

УДК 523.854

М.Г. АБРАМЯН, С.В. АРУТՅՈՅՅԱՆ

### К МАРДЖИНАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО КОЛЬЦА

Исследуется устойчивость самогравитирующего несжимаемого кольца большого радиуса (малой кривизны) в точке марджинальной устойчивости бесконечного цилиндра. Расчеты проведены в первом приближении по малому параметру, связанному с кривизной кольца. Показано, что в рассматриваемой области кольцо устойчиво.

Задача равновесия и устойчивости несжимаемых фигур равновесия (слоя и цилиндра) рассматривалась еще в работах [1,2]. Там же, в частности, получено дисперсионное уравнение бесконечного цилиндра в виде

$$\omega^2 = \frac{4\pi G \rho k a I_1(ka)}{I_0(ka)} \left[ \frac{1}{2} - I_0(ka) K_0(ka) \right].$$

Здесь  $\omega$  – частота возмущений,  $k$  – волновое число,  $\rho$  – плотность цилиндра,  $a$  – его радиус. Через  $I_i$  и  $K_i$  обозначены функции Бесселя мнимого аргумента. При  $ka \approx 1.07$   $\omega^2 \approx 0$ , и цилиндр марджинально устойчив.

Большой интерес представляет также динамика гравитирующего кольца в связи с ее достаточно широкими приложениями в астрономии. В работах [3,4] рассматривается равновесие вращающихся политропных цилиндров и колец (последний имеет в центре притягивающее тело) и выводятся выражения для равновесных распределений давления, плотности, гравитационного потенциала и вытекающего отсюда значения угловой скорости вращения. В этих работах наличие некоего малого параметра  $\beta$  является существенным, и решения получаются в виде разложения по этому параметру. В нулевом приближении по этому параметру кольцо вырождается в бесконечный цилиндр.

Устойчивость политропных торов без учета их самогравитации исследовалась в работах [5–7] и была установлена их динамическая неустойчивость.

В настоящей работе рассматривается устойчивость тонкого, жидкого вращающегося самогравитирующего кольца в первом приближении по параметру  $\beta$ , введенному в [4] около точки марджинальной устойчивости бесконечного цилиндра.

Начало декартовой системы координат помещено в центре кольца. Используется система координат  $(r, \phi, \theta)$ , которая связана с декартовой по формулам

$$x = (R + r \cos \phi) \cos \theta; \quad y = (R + r \cos \phi) \sin \theta; \quad z = r \sin \phi. \quad (1)$$

Здесь  $R$  – радиус кольца. Следуя работе [4], введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{r}{a}, \beta = \frac{\alpha}{R}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – параметр, имеющий размерность длины, который в случае несжимаемой жидкости равен  $a/2$  ( $a$  – малый радиус кольца). Будем считать, что  $\beta \ll 1$  и в центре кольца имеется гравитирующее тело, вокруг которого вращается кольцо. Равновесное давление внутри кольца определяется формулой [4]

$$P_0 = P_c [\theta(\xi) + \beta f_1(\xi) \cos \phi], \quad (3)$$

где

$$P_c = \pi G \rho^2 a^2; \theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4}; f_1(\xi) = -\frac{\xi}{4} + \frac{\xi^3}{16}. \quad (4)$$

Угловая скорость связана с равновесными давлением и самогравитацией. Она является величиной второго порядка малости по  $\beta$ :

$$\omega = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = \beta^2 [|\xi_1 \theta'(\xi_1)| \left( \ln \frac{8}{\beta \xi_1} + 2\eta - \frac{3}{2} \right) + \frac{f_1(\xi_1)}{\xi_1} + f_1'(\xi_1)]. \quad (5)$$

Здесь  $\xi_1 = 2$  – безразмерный радиус кольца,  $\eta = \pi \frac{M_c}{M_r}$ , где  $M_r$  – масса кольца, а  $M_c$  – масса центрального тела.

Исследуем малые колебания кольца. Предположим, что поверхность кольца подверглась возмущению вида

$$r = a + \zeta_r \exp i(k\theta R + \omega t). \quad (6)$$

Малые возмущения параметров кольца зададим в виде

$$f(r, \phi, \theta, t) = f(r, \phi) \exp i(k\theta R + \omega t), \quad (7)$$

причем будем считать, что  $kR \gg \beta$ .

Функцию  $f(r, \phi)$  в первом порядке по параметру  $\beta$  представим в виде

$$f(r, \phi) = f_0(r) + \beta f_1(r) \cos \phi. \quad (8)$$

Вектор смещения жидкости  $\vec{\zeta}$  удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \vec{\zeta} = 0.$$

Вводя потенциал  $\varphi$  для вектора  $\vec{\zeta}$  ( $\vec{\zeta} = \operatorname{grad} \varphi$ ), получим

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (9)$$

Следующим уравнением задачи является возмущенное уравнение Пуассона, которое в данном случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (10)$$

где  $\psi$  – возмущение потенциала самогравитации кольца. Возмущение давления находим из уравнения движения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \varphi = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nabla \psi. \quad (11)$$

К системе уравнений (9)–(11) должны быть добавлены граничные условия, выражающие а) непрерывность гравитационного потенциала, б) скачок нормальной производной гравитационного потенциала на равновесной поверхности кольца [1,2] и в) равенство нулю лагранжевого возмущения давления на равновесной поверхности кольца:

$$\begin{cases} \psi^i = \psi^e; \\ \frac{\partial \psi^i}{\partial r} - \frac{\partial \psi^e}{\partial r} = 4\pi G \rho \zeta_r; \\ P + \zeta_r \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Величины с индексами  $i$  и  $e$  относятся к областям внутри и вне кольца соответственно.

Имея в виду, что в выбранной системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1+2(r/R)\cos\phi}{1+(r/R)\cos\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\sin^2\phi}{1+(r/R)\cos\phi} \frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{[1+(r/R)\cos\phi]^2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (13)$$

и представив оператор  $\nabla^2$  в виде  $\nabla_0^2 + \beta \nabla_1^2$ , получим систему уравнений для  $\psi_0$  и  $\psi_1$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \phi^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \phi^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = -\cos\phi \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + \frac{\sin\phi}{\xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 2\beta^2 \xi \cos\phi \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Внутри кольца для потенциала  $\psi_0^i$  из (14) и (7) будем иметь решение

$$\psi_0^i = C_0 I_0(k\alpha\xi) \exp(ikR\theta), \quad (15)$$

а вне –

$$\psi_0^e = C'_0 K_0(k\alpha\xi) \exp(ikR\theta). \quad (16)$$

Подставляя (15) во второе уравнение (14) и принимая во внимание (7), для  $\psi_1^i$  будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi_1^i}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_1^i}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \psi_1^i - k^2 \alpha^2 \psi_1^i = -C_0 k \alpha I_1(k\alpha\xi) - 2C_0 \alpha^2 k^2 \xi I_0(k\alpha\xi), \quad (17)$$

общее решение которого после некоторых преобразований принимает вид с учетом,

что вронскиан уравнения равен  $W = I_1 \frac{dK_1}{d\xi} - K_1 \frac{dI_1}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}$ ,

$$\psi_1^i = C_1 I_1(k\alpha\xi) + \frac{C_0}{2k\alpha} [k\alpha\xi I_1'(k\alpha\xi) - I_1(k\alpha\xi) - k^2 \alpha^2 \xi^2 I_1(k\alpha\xi)] \quad (18)$$

(производная берется по аргументу функции).

Для гравитационного потенциала вне кольца уравнение Пуассона в рассматриваемом приближении выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \psi_1^e}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_1^e}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \psi_1^e - k^2 \alpha^2 \psi_1^e = C'_0 k \alpha K_1(k\alpha\xi) - 2C'_0 \alpha^2 k^2 \xi K_0(k\alpha\xi). \quad (19)$$

После преобразований получаем следующее общее решение этого уравнения:

$$\psi_1^e = C'_1 K_1(k\alpha\xi) + \frac{C'_0}{2k\alpha} [-k\alpha\xi K_1'(k\alpha\xi) - K_1(k\alpha\xi) - k^2 \alpha^2 \xi^2 K_1(k\alpha\xi)]. \quad (20)$$

Решив уравнение (9) с учетом (6)

$$\varphi = \frac{A_0}{2k\alpha} [k\alpha\xi I_1'(k\alpha\xi) - I_1(k\alpha\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 I_1(k\alpha\xi)] \beta \cos\phi, \quad (21)$$

получаем амплитуду смещения

$$\zeta_r = \frac{A_0}{2\alpha} \left[ \frac{2I_1(k\alpha\xi)}{k\alpha\xi} - I_0(k\alpha\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 I_0(k\alpha\xi) \right] \beta \cos\phi. \quad (22)$$

Из граничных условий (12) и уравнения (11) получаем выраженные через  $A_0$  постоянные  $C_0, C'_0, C_1, C'_1$ :

$$\begin{aligned} C_0 &= 4\pi G\rho x I_1 K_0 A_0; \\ C_1 &= -\frac{4\Omega^2(xK_0 I_1 - 1)}{x(I_0 + K_0 I_1)} \left[ \frac{2I_1}{x} - (1+x^2)I_0 \right] A_0 - \\ &\quad - \frac{4\Omega^2 K_0 I_1 (K_1 + xK_0)}{x^2 K_1 (I_0 + K_0 I_1)} \left[ \frac{x^2 K_1 I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1 \right] A_0; \\ C'_0 &= C_0 \frac{I_0}{K_0}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$C'_1 = \frac{C_0}{xK_0} \left[ \frac{x^2 K_1 I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1 \right] + \frac{C_1 I_0}{K_0}.$$

Здесь аргументом бесселовых функций является  $x = ka$ . Дисперсионное уравнение получим, пользуясь третьим из граничных условий (12):

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} = -4xI_1 K_0 + f_3(x) \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{x^2 I_1}{f_2(x)} + \frac{f_4(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1(x)}{f_2(x)}, \quad (24)$$

где

$$\Omega^2 = \pi G\rho; \quad (25)$$

$$f_1(x) = \frac{2I_1}{x} - (1+x^2)I_0; \quad (26)$$

$$g_1(x) = 4x^2 I_1^2 I_0 K_1 [(1+x^2)K_0 - 2xK_1]; \quad (27)$$

$$f_2(x) = xI_0 - (2+x^2)I_1; \quad (28)$$

$$f_3(x) = 2x[1 + 2I_1 K_1 (xK_0 I_1 - 1)]; \quad (29)$$

$$f_4(x) = 4xK_0 I_1^2 (K_1 + xK_0) \left[ \frac{x^2 K_1 I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1 \right]. \quad (30)$$

В точке маргинальной стабильности бесконечного цилиндра ( $ka = 1.0667$ ) получаем  $\omega^2 \approx 2.72\Omega^2$ . Это свидетельствует о том, что кольцо устойчиво относительно рассматриваемого нами типа возмущений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Оганесян Р.С.** – Астрон. ж., 1960, т. 37, с. 458.
2. **Оганесян Р.С.** – Астрон. ж., 1956, т. 33, с. 928.
3. **Ostriker J.** – Astrophys. J., 1964, v. 140, p. 1056.
4. **Ostriker J.** – Astrophys. J., 1964, v. 140, p. 1067.
5. **Papaloizou J.C.B. and Pringle J.E.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1984, v. 208, p. 721.
6. **Papaloizou J.C.B. and Pringle J.E.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1985, v. 208, p. 721.
7. **Goldreich P., Goodman J. and Ramesh N.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1986, v. 221, p. 339.

Մ.Գ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ս.Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԻՆՔՆԱԳՐԱՎԻՏԱՑՎՈՂ ՕՂԱԿԻ ԵԶՐԱՅԻՆ  
ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Ուսումնասիրված է մեծ շառավղով (փոքր կորությանը) ինքնագրավիտացվող անսեղմելի օղակի կայունությունը անվերջ գլանի մալթինալ կայունության կետում: Հաշվարկը կատարված է ըստ փոքր պարամետրի առաջին մոտավորությամբ, որը կապված է օղակի կորության հետ: Ցույց է տրված, որ օղակը կայուն է այդ կետի շրջակայքում: