УДК 512.57

И.Р. СИМОНЯН

СОЛИДНЫЕ ДИСТРИБУТИВНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП

Многообразие полугрупп называется солидным, если любое тождество этого многообразия является сверхтождеством. В этой работе были найдены необходимые и достаточные условия, при которых многообразие полугрупп будет солидным и дистрибутивным.

Пусть $X = \{x_1, x_2, ...\}$ – счетный бесконечный алфавит. S – свободная полугруппа, определенная над алфавитом X, тогда слово $\bar{s} = x_{i_n} x_{i_{n-1}} ... x_{i_1} \in S$ называется зеркальным отображением слова s. Введем следующие обозначения: $h(s) = x_{i_1}$, $t(s) = x_{i_n}$; $c(s) = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m}\}$ – множество всех переменных, входящих в S. Через $l(s)$ обозначим длину слова s.

Тождество многообразия полугрупп называется сверхтождеством, если оно остается тождеством при подстановке любого терма этого многообразия [1].

Многообразие полугрупп называется солидным, если любое тождество этого многообразия является сверхтождеством.

Многообразие полугрупп называется сверхассоциативным, если в нем выполняется сверхтождество ассоциативности ранга 1 $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$.

Многообразие полугрупп называется дистрибутивным, если в нем выполняются тождества дистрибутивности $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$.

Многообразие всех сверхассоциативных полугрупп обозначим через V_H.

В работе [2] V_H определяется следующим образом:

$$V_H = Mod\{(xy)z = x(yz),\ x^4 = x^2,\ xyxzxyx = xyzyx,$$
$$x^2yx^2yz = x^2y^2z,\ xyz^2yz^2 = xy^2z^2\}.$$

Найдем необходимые и достаточные условия, при которых произвольное многообразие поугрупп будет дистрибутивным и солидным.

Лемма. Если в многообразии полугрупп V выполняются тождества дистрибутивности $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$, тогда в нем $x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} ... x_{i_{n-1}}^{k_{n-1}} x_{i_n}^{k_n} = x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_{m-1}} x_{j_m}$, где все x_{j_k}, $k = \overline{1, m}$ различны, и если $x_{i_1} = x_{i_n}$, тогда $x_{j_1} = x_{j_m}$.

Доказательство. Легко видеть, что из $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$ следует, что x^2yz, xy^2z, xyz^2 равны xyz.

$x^2yz = \underline{xxyz} = \underline{xzxyz} = xzyz = xyz$, $xy^2z = \underline{xyyz} = \underline{xyxyz} = xyxz = xyz$. Для xyz^2 доказательство симметрично x^2yz. Используя эти 3 тождества, получим

$x_{i_1}^{k_1} x_{i_2}^{k_2} \dots x_{i_{n-1}}^{k_{n-1}} x_{i_n}^{k_n} = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$.. Теперь предположим, что $x_{i_k} = x_{i_1}$, $l \neq k$ (исключим случай, когда $k = 1$, $l = n$):

$$x_{i_1} \dots x_{i_{l-1}} \underline{x_{i_1} (x_{i_{l+1}} \dots x_{i_{k-1}}) x_{i_1} (x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n})} = x_{i_1} \dots x_{i_{l-1}} x_{i_l} x_{i_{l+1}} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} \text{ или}$$

$$\underline{(x_{i_1} \dots x_{i_{l-1}}) x_{i_1} (x_{i_{l+1}} \dots x_{i_{k-1}}) x_{i_1}} x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = x_{i_1} \dots x_{i_{l-1}} x_{i_{l+1}} \dots x_{i_{k-1}} x_{i_l} x_{k+1} .. x_{i_n} .$$

Действуя таким образом, мы получим $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}$, где все переменные различны. Если $x_{i_1} = x_{i_n}$, тогда $x_{j_1} = x_{j_m}$.

Следствие. Пусть в V выполняются тождества $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$. Пусть $u, v \in S$, $h(u) = h(v)$, $t(u) = t(v)$, $c(u) = c(v) \geq 3$. Тогда в V выполняется тождество $u = v$.

Доказательство. Из тождеств $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$ можно получить тождество медиальности $xyzu = xzyu$:

$$xyzu = x\underline{y(zx)u} = \underline{xy(zx)}yu = \underline{xzxyu} = xzyu .$$

Преобразуем слова u, v согласно лемме. Далее, учитывая, что $h(u) = h(v)$, $t(u) = t(v)$, $c(u) = c(v)$ и предположив, что $l(u)$, $l(v) > 3$, мы можем воспользоваться тождеством медиальности, откуда легко получим, что $u = v$. Теперь предположим, что $l(u) = 3, l(v) > 3$ (случай, когда $l(u) > 3, l(v) = 3$ доказывается аналогично). Если $h(u) = x, t(u) = z, c(u) = \{x, y, z\}$, тогда $u = xyz$. Так как $c(v) = \{x, y, z\}$, то, преобразовав слово v согласно лемме, получим, что $v = xyz$, т. е. $u = v$.

Теорема. Пусть V – нетривиальное многообразие полугрупп. V будет дистрибутивно и солидно тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

(1) $V \subseteq V_H$,

(2) $V \models u = v$ влечет $h(u) = h(v)$,

(3) $V \models u = v$ влечет $t(u) = t(v)$,

(4) $V \models u = v$ влечет $\bar{u} = \bar{v}$,

(5) либо $V \models x = x^2$, либо $Y_z \subseteq V$, где $Y_z = \{xy = zu\}$,

(6) если $u, v \in S$, $h(u) = h(v)$, $t(u) = t(v)$, $c(u) = c(v) \geq 3$, тогда $V \models u = v$.

Доказательство. Пусть V дистрибутивно и солидно. Выполнимость (1)–(5) доказана в работе [3]. Условие (6) следует из следствия. Теперь предположим выполнимость условий (1)–(6). Из условий (1)–(5) следует, что V солидно. Из условия (6) следует выполнимость тождеств $xyz = xyxz$, $xyz = xzyz$.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 18.05.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М** Сверхтождества в алгебрах и многообразиях. – Успехи математических наук, 1998, т. 53, вып. 1(319), с. 61–114.
2. **Polak L.** On hyperassociativity. – Algebra Universalis. 1996, v. 36, p. 363–378.
3. **Polak L.** All solid varieties of semigroup. – Journal of Algebra, 1999, v. 219, p. 421–436.

Ի.Ռ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՍՈԼԻԴ ԲԱՇԽԱԿԱՆ ԿԻՍԱԽՄԲԵՐԻ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ամփոփում

Կիսախմբերի բազմաձևությունը կոչվում է սոլիդ, եթե այդ բազմաձևության կամայական նույնությունը հանդիսանում է գերնույնություն: Այս աշխատանքում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմանները, որոնց դեպքում կիսախմբերի բազմաձևությունը սոլիդ է և բաշխական: