача на собственные значения для самосопряженных полуэллиптических операторов. – Изв. АН РА, 1999, №3.
2. **Agmon S.** Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, D. Van Nostrand Company, Inc, N-Y, 1965.
3. Titchmarsh, The theory of functions, 2nd ed., Oxford University Press, 1939.
4. Dunford and Schwartz, Linear Operators, II, Interscience, 1963.

Վ.Տ. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ

ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ ԵՎ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՉ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԿԻՍԱԷԼԻՊՏԻԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքը [1] աշխատանքի շարունակությունն է ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների մի դասի համար: §1-ում ապացուցվում է գնահատական ոչ ինքնահամալուծ կիսաէլիպտիկ օպերատորների սեփական արժեքների համար սահմանափակ տիրույթում: §2-ում ցույց է տրվում սեփական ֆունկցիաների լրիվությունը $L_2(\Omega)$-ում, ավելի ճիշտ, ապացուցվում է, որ $sp'(T) = L_2(\Omega)$, որտեղ $sp'(T)$-ով նշանակված է T օպերատորի ոչ զրոյական սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական ֆունկցիաներով ծածկված փակ ենթատարածությունը: