ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

Математика

УДК 513.813

А.В. КОЛЯН

ПРОСТРАНСТВА ФРЕНЕ

Известно, что в области исследований геометрии пространств аффинной связности большое место занимают исследования пространств без кручения. В настоящей работе изучаются свойства так называемых пространств Френе, являющихся пространствами аффинной связности с кручением.

В этих пространствах введено понятие объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов. Найдены необходимые и достаточные условия для того чтобы связность без кручения, на которую отображается связность Френе с сохранением псевдосвязности, являлась эквиаффинной. Доказано, что для того чтобы отображение двух пространств Френе друг на друга являлось геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы средние связности этих пространств совпадали.

Определение. Пространство аффинной связности назовем пространством Френе, если в некоторой системе координат его коэффициенты связности Γ^i_{jk} удовлетворяют условиям

$$\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^k_{ji}\,[1]\ . \tag{1}$$

Покажем, что координаты тензора кривизны удовлетворяют условиям

$$R_{ijk\bullet}{}^{l} = 0, \quad \text{если} \quad k = l. \tag{2}$$

Действительно, для координат тензора кривизны имеем [1,стр. 125]

$$R_{ijk\bullet}{}^{l} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} \tag{3}$$

Из (1) следует, что

$$\Gamma^i_{jk} = 0, \quad \text{если} \quad i = k\,. \tag{4}$$

В силу (4) из (3) получим

$$R_{ijk\bullet}{}^{l} = \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}, \quad \text{если} \quad i = k\,. \tag{5}$$

Используя (1) из (5), получим

$$R_{ijk\bullet}{}^{l} = \Gamma^m_{il}\Gamma^k_{jm} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{jm}, \quad \text{если} \quad i = k\,,$$

откуда следует, что

$$R_{ijk\bullet}{}^{l} = 0, \quad \text{если} \quad i = k\,,$$

и (2) доказано.

Из (2) следует, что

$$R_{ijs\bullet}{}^{s} = 0\,. \tag{6}$$

В пространство Френе введем понятие объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов.

Объемом параллелотопа, построенного на векторах некоторого базиса $\underset{1}{v}^{i_1}, \underset{2}{v}^{i_2}, \ldots, \underset{n}{v}^{i_n}$, называется след некоторого n-вектора $e_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ на этих векторах, то есть

$$V = e_{i_1, i_2, \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1}, \underset{2}{v}^{i_2}, \ldots, \underset{n}{v}^{i_n} . \tag{7}$$

Предположим, что объем (7) не изменяется при параллельном перенесении векторов. Тогда

$$dV = \delta V = \delta e_{i_1, i_2, \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1}, \underset{2}{v}^{i_2}, \ldots, \underset{n}{v}^{i_n} = 0, \tag{8}$$

причем, это равенство должно выполняться независимо от выбора базиса $\underset{1}{v}^{i_1}, \underset{2}{v}^{i_2}, \ldots, \underset{n}{v}^{i_n}$ и, следовательно, равносильно условию

$$\delta e_{i_1, i_2, \ldots i_n} = 0,$$

или

$$\nabla_k e_{i_1, i_2, \ldots, i_n} du^k = 0 . \tag{9}$$

(9) должно иметь место при любом выборе вектора du^k, следовательно,

$$\nabla_k e_{i_1, i_2, \ldots i_n} = 0,$$

или

$$\partial_k e_{i_1, i_2, \ldots, i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{s, i_2, \ldots, i_n} - \Gamma^s_{ki_2} e_{i_1, s, \ldots, i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1, i_2, \ldots, s} = 0. \tag{10}$$

Если в (10) хотя бы два из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ равны, то эти уравнения удовлетворяются тождественно. Остается рассмотреть уравнения, соответствующие различным значениям этих индексов. В силу косой симметрии n-вектора $e_{i_1, i_2, \ldots i_n}$ все эти уравнения сводятся к следующему:

$$\partial_k e_{1, 2, \ldots, n} - \Gamma^s_{k1} e_{s, 2, \ldots, n} - \Gamma^s_{k2} e_{1, s, \ldots, n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{1, 2, \ldots, s} = 0. \tag{11}$$

Отсюда, используя (4), получим

$$\partial_k e_{1, 2, \ldots, n} = 0 . \tag{12}$$

Из (11) следует, что

$$e_{1, 2, \ldots, n} = const . \tag{13}$$

Итак, если объем (7) остается неизменным при параллельном перенесении векторов, то n-вектор $e_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, определяющий объем, удовлетворяет условию (12), то есть его существенная координата, или основная плотность $e_{i_1, i_2, \ldots i_n}$, постоянна. Наоборот, если в пространстве Френе выберем такой n-вектор, существенная координата которого постоянна, то объем, определяющийся этим n-вектором, остается неизменным при параллельном перенесении векторов. Действительно, легко видеть, что в пространстве Френе из (13) следует (8). Таким образом, доказана

Теорема 1. Любое пространство Френе допускает существование объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов, причем, существенная координата n-вектора, определяющего этот объем, постоянна.

Пусть некотрое пространство $\widetilde{A}_n$ и пространство Френе A_n имеют общую псевдосвязность, то есть они отображены друг на друга так, что направления соответствующих векторов переносятся параллельно в обоих пространствах. Тогда тензор аффинной деформации имеет структуру ([2], с.149])

$$T^i_{jk} = q_j \delta^i_k ,$$

то есть

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = q_j \delta^i_k, \tag{14}$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ – коэффициенты связности $\tilde{A}_n$.

Предположим, что $\tilde{A}_n$ не имеет кручения. Тогда из (14) альтернированием по индексам j и k получим

$$\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = q_j \delta^i_k - q_k \delta^i_j. \tag{15}$$

Свертывая по индексам i и k и используя (4) из (15), получим

$$q_j = \frac{1}{n-1} \Gamma^s_{sj}. \tag{16}$$

В силу (16) из (14) получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{n-1} \Gamma^s_{sj} \delta^i_k. \tag{17}$$

Таким образом, связность без кручения, на которую отображается связность Френе с сохранением псевдосвязности, определяется однозначно по формуле (17).

Свертывая по индексам i и k и используя (4) из (17), получим

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{n-1} \Gamma^s_{sj}. \tag{18}$$

Из (17) следует, что если Γ^s_{sj} есть градиентный ковектор, то $\tilde{A}_n$ является эквиаффинным пространством и – наоборот.

Ковектор q_j, участвующий в формуле (14), назовем ковектором отображения. Из (16) следует, что если Γ^s_{sj} есть градиентный ковектор, то q_i также является градиентным ковектором и – наоборот. Итак доказана

Теорема 2. Для того чтобы связность без кручения, на которую отображается связность Френе с сохранением псевдосвязности, являлась эквиаффинной, необходимо и достаточно, чтобы ковектор отображения являлся градиентным ковектором.

Предположим теперь, что в (14) связность $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ имеет кручения. Принимая в (14) i=k и используя (4), получим

$$\tilde{\Gamma}^1_{j1} = \tilde{\Gamma}^2_{j2} = \ldots = \tilde{\Gamma}^n_{jn} = q_j. \tag{19}$$

Выясним, когда $\tilde{A}_n$ допускает существование объема, сохраняющегося при параллельном перенесении векторов. Согласно (11) связность $\tilde{A}_n$ должна удовлетворять условию

$$\partial_k e_{12,\ldots,n} - \tilde{\Gamma}^1_{k1} e_{12,\ldots,n} - \tilde{\Gamma}^2_{k2} e_{12,\ldots,n} - \ldots - \tilde{\Gamma}^n_{kn} e_{12,\ldots,n} = 0. \tag{20}$$

Используя (19), приведем (20) к виду

$$\partial_k e_{12,\ldots,n} - n q_k e_{12,\ldots,n} = 0, \tag{21}$$

откуда следует, что q_k есть градиент

$$q_k = \frac{1}{n} \partial_k \ln e. \tag{22}$$

Таким образом, если вектор отображения q_k есть градиент, то $\tilde{A}_n$ допускает существование объема и – наоборот. Причем из (16) и (22) следует, что

$$\partial_k \ln e = \frac{n}{n-1}\Gamma^s_{sk}. \tag{23}$$

Из (23) следует, что основная плотность, а с ней и основной n-вектор пространства $\tilde{A}_n$, определяющий этот объем, определяются по коэффициентам связности Френе с точностью до постоянного множителя. Итак доказана

Теорема 3. Для того чтобы пространство $\tilde{A}_n$, отображенное на пространство Френе A_n с сохранением псевдосвязности, допускало существование объема, необходимо и достаточно, чтобы вектор этого отображения являлся градиентом. Причем n-вектор, определяющий этот объем, определяется по коэффициентам связности пространства Френе A_n с точностью до постоянного множителя.

Предположим теперь, что пространство $\tilde{A}_n$ отображено на пространство Френе A_n так, что геодезические линии $\tilde{A}_n$ переходят в геодезические линии A_n. Тогда в системе координат, общей по отношению к этому отображению, имеет место ([1], стр.166)

$$\delta^{[l}_{(m}T^{i]}_{jk)} = 0 \tag{24}$$

или

$$\delta^l_m T^i_{jk} + \delta^l_j T^i_{km} + \delta^l_k T^i_{mj} + \delta^l_j T^i_{mk} + \delta^l_k T^i_{jm} + \delta^l_m T^i_{kj} - \delta^i_m T^l_{jk} - \delta^i_j T^l_{km} -$$
$$- \delta^i_k T^l_{mj} - \delta^i_j T^l_{mk} - \delta^i_k T^l_{jm} - \delta^i_m T^l_{jk} = 0. \tag{25}$$

Проведя свертывание по индексам l и m, из (25) получим

$$nT^i_{jk} + T^i_{kj} + T^i_{kj} + T^i_{jk} + T^i_{jk} + nT^i_{kj} - T^i_{jk} - \delta^i_j T^s_{ks} - \delta^i_k T^s_{sj} - \delta^i_j T^s_{sk} - \delta^i_k T^s_{js} - T^i_{kj} = 0$$

или

$$(n+1)T^i_{jk} + (n+1)T^i_{kj} = \delta^i_j\left(T^s_{ks} + T^s_{sk}\right) + \delta^i_k\left(T^s_{js} + T^s_{sj}\right). \tag{26}$$

Обозначая

$$T^s_{ks} + T^s_{sk} = p_k, \tag{27}$$

приведем (26) к виду

$$T^i_{jk} + T^i_{kj} = \delta^i_j P_k + \delta^i_k P_j. \tag{28}$$

Таким образом, если отображение $\tilde{A}_n$ на A_n геодезическое, то тензор аффинной деформации удовлетворяет (28), где p_k – некоторый ковектор.

Наоборот, если тензор аффинной деформации удовлетворяет (28), где p_k – некоторый ковектор, то имеет место (25).

Действительно, перепишем (25) в виде

$$\delta^l_m\left(T^i_{jk} + T^i_{kj}\right) + \delta^l_j\left(T^i_{km} + T^i_{mk}\right) + \delta^l_k\left(T^i_{mj} + T^i_{jm}\right) - \delta^i_m\left(T^l_{jk} + T^l_{kj}\right) -$$
$$- \delta^i_j\left(T^l_{km} + T^l_{mk}\right) - \delta^i_k\left(T^l_{mj} + T^l_{jm}\right) = 0. \tag{29}$$

Используя (28), приведем (29) к виду

$$\delta^l_m\left(\delta^i_j P_k + \delta^i_k P_j\right) + \delta^l_j\left(\delta^i_k P_m + \delta^i_m P_k\right) + \delta^l_k\left(\delta^i_m P_j + \delta^i_j P_m\right) - \delta^i_m\left(\delta^l_j P_k + \delta^l_k P_j\right) -$$
$$- \delta^i_j\left(\delta^l_k P_m + \delta^l_m P_k\right) - \delta^i_k\left(\delta^l_m P_j + \delta^l_j P_m\right) = 0. \tag{30}$$

Открывая скобки, получим шесть членов со знаком плюс и шесть членов со знаком минус, которые взаимно уничтожаются и, следовательно, (30) выполняется тождественно.

Итак, (28) является необходимым и достаточным условием для того чтобы отображение $\widetilde{A}_n$ на A_n было геодезическим.

В (28) можно считать, что p_k – произвольный ковектор, так как, проведя в (28) свертывание по индексам *i* и *j*, получим, что p_k удовлетворяет (27).

Предположим, что пространство $\widetilde{A}_n$ также является пространством Френе. Тогда из (28) при i=j=k=1 получим $T^1_{11} = p_1$ или $\widetilde{\Gamma}^1_{11} - \Gamma^1_{11} = p_1$.

Используя (4), отсюда получим $p_1 = 0$.

Аналогично получим $p_2 = p_3 = ... = p_n = 0$. Следовательно,

$$p_k = 0 \tag{31}$$

и (28) примет вид

$$T^i_{jk} + T^i_{kj} = 0. \tag{32}$$

Таким образом, если $\widetilde{A}_n$ и A_n являются пространствами Френе, то из (28) следует (32). Заметим, что в этом случае из (32) следует (28). Действительно, проведя в (32) свертывание по индексам i и j и используя (27), получим, что имеет место и (31). А из (32) и (31) следует, что имеет место (28).

Условие (32) запишем в виде

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} + \widetilde{\Gamma}^i_{kj} - \Gamma^i_{kj} = 0$$

или

$$\overset{\sim}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i_{jk} = \boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}, \tag{33}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$ – средняя связность взаимных связностей Γ^i_{jk} и Γ^i_{kj}.

Имея в виду, что средняя связность $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$ определяется заданием связности Γ^i_{jk} пространства A_n, будем называть ее средней связностью пространства A_n. Итак, доказана

Теорема 4. Для того чтобы отображение двух пространств Френе друг на друга являлось геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы средние связности этих пространств совпадали.

Кафедра алгебры и геометрии
Поступила 29.06.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колян А.В.** – Уч. записки ЕГУ, 1998, №1, с. 3.
2. **Норден А. П.** Пространства аффинной связности. М., 1976.

Ա. Վ. ՔՈԼՅԱՆ

ՖՐԵՆԵԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Այս տարածություններում մուծված է ծավալի գաղափարը, որը անփոփոխ է մնում վեկտորների զուգահեռ տեղափոխության ժամանակ: Գտնված են, անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի առանց ոլորման կապակցությունը, որի վրա արտապատկերվում է ֆրենեի կապակցությունը պսևդոկապակցության պահպանմամբ, էքվիաֆինական լինի: Ապացուցված է նաև հետևյալը. որպեսզի ֆրենեի երկու տարածությունների արտապատկերումը մեկը մյուսի վրա լինի գեոդեզիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց միջին կապակցությունները համընկնեն: