

При $t > 0$ и $n \geq 1$ обозначим $N_n(t) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq t)$, где P – знак вероятности.

Лемма 1. Если $N_n(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(\overline{S_n} \geq t) \approx P(S_n \geq t) \approx N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1)$$

Здесь $f(t) \approx g(t)$ означает, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)/g(t)) = 1$.

При $t > 0$ и $n \geq 1$ обозначим

$$N_n^+(t) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq t), \quad N_n^-(t) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k \leq -t).$$

Тогда $N_n(t) = N_n^+(t) + N_n^-(t)$.

Сформулируем аналог леммы 1.

1. Если $N_n^+(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(S_n^+ \geq t) \approx P(S_n \geq t) \approx N_n^+(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1')$$

2. Если $N_n^-(t)$ правильно меняется на бесконечности, то

$$P(S_n^- \geq t) \approx P(S_n \leq -t) \approx N_n^-(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1'')$$

Здесь обозначено $S_n^+ = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$, $S_n^- = \min_{1 \leq k \leq n} S_k$, $n \geq 1$.

На второе асимптотическое равенство (1'') при $n = 2$ в случае правильного изменения вероятностей $P(\xi_k \geq t)$, $k = \overline{1, n}$, на бесконечности с одинаковым показателем указал Феллер. Более того, при $n = 2$ и отсутствии ограничений на $P(\xi_k \geq t)$, $k = \overline{1, n}$, он показал, что

$$P(S_n \geq t) \geq N_n^+(t), \quad t \rightarrow +\infty \quad (\text{см. [1], с.319-320}). \quad (2)$$

Здесь $f(t) \geq g(t)$, $t \rightarrow +\infty$, означает, что $\liminf_{t \rightarrow +\infty} (f(t)/g(t)) \geq 1$.

Индукцией (2) с $n = 2$ распространяется на произвольное $n \geq 2$.

Функция распределения G на R^1 имеет правый хвост $G^+(t) = 1 - G(t)$, левый хвост $G^-(t) = G(-t)$ и сумму хвостов $G^+(t) + G^-(t)$ при $t > 0$.

Смысл формулы (1') в том, что вклад в правый хвост вероятности $P(S_n \geq t)$ при $t \rightarrow +\infty$ для суммы независимых случайных величин привносят лишь правые хвосты вероятностей $P(\xi_k \geq t)$, $k = \overline{1, n}$, от слагаемых, в частности в случае их правильного изменения на бесконечности.

Отметим, что сумма конечного числа правильно меняющихся на бесконечности функций правильно меняется на бесконечности [2].

Аналогично интерпретируется формула (1'').

Если ξ_1, ξ_2, \dots одинаково распределены, то из (1') следует

$$P(S_n \geq t) \approx n \cdot P(\xi_1 \geq t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

а правильное изменение $P(\xi_1 \geq t)$ равносильно правильному изменению $P(S_n \geq t)$ на бесконечности в этом случае.

Асимптотические равенства (3) допускают следующее обобщение.

Если $v > 0$ – не зависящая от $\{\xi_n\}$ целочисленная случайная величина, $S_v = \xi_1 + \dots + \xi_v$, $Mv < +\infty$ (M – знак математического ожидания) и $P(\xi_1 \geq t)$ правильно меняется на бесконечности, то (см. [1], зад. 31, с. 330, гл. 8).

$$P(S_v \geq t) \approx Mv \cdot P(\xi_1 \geq t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3')$$

Соотношение (3') сохраняется и при некоторых видах зависимости случайных величин ξ_i и v (см., например, [3-4]).

При $Mv < +\infty$ и правильном изменении $P(|\xi_1| \geq t)$ на бесконечности верен “двухсторонний” аналог (3'): $P(|S_v| \geq t) \approx Mv \cdot P(|\xi_1| \geq t)$, $t \rightarrow +\infty$.

Результаты мы обобщим для одной модели, используемой при анализе “больших уклонений” сумм независимых случайных величин (см., например, [3-4]).

2°. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых случайных величин, $v > 0$ – не зависящая от $\{\xi_n\}$ целочисленная случайная величина,

$$S_v = \xi_1 + \dots + \xi_v, \quad \bar{S}_v = \max_{1 \leq n \leq v} |S_n|.$$

Модель. Пусть $\{\delta_n\}$ – последовательность положительных чисел, $\alpha \geq 0$. $L(t)$ медленно меняется на бесконечности,

$$P(|\xi_n| \geq t) = \delta_n \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{равномерно по } n \geq 1 \text{ (сравни с [5,6])}. \quad (4)$$

Обозначим

$$c_n = P(v = n), \quad A_n = \sum_{k=1}^n \delta_k, \quad n \geq 1, \quad A = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot A_n.$$

Теорема 1. Если $Mv < +\infty$, то для модели существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(\bar{S}_v \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(|S_v| \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} = A. \quad (5)$$

При $A = +\infty$ условие $Mv < +\infty$ можно опустить.

Действительно, по формуле полной вероятности,

$$P(|S_v| \geq t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot P(|S_n| \geq t) \geq \sum_{k=1}^n c_k \cdot P(|S_k| \geq t) \quad \text{при } t > 0 \text{ и } n \geq 1. \quad (6)$$

В силу леммы 1 и (4)

$$\sum_{k=1}^n c_k \cdot P(|S_k| \geq t) = \sum_{k=1}^n A_k \cdot c_k \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

т.е., согласно (6),

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \left(P(|S_v| \geq t) / t^{-\alpha} L(t) \right) \geq \sum_{k=1}^n A_k \cdot c_k \quad \text{при всех } n \geq 1.$$

Устремляя $n \rightarrow +\infty$ и учитывая неравенство $P(\bar{S}_v \geq t) \geq P(|S_v| \geq t)$, $t > 0$, выводим утверждение при $A = +\infty$. \triangleright

$A < +\infty$, и $\underline{\delta} = \inf_{n \geq 1} \delta_n > 0$ – пример, при котором верно (5). Действительно,

$$0 < \underline{\delta} \cdot Mv = \sum_{n \geq 1} n \cdot c_n \cdot \underline{\delta} = \sum_{n \geq 1} c_n (\delta_1 + \dots + \delta_n) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot A_n = A < +\infty$$

и применима теорема 1. \triangleright

Сформулируем “односторонние” аналоги теоремы 1. Если в модели

$$P(\xi_n \geq t) \approx \delta_n \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty, \text{ равномерно по } n \geq 1$$

или

$$P(\xi_n \leq -t) \approx \delta_n \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty, \text{ равномерно по } n \geq 1,$$

то при $Mv < +\infty$ в (5) \bar{S}_v и $|S_v|$ следует заменить на $S_v^+ = \max_{1 \leq n \leq v} S_n$ и S_v^- , или на

$$S_v^- = \min_{1 \leq n \leq v} S_n \text{ и } S_v \text{ соответственно.}$$

Замечание 1. В модели можно δ_n , $n \geq 1$ брать неотрицательными, но предположить, что $A > 0$. При $\delta_n = 0$ вместо (4) пишем $P(|\xi_n| \geq t) = o(t^{-\alpha} L(t))$. Тогда сохраняется утверждение теоремы 1. \triangleright

Обозначим $C(t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n P(|S_k| \geq t)$, $t > 0$. Очевидно, что для модели

$$C(t) \approx A \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Идея доказательства теоремы 1 заключается в следующем. Устанавливаются асимптотические неравенства

$$C(t) \leq P(|S_v| \geq t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (8)$$

и

$$P(\bar{S}_v \geq t) \geq C(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Так как $P(\bar{S}_v \geq t) \geq P(|S_v| \geq t)$, то из (7)–(9) следует теорема 1. \triangleright

Асимптотическое неравенство (8) получается аналогично утверждению выше в случае $A = +\infty$ и не используется условие $Mv < +\infty$.

Условие $Mv < +\infty$ является ограничением нашего метода доказательства асимптотического неравенства (9). \triangleright

Напомним, что функция распределения G на R^1 имеет асимметрию β , если существует предел [1]:

$$\beta = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G^+(t) - G^-(t)}{G^+(t) + G^-(t)} \quad (\text{тогда } -1 \leq \beta \leq 1).$$

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 с $A < +\infty$ функции распределения $P(\xi_n < x)$, $n \geq 1$, имеют асимметрии β_n , то в модели у $P(S_v < x)$ существует асимметрия

$$\beta = A^{-1} \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \beta_n, \quad (10)$$

где $B_n = \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot \delta_k$, $n \geq 1$. \triangleright

Результаты параграфа доказаны в приложении.

3⁰. Результат леммы 1 дает основание для общих постановок задач.

По формуле полной вероятности,

$$P(\bar{S}_v \geq t) = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot P(\bar{S}_n \geq t), t > 0. \quad (6')$$

Формальная подстановка асимптотических равенств (1) в (6) и (6') дает

$$P(\bar{S}_v \geq t) \approx P(|S_v| \geq t) \approx C(t), t \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Возникает следующая задача: найти условия, при которых справедливы асимптотические равенства (11).

Выше формулировка результатов по задаче дана в случае нашей модели.

Сделаем несколько общих замечаний.

Замечание 2. Сходимость ряда $C(t)$ при больших $t > 0$ необходима для справедливости (11). Она равносильна существованию предела $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$.

Действительно, из $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$ следует сходимость ряда $C(t)$ при больших $t > 0$. Обратно, по признаку Вейерштрасса [7], с.427, ряд $C(t)$ в области сходимости сходится равномерно, а из теоремы 4 [7] (с.434) следует $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$.

Замечание 3. Необходимое условие в замечании 2 согласуется с равенствами $P(\bar{S}_v = +\infty) = P(|S_v| = +\infty) = 0$. Покажем, что эти равенства выполнены. Действительно, из доказательства леммы 1 (см.прилож.) имеем $P(|S_n| = +\infty) = 0$ при всех $n \geq 1$.

Далее (см. [8], зад.19, с.95, гл.3),

$$P(S_n^+ \geq t) = 1 - P(S_k < t, k = \bar{1}, n) \leq 1 - \prod_{k=1}^n P(S_k < t) \text{ при } t > 0 \text{ и } n \geq 1,$$

откуда следует $P(S_n^+ = +\infty) = 0, n \geq 1$. Аналогично $P(S_n^- = -\infty) = 0, n \geq 1$.

Следовательно, $P(\bar{S}_n = +\infty) = 0$ при всех $n \geq 1$. Теперь из (6) и (6') следует утверждение.

Замечание 4. Отказ от правильного изменения $P(\xi_n \geq t)$, $n \geq 1$, на бесконечности может привести к нарушению асимптотических равенств (13).

Пример 1. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин,

$$P(\xi_n < x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x), & x \geq 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} n \geq 1,$$

а $\{c_n\}$ – пуассоновское распределение с параметром 1. Тогда

$$P(S_v \geq t) \approx e^{-1} \cdot C(t), t > 0. >$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем лемму 1.

Полагая $0 < \delta < 1/2$, $\lambda = (1-\delta)^n$, $t > 0$, к $P(S_n \geq t)$ последовательно применяем верхнюю оценку из [1], с.320.

$$P(S_n \geq t) \leq \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq (1-\delta)^{n-k+1} \cdot t) + \sum_{k=2}^n P(\xi_k \geq \delta \cdot (1-\delta)^{n-k+2} \cdot t) \times$$

$$\begin{aligned} \times P(S_{k-1} \geq \delta \cdot (1-\delta)^{n-k+2} \cdot t) \leq \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq \lambda \cdot t) + \\ + \{ \max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t) \} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t). \end{aligned}$$

Записав эту оценку для последовательности $\{-\xi_n\}$ и сложив с первоначальной, получаем

$$P(|S_n| \geq t) \leq N_n(\lambda \cdot t) + \{ \max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t) \} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t), \quad t > 0.$$

Фиксируем δ и n . Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} \{ \max_{1 \leq k \leq n} P(S_k \geq \delta \cdot \lambda \cdot t) \} = 0$.

Если $N_n(t)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $(-\alpha) \leq 0$, то

$$N_n(xt) \approx x^{-\alpha} N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{для любого } x > 0. \quad (\text{П.1})$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\{ \max_{1 \leq k \leq n} P(|S_k| \geq \delta \cdot \lambda \cdot t) \} \cdot N_n(\delta \cdot \lambda \cdot t)}{N_n(\lambda \cdot t)} = 0,$$

откуда следует $P(|S_n| \geq t) \leq N_n(\lambda \cdot t)$, $t \rightarrow +\infty$. Из этого асимптотического неравенства и (П.1), устремляя $\delta \downarrow 0$, получаем верхнюю оценку

$$P(|S_n| \geq t) \leq N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.2})$$

Записав нижнюю оценку (2) для последовательности $\{-\xi_n\}$ независимых случайных величин и сложив с оценкой (2), получаем следующую нижнюю оценку:

$$P(|S_n| \geq t) \geq N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.3})$$

Оценки (11.2), (11.3) доказывают второе асимптотическое равенство (1).

В случае последовательности $\{\xi_n\}$ независимых случайных величин из второго асимптотического равенства (1) имеем

$$P(\bar{S}_n \geq t) \leq \left(\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{k=1}^n |\xi_k| \geq t \right) = P\left(\sum_{k=1}^n |\xi_k| \geq t \right) \approx N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty$$

(первые два соотношения справедливы при любом $t > 0$).

Здесь учтено, что функции распределения $P(\xi_k < x)$ и $P(|\xi_k| < x)$ при каждом k имеют одинаковые суммы хвостов. Следовательно,

$$P(\bar{S}_n \geq t) \leq N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.4})$$

Так как $P(\bar{S}_n \geq t) \leq P(|S_n| \geq t)$, $t > 0$, то из второго асимптотического равенства (1) следует оценка

$$P(\bar{S}_n \geq t) \geq N_n(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.5})$$

Асимптотические неравенства (П.4), (П.5) завершают доказательство леммы 1. \triangleright

Аналог леммы 1 доказывается аналогично лемме 1. Отметим лишь, что в выводе (1') используется последовательность $\{\max(0, \xi_n)\}$ независимых случайных величин вместо $\{\xi_n\}$. При этом учитываем, что функции распределения $P(\xi_k < x)$ и $P(\max(0, \xi_k) < x)$ при каждом k имеют одинаковый правый хвост.

Асимптотические равенства (1⁺) следуют из (1⁺) рассмотрением вместо $\{\xi_n\}$ последовательности $\{-\xi_n\}$. \triangleright

Метод доказательства леммы 1 проходит и при доказательстве следующего ее аналога.

Лемма 1^{}. Если $N_n(t) \leq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, где $\alpha \geq 0$, то*

$$P(\bar{S}_n \geq t) \leq t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.6})$$

Замечание 5. Пусть $P(|\xi_k| \geq t) \leq t^{-\alpha_k} \cdot L_k(t)$, $t \rightarrow +\infty$, $k = \overline{1, n}$. Известно, что сумма конечного числа правильно меняющихся на бесконечности функций правильно меняется на бесконечности. Следовательно, существуют $\alpha \geq 0$ и $L(t)$, такие, что

$$\sum_{k=1}^n t^{-\alpha_k} \cdot L_k(t) \approx t^{-\alpha} \cdot L(t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Тогда $N_n(t) \leq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \rightarrow +\infty$. При этих предположениях асимптотическое неравенство (П.6) доказывается очень просто. Действительно, при $n=2$ из неравенства (см. [1], с.320)

$$P(S_2 \geq t) \leq P(\xi_1 \geq (1-\delta)t) + P(\xi_2 \geq (1-\delta)t) + P(\xi_1 \geq \delta \cdot t)P(\xi_2 \geq \delta \cdot t), \quad t > 0,$$

где $0 < \delta < 1/2$, следует неравенство для модулей

$$\begin{aligned} P(|S_2| \leq t) &\leq P(|\xi_1| \geq (1-\delta)t) + P(|\xi_2| \geq (1-\delta)t) + P(|\xi_1| \geq \delta \cdot t)P(|\xi_2| \geq \delta \cdot t) \leq \\ &\leq t^{-\alpha_1} L_1(t) \cdot (1-\delta)^{-\alpha_1} + t^{-\alpha_2} L_2(t) \cdot (1-\delta)^{-\alpha_2} \leq \\ &\leq (1-\delta)^{-\min(\alpha_1, \alpha_2)} t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Устремляя $\delta \downarrow 0$, получаем $P(|S_2| \geq t) \leq t^{-\alpha} \cdot L(t)$, $t \rightarrow +\infty$.

Осталось использовать вывод верхней оценки (11.4), что дает (11.6) при $n=2$. Индукцией утверждение распространяется с $n=2$ на произвольное $n \geq 2$. \triangleright

Доказательство теоремы 1 заключается в получении при $A < +\infty$ оценок (8) и (9). (Случай $A = +\infty$ рассмотрен выше). Его мы разобьем на леммы 2, 3, 4.

Предварительно отметим, что если $P(v \leq k < +\infty)$ при некотором $k < 1$, то теорема 1 есть очевидное следствие леммы 1. Поэтому в дальнейшем считаем, что

$$c_{>n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k>n} c_k > 0 \quad \text{при всех } n \geq 1.$$

Лемма 2. Если $A < +\infty$, то в предположениях модели справедливо асимптотическое неравенство (8).

Доказательство. По $\varepsilon \in (0, 1)$ выберем $n_0 > 1$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n A_n \geq A \cdot \sqrt{1-\varepsilon}. \quad \text{По лемме 1,}$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n P(|S_n| \geq t) \approx \sum_{n=1}^{n_0} c_k \sum_{k=1}^n P(|\xi_k| \geq t) \stackrel{\text{def}}{=} f_{n_0}(t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{П.7})$$

так как вероятности $P(|\xi_k| \geq t)$, $k \geq 1$, в силу (4) правильно меняются на бесконечности (тогда правая часть (П.7), т.е. $f_{n_0}(t)$, правильно меняется на бесконечности).

При данных ε и n_0 согласно (4) и (11.7) выберем $t_0 > 0$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{n_0} c_n P(|S_n| \geq t) \geq g_{n_0} \cdot \sqrt{1-\varepsilon} \cdot t^{-\alpha} L(t) \text{ для всех } t > t_0,$$

где обозначено $g_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} c_n A_n$. При $t \geq t_0$ из (5) и вышеприведенных неравенств имеем

$$P(|S_v| \geq t) \geq g_{n_0} \cdot \sqrt{1-\varepsilon} \cdot t^{-\alpha} L(t) \geq A \cdot (1-\varepsilon) t^{-\alpha} L(t).$$

Следовательно, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(|S_v| \geq t) / t^{-\alpha} L(t)) \geq A \cdot (1-\varepsilon)$, откуда, устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, получаем (8). \triangleright

Обозначим $\eta_n = |\xi_n|$, $n \geq 1$, $s_v = \eta_1 + \dots + \eta_v$.

Лемма 3. Если $Mv < +\infty$ и $A < +\infty$, то в предположениях модели

$$P(s_v \geq t) \leq 2 \cdot A \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.8})$$

Доказательство. Пусть для $t > 0$ и $n \geq 1$: $(\eta_n)_t = \eta_n$ при $\eta_n < t$ и $(\eta_n)_t = 0$ при $\eta_n \geq t$; $s_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $s_n(t) = (\eta_1)_t + \dots + (\eta_n)_t$, $s_v(t) = (\eta_1)_t + \dots + (\eta_v)_t$.

При $t > 0$, $k \geq 1$, $\beta \geq \alpha$ интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} 0 < M(\eta_k)_t^\beta &= \int_0^t x^\beta dP(\eta_k < x) = -t^\beta \cdot P(\eta_k \geq t) + \beta \cdot \int_0^t x^{\beta-1} P(\eta_k \geq x) dx < \\ &< \beta \cdot \int_0^t x^{\beta-1} P(\eta_k \geq x) dx, \end{aligned}$$

где строгое неравенство вызвано правильным изменением $P(\eta_k \geq t)$ на бесконечности (что, впрочем, несущественно).

По $\varepsilon \in (0, 1)$ выберем $t_0 > 0$ так, чтобы при $t \geq t_0$ согласно (4) выполнялись неравенства

$$P(\eta_k \geq t) \leq \delta_k (1 + \varepsilon) \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad k \geq 1. \quad (\text{П.9})$$

С учетом (П.9), при $t > t_0$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta &< \beta \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \left(\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^t \right) x^{\beta-1} P(\eta_k \geq x) dx \leq \\ &\leq \beta \cdot t_0^{\beta-1} \cdot Mv + \beta(1 + \varepsilon) \cdot A \cdot \int_{t_0}^t x^{\beta-\alpha-1} L(x) dx. \end{aligned}$$

В силу теоремы 2.1 [2], (с.54–55, гл.2) имеем

$$\int_{t_0}^t x^{\beta-\alpha-1} L(x) dx \approx \frac{t^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, учитывая неравенство $\beta > \alpha$, получаем

$$t^{-\beta} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta \leq \frac{\beta \cdot A}{\beta - \alpha} (1 + \varepsilon) t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.10})$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, выводим

$$t^{-\beta} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta \leq \frac{\beta \cdot A}{\beta - \alpha} t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Далее, по неравенству Чебышева, для любого $t > 0$

$$P(s_v(t) \geq t) = \sum_{n \geq 1} c_n P(s_n(t) \geq t) \leq t^{-\beta} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n M(\eta_k)_t^\beta,$$

откуда, применяя (П.10), получаем $P(s_v(t) \geq t) \leq \frac{\beta \cdot A}{\beta - \alpha} t^{-\alpha} L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, при всех $\beta > \alpha$. Устремляя в асимптотическом неравенстве $\beta \rightarrow +\infty$, заключаем

$$P(s_v(t) \geq t) \leq A \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.11})$$

При $t > 0$ запишем

$$P(s_1 \geq t) = P(s_1 \geq t, \text{ хотя бы одно } \eta_k \geq t, k = \overline{1, v}) + P(s_v(t) \geq t, \eta_k < t, k = \overline{1, v}) \leq \sum_{n \geq 1} c_n \cdot P(\text{ хотя бы одно } \eta_k \geq t, k = \overline{1, n}) + P(s_v(t) \geq t) \leq C(t) + P(s_v(t) \geq t).$$

Отсюда, используя (П.11) и (7), получаем (П.8). \triangleright

Лемма 4. Если $Mv < +\infty$ и $A < +\infty$, то в предположениях модели для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется $n_0 > 1$ такое, что

$$\sum_{n > n_0} c_n \cdot P(\bar{S}_n \geq t) \leq \varepsilon \cdot A \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.12})$$

Доказательство. По данному $\varepsilon \in (0, 1)$, выберем целое $n_0 > 1$ такое, что $2 \cdot \sum_{n > n_0} c_n \cdot A_n < \varepsilon \cdot A$, и зафиксируем n_0 . Пусть $\{\theta_k\} = \{ \eta_{k+n_0} \}$, $\mu > 0$ – не зависящая от $\{\theta_k\}$ целочисленная случайная величина,

$$P(\mu = k) = P(v = k + n_0 / v > n_0) = (c_{k+n_0} / c_{>n}), \quad k \geq 1.$$

Здесь $P(A/B)$ – условная вероятность события A при условии осуществления события B .

$$\text{Так как} \quad M\mu = \sum_{k \geq 1} \frac{k \cdot c_{k+n_0}}{c_{>n}} < \sum_{k > n_0} \frac{k \cdot c_k}{c_{>n}} < \frac{Mv}{c_{>n}} < +\infty$$

и

$$\sum_{k \geq 1} \frac{c_{k+n_0}}{c_{>n}} (A_{k+n_0} - A_{n_0}) = \sum_{k > n_0} \frac{c_k \cdot A_k}{c_{>n_0}} - A_{n_0} < \frac{A}{c_{>n}} - A_{n_0} < +\infty,$$

то к случайной величине ζ_μ применима лемма 3, где вместо A фигурирует число

$$A' = \sum_{k > n_0} \frac{c_k \cdot A_k}{c_{>n}} - A_{n_0}. \text{ Следовательно,}$$

$$P(\zeta_\mu \geq t) \leq 2 \cdot A' \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.13})$$

По лемме 1, $P(s_{n_0} \geq t) \approx A_{n_0} \cdot t^{-\alpha} L(t)$, $t \rightarrow +\infty$, а случайные величины s_{n_0} и ζ_μ независимы. Поэтому с учетом (П.13) и замечания 5 к $P(s_{n_0} + \zeta_\mu \geq t)$ применима лемма 1*. Именно:

$$\sum_{n > n_0} c_n \cdot P(s_n \geq t) = c_{>n_0} P(s_{n_0} + \zeta_\mu \geq t) \leq (2A' + A_{n_0}) \cdot c_{>n_0} \cdot t^{-\alpha} L(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{П.14})$$

При данных ε и n_0 в силу неравенств $(2A' + A_{n_0}) \cdot c_{>n_0} < 2 \sum_{k>n_0} c_k \cdot A_k < \varepsilon \cdot A$ и

$P(\bar{S}_n \geq t) = P(S_n \geq t)$ при $t > 0$ и $n \geq 1$ из (П.14) получаем (П.12). \triangleright

Докажем теорему 1.

Из равенства $P(\bar{S}_v \geq t) = \left(\sum_{n=1}^{n_0} + \sum_{n>n_0} \right) c_n \cdot P(\bar{S}_n \geq t)$, $t > 0$ (П.12) и леммы 1,1*.

закключаем $P(\bar{S}_v \geq t) \leq (g_{n_0} + \varepsilon \cdot A) \cdot t^{-\alpha} L(t) \leq (1 + \varepsilon) \cdot t^{-\alpha} L(t)$, $t \rightarrow +\infty$. Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, получаем (9). По лемме 2, т.е. (8) и (9), получаем утверждение теоремы 1. \triangleright

“Односторонние” аналоги теоремы 1 выводятся аналогично теореме 1. \triangleright

Докажем теорему 2.

Так как $|\beta| \leq A^{-1} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot |\beta_k| \leq A^{-1} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot A_n = 1$ (см.(10)),

то число β в формулировке теоремы 2 может играть роль асимметрии.

Пусть $\beta > -1$. Тогда $0 < \frac{1+\beta}{2} = A^{-1} \cdot \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \frac{1+\beta_k}{2}$.

Покажем, что

$$P(S_v \geq t) \approx \frac{1+\beta}{2} P(|S_v| \geq t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{П.15})$$

откуда в данном случае следует теорема 2.

По $\varepsilon \in (0,1)$ выберем целое $n_0 > 1$ так, чтобы одновременно выполнялись асимптотическое неравенство (П.12) и

$$(1-\varepsilon) \cdot \frac{1+\beta}{2} = A^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \frac{1+\beta_k}{2} = (1+\varepsilon) \cdot \frac{1+\beta}{2}. \quad (\text{П.16})$$

Если $P(\xi_k \geq t) = o(t^{-\alpha} L(t))$, $t \rightarrow +\infty$ при $k = \overline{1, n}$, то из [1] (с.319–320) легко следует $P(S_n \geq t) = o(t^{-\alpha} L(t))$, $t \rightarrow +\infty$. Этот факт и лемма 1 вместе с учетом неравенства $(1-\varepsilon)(1-\beta)/2 > 0$ позволяют записать цепочку асимптотических соотношений

$$\begin{aligned} 0 < \left(\sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \frac{1+\beta_k}{2} \right) \cdot t^{-\alpha} L(t) &\approx \sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot \sum_{k=1}^n \delta_k \cdot \frac{1+\beta_k}{2} P(|\xi_k| \geq t) \approx \\ &\approx \sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot \sum_{k=1}^n P(\xi_k \geq t) \approx \sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot P(S_n \geq t), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому в силу (П.16) и теоремы 1

$$(1-\varepsilon) \frac{1+\beta}{2} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot P(S_n \geq t)}{P(|S_v| \geq t)} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot P(S_n \geq t)}{P(|S_v| \geq t)} \leq (1+\varepsilon) \frac{1+\beta}{2} \quad (\text{П.17})$$

С другой стороны, согласно (П.12) и теореме 1,

$$0 < \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{P(S_V \geq t)}{P(|S_V| \geq t)} - \frac{\sum_{n=1}^{n_0} c_n \cdot P(S_n \geq t)}{P(|S_V| \geq t)} \right) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n > n_0} c_n \cdot P(|S_n| \geq t)}{P(|S_V| \geq t)} \leq \varepsilon,$$

откуда и из (П.17) следует

$$(1 - \varepsilon) \frac{1 + \beta}{2} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(S_V \geq t)}{P(|S_V| \geq t)} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(S_V \geq t)}{P(|S_V| \geq t)} \leq (1 + \varepsilon) \frac{1 + \beta}{2} + \varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \downarrow 0$, получаем (П.15).

Если $\beta < 1$ (куда включается оставшийся случай $\beta = -1$), то аналогично доказывается, что

$$P(S_V \leq -t) \approx \frac{1 - \beta}{2} P(|S_V| \geq t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

откуда в данном случае следует *теорема 2*.

Теорема 2 доказана. \triangleright

Кафедра теории вероятностей и мат. статистики

Поступила 18.02.2000

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984, т.2, 751с.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985, 141 с.
3. Greenwood P. Asymptotics of randomly stopped sequences with independent increments. – Ann. Probability, 1973, v.1, p.317-321.
4. Greenwood P., Monroe I. Random stopping preserves regular variation. – Ann. Probability, 1977, v.5, p.42-51.
5. Ткачук С.Г., Зулматов С. Обобщение одной теоремы А.В.Нагаева о больших отклонениях для вероятностей попадания в интервал. - В сб.: Мат.анализ и теория вероятн., Ташкент, Фан, 1988.
6. Зулматов С., Ткачук С.Г. Аддитивное свойство вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин. – ДАН Уз.ССР, 1987, №4, с.15-16.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т.2, 800с.
8. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987, 317с.

ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ԹՎՈՎ ԱՆԿԱԽ ՊԱՏԱՀԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԳՈՒՄԱՐՆԵՐԻ ՄԱՔՍԻՍՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիցուք $\{\xi_n\}$ -ը անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականություն է,

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \bar{S}_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|, \quad n \geq 1: \text{ Յույց է տրված, որ } N_n(t) = \sum_{k=1}^n P(|\xi_k| \geq t)$$

ֆունկցիայի կանոնավոր փոփոխումը, որտեղ P -ն հավանականության մշանն է, հանգեցնում է հետևյալ սահմանային առնչություններին՝

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(\bar{S}_n \geq t)}{N_n(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(|S_n| \geq t)}{N_n(t)} = 1:$$

Դիցուք $v > 0$ -ն $\{\xi_n\}$ -ից անկախ ամբողջ արժեքներով պատահական մեծություն է, որի մաթեմատիկական սպասումը վերջավոր է, $S_v = \xi_1 + \dots + \xi_v$, $\bar{S}_v = \max_{1 \leq n \leq v} |S_n|$:

Դիտարկենք հետևյալ մոդելը: Դիցուք $\{\delta_n\}$ -ը դրական թվերի հաջորդականություն է, $\alpha \geq 0$. $L(t)$ -ն դանդաղ է փոփոխվում և

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (P(|\xi_n| \geq t) / t^{-\alpha} L(t)) = \delta_n \text{-ը հավասարաչափ է ըստ } n \geq 1 \text{-ի:}$$

$$\text{Նշանակենք } c_n = P(v=n), \quad A_n = \sum_{k=1}^n \delta_k, \quad n \geq 1, \quad A = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot A_n:$$

$$\text{Մոդելի շրջանակներում ապացուցված է, որ } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(\bar{S}_v \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(S_v \geq t)}{t^{-\alpha} L(t)} = A:$$

Վերոհիշյալ պայմանների դեպքում և $P(\xi_n < x)$, $n \geq 1$, բաշխման ֆունկցիաների ասիմետրիաների գոյության ժամանակ գտնված է $P(S_v < x)$ -ի ասիմետրիան: