ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

М.В. БЕЛУБЕКЯН

К ЗАДАЧЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ И УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ СТРУНЫ (МЕМБРАНЫ)

Известная задача движущейся между двумя опорами с постоянной скоростью струны [1,2] рассматривается при различных вариантах граничных условий. Исследуется также задача поперечных колебаний движущейся мембраны (шины), служащей для транспортировки электрического тока.

Установлены критические параметры, определяющие области неустойчивости дивергентного и флаттерного типов. Определены частоты устойчивых колебаний.

1. Рассматриваются поперечные колебания струны, движущейся в продольном направлении с постоянной скоростью U. Расстояние между неподвижными опорами струны равно l .

Уравнение колебаний струны в этом случае имеет вид

$$(c^2-U^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}, \tag{1.1}$$

где c – скорость распространения волн в струне при $U=0$.

Общее решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн следующее:

$$u=\left[c_1\exp\frac{i\omega x}{(1-\beta)c}+c_2\exp\frac{-i\omega x}{(1+\beta)c}\right]e^{i\omega t},\ \beta=\frac{U}{c}. \tag{1.2}$$

Впервые задача колебаний движущейся струны при граничных условиях

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{1.3}$$

исследовалась в [1–3]. Требование, чтобы решение (1.2) удовлетворяло условиям (1.3), приводит к определению частот поперечных колебаний

$$\omega_m=(1-\beta^2)c\mu_m,\ \ \mu_m=n\pi l^{-1},\ m=1,2,... \tag{1.4}$$

При этом решение (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), принимает вид

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}[A_m\exp i(\beta\mu_m x+\omega_m t)+B_m\exp i(\beta\mu_m x-\omega_m t)]\sin\mu_m x. \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что при $\beta^2=1$ $(\omega_n=0)$ имеет место неустойчивость дивергентного типа. В дальнейшем различные обобщения приведенной здесь задачи исследовались многими авторами, в частности [4,5].

Необходимо отметить, что задача (1.1), (1.3) при $U\neq 0$ приводится к несамосопряженной задаче о собственных значениях. Однако собственные значения (1.4) оказываются действительными. В этом смысле имеется аналогия с задачей обтекания мембраны сверхзвуковым потоком газа [6].

2. Пусть на опорах струны заданы граничные условия

$$u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0. \tag{2.1}$$

Подстановка (1.2) в граничные условия (2.1) и требование существования нетривиального решения приводят к следующему характеристическому уравнению:

$$\exp\frac{2i\omega l}{(1-\beta^2)c}=-\frac{1-\beta}{1+\beta}. \tag{2.2}$$

В отличие от предыдущей задачи уравнение (2.2) в общем случае имеет комплексные корни.

Представление частоты колебаний в виде

$$\omega=\omega_1+i\omega_2 \tag{2.3}$$

и разделение мнимой и действительной частей уравнения (2.2) приводят к следующей системе уравнений относительно ω_1, ω_2:

$$\cos\frac{2\omega_1 l}{(1-\beta^2)c}\exp\frac{-2\omega_2 l}{(1-\beta^2)c}=-\frac{1-\beta}{1+\beta}, \tag{2.4}$$

$$\sin\frac{2\omega_1 l}{(1-\beta^2)c}\exp\frac{-2\omega_2 l}{(1-\beta^2)c}=0.$$

Отсюда получается

$$\omega_1=\frac{n\pi}{2l}(1-\beta^2)c, \quad \exp\frac{-2\omega_2 l}{(1-\beta^2)c}+(-1)^n\frac{1-\beta}{1+\beta}=0, \quad n=1,2,\ldots \tag{2.5}$$

Рассмотрим вначале случай

$$-1<\beta<1. \tag{2.6}$$

При условии (2.6) из (2.5) следует, что система уравнений (2.4) не имеет решения, если $n=2m$. При $n=2m-1$ решение получается в виде

$$\omega_1=(1-\beta^2)c\frac{(2m-1)\pi}{2l}, \quad \omega_2=-(1-\beta^2)\frac{c}{2l}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что при $0\le\beta<1$ $\omega_2\ge 0$ $(\operatorname{Im}\omega\ge 0)$, и поэтому колебания устойчивы (затухающие колебания). Если же $-1<\beta<0$, то $\omega_2<0$ и имеет место неустойчивость флаттерного типа (абсолютная неустойчивость).

В случае $\beta>1$ из (2.6) получается, что решение системы (2.4) существует, если $n=2m$, т.е.

$$\omega_1=\frac{m\pi}{l}(\beta^2-1)c, \quad \omega_2=(\beta^2-1)\frac{c}{2l}\ln\frac{\beta-1}{\beta+1}<0. \tag{2.8}$$

Следовательно, при $\beta>1$ имеет место неустойчивость флаттерного типа.

Наконец, если $\beta<-1$, то

$$\omega_1=\frac{(2m-1)\pi}{2l}(\beta^2-1)c, \quad \omega_2=(\beta^2-1)\frac{c}{2l}\ln\frac{\beta-1}{\beta+1}>0 \tag{2.9}$$

и колебания устойчивы.

3. Рассмотрим задачу колебаний движущейся струны с периодическими и антипериодическими граничными условиями.

Предполагается, что даны периодические условия

$$u(0,t)=u(l,t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}. \tag{3.1}$$

Подстановка общего решения (1.2) в (3.1) приводит к характеристическому уравнению

$$\left[1-\exp\frac{i\omega l}{(1-\beta)c}\right]\left[1-\exp\frac{-i\omega l}{(1+\beta)c}\right]=0. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.1) имеет два спектра действительных корней:

$$\omega=2(1-\beta)c\mu_m, \qquad \omega=2(1+\beta)c\mu_m. \qquad (3.3)$$

При $\beta\to\pm1$ один спектр порождает решение типа дивергентной неустойчивости, а другой спектр – устойчивые колебания, т. е. в зависимости от вида начальных возмущений колебания могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Необходимо отметить, что условия (3.1) при $\beta=0$ приводят к самосопряженной задаче. Здесь при $\beta\neq0$ задача несамосопряженна. Тем не менее собственные значения оказываются действительными.

Аналогичные результаты получаются и в случае антипериодических граничных условий:

$$u(0,t)=-u(l,t), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=-\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}. \qquad (3.4)$$

При этом частоты колебаний определяются по формулам

$$\omega=\frac{(2m-1)\pi}{l}(1-\beta)c, \quad \omega=\frac{(2m-1)\pi}{l}(1+\beta)c. \qquad (3.5)$$

4. Уравнение поперечных колебаний движущейся токонесущей мембраны (ленты, шины) согласно [7] будет иметь вид

$$(c^2-U^2)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\gamma_0^2u=\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}, \qquad (4.1)$$

где $\gamma_0^2=4\pi\mu J_0^2(\rho c_0^2)^{-1}$ – плотность электрического тока, протекающего по направлению координатной линии $0x$, ρ – плотность, μ – магнитная проницаемость материала мембраны, c_0 – постоянная, равная скорости света в вакууме.

После представления решения уравнения (4.1) в виде

$$u=\varphi(x)\exp\frac{i\omega\beta x}{(1-\beta^2)c}e^{i\omega t} \qquad (4.2)$$

задача приводится к исследованию уравнения

$$\varphi''+\lambda^2\varphi=0, \quad \lambda^2=(1-\beta^2)^{-2}c^{-2}[\omega^2+\gamma_0^2(1-\beta^2)]. \qquad (4.3)$$

В случае граничных условий (1.3) из (4.2) следуют условия для функции φ

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0. \qquad (4.4)$$

Задача определения частот поперечных колебаний мембраны привелась к стандартной самосопряженной задаче определения собственных значений уравнения (4.3) с граничными условиями (4.4). После нахождения собственных значений (они действительные) частоты колебаний определяются по формуле

$$\omega_m^2=(1-\beta^2)[(1-\beta^2)c^2\mu_m^2-\gamma_0^2]. \qquad (4.5)$$

Пусть

$$\gamma_0^2<\mu_1^2c^2. \qquad (4.6)$$

Если

$$0\le\beta^2<1-\gamma_0^2(\mu_1c)^{-2}, \qquad (4.7)$$

то (4.5) определяет частоты устойчивых колебаний. Если $\beta^2 = 1 - \gamma_0^2(\mu_1 c)^{-2}$, то имеет место неустойчивость дивергентного типа $(\omega_1 = 0)$. Первая форма колебаний $(m = 1)$ становится стационарной, и имеют место колебания по остальным формам с частотами:

$$\omega_m = \mu_{m-1}\gamma_0^2\mu_1^{-1}c^{-1}. \tag{4.8}$$

Отсюда следует, что если начальные возмущения таковы, что первая форма не появляется, то колебания устойчивы.

В случае неравенства

$$1 - \gamma_0^2(\mu_1 c)^{-2} < \beta^2 < 1 - \gamma_0^2(\mu_2 c)^{-2} \tag{4.9}$$

первая форма колебания неограниченно возрастает по времени, и имеет место флаттерная неустойчивость.

Аналогичный анализ равенства (4.5) при условии (4.6) имеет место и для последующих форм колебаний при возрастании относительной скорости движения мембраны β.

Пусть теперь

$$\gamma_0^2 = \mu_1^2 c^2. \tag{4.10}$$

В этом случае для первой частоты получается, что

$$\omega_1^2 = -(1 - \beta^2)\beta^2 c^2 \mu_1^2. \tag{4.11}$$

Отсюда следует, что при $\beta = 0$ $(\omega_1 = 0)$ имеет место неустойчивость дивергентного типа, при $0 < \beta^2 < 1$ $(\omega_1^2 < 0)$ – неустойчивость флаттерного типа, при $\beta^2 = 1$ $(\omega_1 = 0)$ – неустойчивость дивергентного типа и при $\beta^2 > 1$ – устойчивые колебания.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 17.04.2000*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Archibald F.R., Emsile A.G.** The Vibration of String Having a Uniform Motion Along its Length.– Trans. of ASME, 1958, v. 80, p. 347–348.
2. **Swope R.D., Ames W.F.** Vibrations of a Moving Thread – Line. – Journ. of Franklin Inst., 1963, v. 275, p.36–55.
3. **Mote C.D.** Jr. A Study Of Band Saw Vibrations. – Journ. of Franklin Inst., 1965, v. 279, p. 430–444.
4. **Tan C.A., Ying S.** Dynamic Analisis of the Axially Moving String Based on Wave Propagation. Trans. of ASME. – Journ. of Applied Mechanics, 1997, v. 64, №2, p. 394–400.
5. **Асанян Д.Д.** Устойчивость движущейся токонесущей струны в магнитном поле. – Изв. НАН Армении, Механика, 1998, т. 51, №2, с. 56–62.
6. **Белубекян М.В.** О задаче колебаний мембраны в сверхзвуковом потоке газа. – Докл. АН Арм. ССР, 1978, т. LXVII, №2, с. 74–77.
7. **Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.** Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ер.: Изв. НАН Армении, 1992, 123 с.

Մ.Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԱՐԻ (ՄԵՄԲՐԱՆԻ) ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է երկու հենարանների միջև հաստատուն արագությունով շարժվող լարի խնդիրը տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Հետազոտվում է նաև շարժվող հոսանքատար մեմբրանի տատանումների խնդիրը:

Գտնված են կրիտիկական բնութագրիչները, որոնք որոշում են դիվերգենտ և ֆլատերային տիպի անկայունության տիրույթները: Հետազոտված են կայուն տատանումների հաճախությունների վարքը կախված շարժման արագությունից: