

УДК 515.1

Н.Э. МИРЗАХАНИЯН

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ПСЕВДОРАДИАЛЬНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В статье рассматривается вопрос псевдорadiaльности топологически однородных пространств со свойством Бэра, являющихся непрерывными образами σ -компактных топологических групп, в частности свободных топологических групп компактов.

Полученные результаты применимы при решении более специального и естественно-го вопроса: какими свойствами обладают топологически однородные пространства со свойством Бэра, на которых непрерывно и транзитивно действует σ -компактная группа?

Топологическая группа G называется σ -компактной, если она представима в виде объединения счетного семейства компактных подпространств.

Пространство X называется топологически однородным, если для любых $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \rightarrow X$, такой, что $f(x) = y$ и $f(X) = X$.

Все пространства предполагаются тихоновскими.

Мы пользуемся терминологией из [1].

Через $F(X)$ обозначаем свободную топологическую группу пространства X [2].

Определение [1]. Пространство называется псевдорadiaльным, если для любого незамкнутого множества A в X найдутся $x \in [A]$ и линейно упорядоченное отношение включения семейство ξ множеств со следующими свойствами:

1) $\Omega\xi = \{x\}$; 2) $P \cap A \neq \emptyset$ для всех $P \in \xi$; 3) для любой окрестности Ox точки x в X найдется $P \in \xi$ такое, что $x \in P \subset Ox$.

Язык кардинальных инвариантов позволяет выразить следующую существенную особенность строения псевдорadiaльных пространств. А.В. Архангельский доказал [1], что пространство X псевдорadiaльно, если и только если для всякого незамкнутого в X множества A найдутся множество $B \subset A$ регулярной мощности и точка $x \in X \setminus A$ – такие, что $|B \setminus Ox| < |B|$ для каждой окрестности Ox точки x .

Теорема 1. Пусть $Y = U\{K_n : n \in N\}$, где каждое K_n псевдорadiaльно и выполняется следующее условие: если $A \subset Y$ и $A \cap K_n$ замкнуты в Y при всех $n \in N$, то и все множество A замкнуто в Y . Тогда Y псевдорadiaльно.

Доказательство. Пусть A не замкнуто в Y . Тогда существует $n_0 \in N$ такое, что $A \cap K_{n_0} = A_{n_0}$ не замкнуто в K_{n_0} . Так как K_{n_0} псевдорadiaльно, то существуют подмножество $B \subset A_{n_0}$ регулярной мощности и точка $x \in K_{n_0} \setminus A_{n_0}$ – такие,

что $|B \setminus Ux| < |B|$ для каждой окрестности Ux точки x в K_{n_0} . Пусть Ox – произвольная окрестность точки x в Y . Пусть $Ux = Ox \cap K_{n_0}$. Тогда Ux – окрестность точки x в K_{n_0} . Из $Ux \subset Ox$ следует, что $B \setminus Ox \subset B \setminus Ux$. Следовательно, $|B \setminus Ox| \leq |B \setminus Ux| < |B|$. Таким образом пространство Y псевдорадiallyно.

Теорема доказана.

Предложение. Свободная топологическая группа $F(X)$ линейно упорядоченного компакта X является псевдорадiallyным пространством.

Доказательство. Для каждого $n \in N$ определим отображение $\varphi_n : X^n \rightarrow F(X)$ следующим образом: $\varphi_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$. Пусть $F_n = \varphi_n(X^n)$. Согласно теореме Чертанова, X^n псевдорадiallyно для каждого $n \in N$. Так как X – компакт, то из незамкнутости A в $F(X)$ следует, что существует $n_0 \in N$ такое, что $A_{n_0} = A \cap F_{n_0}$ не замкнуто в F_{n_0} . Таким образом, выполняются все условия предыдущей теоремы 1. Поэтому можно утверждать, что псевдорадiallyно также пространство $F(X)$.

Предложение доказано.

Теорема 2. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом топологической группы G , порожденной (алгебраически) линейно упорядоченным компактом X . Тогда пространство Y псевдорадiallyно.

Доказательство. Пусть $f : G \rightarrow Y$, где G – топологическая группа, порожденная упорядоченным компактом X . Для каждого $n \in N$ $f_n : X^n \rightarrow G$, определяемое формулой $f_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$, непрерывно. Пусть $G_n = f_n(X^n)$. G_n псевдорадiallyно и компактно для каждого n . Ясно, что $Y = Uf(G_n)$. Так как пространство Y – бэровское, то существуют непустое U и $n_0 \in N$ такие, что $[U] \subset f(G_{n_0})$. Отсюда следует, что существуют точка $y_0 \in Y$ и окрестность U такие, что U_{y_0} псевдорадiallyно. Так как Y однородно, то Y^{y_0} псевдорадiallyно.

Следствие. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом пространства $F(X)$, где X – линейно упорядоченный компакт.

Тогда пространство Y псевдорадiallyно.

Кафедра алгебры и геометрии

Поступило 09.11.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. – УМН, М., 1978, т. 33, №6, с. 19–84.
2. Архангельский А.В. Классы топологических групп. – УМН, М., 1981, т. 36, с. 127–146.

ՏՈՊՈՒՆՈՒԿԻԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊՍԵՎԴՈՌԱԴԻԱԼՈՒԹՅԱՆ
ՈՐՈՇ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո մ

Հորվածում դիտարկվում է տոպոլոգիապես համասեռ, Բեռլի հատկությունով օժտված այն տարածությունների պսևդոդադիալության հարցը, ոյունք նաև σ -կոմպակտ տոպոլոգիական խմբերի, մասնավորապես, կոմպակտների ազատ տոպոլոգիական խմբերի պատկերներն են:

Ստացված այսյունքները օգտագործվում են հետևյալ ավելի բնական և հատուկ հարցի լուծման ընթացքում. ինչպիսի՞ հատկություններով են օժտված տոպոլոգիապես համասեռ, Բեռլի հատկությունով օժտված տարածությունները, որոնց վրա անընդհատ և տրանզիտիվ գործում է σ -կոմպակտ խումբը: