Բնական գիտություններ 1, 2002 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

А. В. ЦУЦУЛЯН

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В статье исследуется разрешимость краевых задач для квазилинейных эволюционных уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в двух направлениях с разными весовыми показателями. Устанавливается их однозначная разрешимость в специальным образом построенных весовых функциональных пространствах.

Пусть Ω – ограниченная область евклидова пространства R^n с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega = \Omega_0 \times (0, b)$, $\Gamma = \Gamma^* \cup \Omega_0 \cup \Omega_b$, $\Omega_0 \subset R^{n-1}$, $\Gamma^* = \partial\Omega_0 \times (0, b)$.

Для нелинейного вырождающегося уравнения порядка $2m$ $(m \geq 1)$ вида

$$L(u) = \sum_{|\sigma|\leq m} (-1)^{|\sigma|} D^\sigma A_\sigma(x, D^\gamma u) = f(x); |\gamma| \leq m, x \in \Omega, \tag{0.1}$$

рассмотрим следующую краевую задачу:

$$D^s u\big|_{\Omega_0} = 0;\ s = 0,1,\dots,s_\alpha - 1 : D^s u\big|_{\Omega_b} = 0;\ s = 0,1,\dots,s_\beta - 1, \tag{0.2}$$

$$D^\sigma u\big|_{\Gamma^*} = 0;\ |\sigma| \leq m - 1,$$

где σ и γ – мультииндексы, $x^* = (x_1,\dots,x_{n-1})$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, а числа s_α, s_β зависят от характера вырождения и будут определены ниже.

Функции $A_\sigma(x, \xi_\gamma)$ нелинейны и зависят, вообще говоря, от всех ξ_γ с $|\gamma| \leq m$. Ниже будут приведены условия на коэффиценты $A_\sigma(x, \xi_\gamma)$ уравнения (0.1).

Задача (0.1)–(0.2) в случае вырождения символа лишь при $x_n = 0$ (на Ω_0) решена в [1].

§1. Функциональные пространства и классы операторов. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0$. Обозначим через $W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ весовой класс функций $u(x)$, определенных на Ω, для которых конечна норма

$$\|u\|^p = \left|u, W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right|^p = \sum_{|\sigma|\leq m} \int_\Omega x_n^\alpha (b - x_n)^\beta \left|D^\sigma u\right|^p dx. \tag{1.1}$$

Класс $W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ является банаховым пространством с нормой (1.1) (см. [2]).

Через $\dot{W}^m_{p\alpha.\beta}(\Omega)$ обозначим замыкание по норме $W^m_{p\alpha.\beta}(\Omega)$ линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Опишем теперь класс рассматриваемых операторов.

i) Функции

$$A_\sigma(x,\xi_\gamma)\in C^1(\overline{\Omega}\times R^n);|\sigma|\le m;|\gamma|\le m;p>2;$$
$$\alpha\ge 0;\beta\ge 0;\alpha\ne kp-1;\beta\ne kp-1;\ k=1,...,m,$$

при этом справедливы следующие оценки:

$$\left|A_\sigma(x,\xi_\gamma)\right|\le c_1\sum_{|\gamma|\le m}x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|\xi_\gamma\right|^{p-1}, \tag{1.2}$$

$$\left|\frac{\partial A_\sigma}{\partial \xi_\gamma}\right|\le c_2\sum_{|\gamma|\le m}x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|\xi_\gamma\right|^{p-2}, \tag{1.3}$$

где $c_1,c_2>0$ – некоторые постоянные.

ii) Существуют постоянные $\mu_i>0,\ i=0,1,2$, такие, что для любых $x\in\Omega,\xi\in R^n$ справедливы оценки:

$$\mu_0x_n^\alpha(b-x_n)^\beta|\xi|^p\le\sum_{|\sigma|\le m}A_\sigma(x,\xi_\gamma)\xi_\sigma\le\mu_1x_n^\alpha(b-x_n)^\beta|\xi|^p,|\gamma|\le m, \tag{1.4}$$

$$\sum_{|\sigma|.|\gamma|\le m}\frac{\partial A_\sigma}{\partial\xi_\gamma}\xi_\sigma\xi_\gamma\ge\mu_2\sum_{|\gamma|\le m}x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|\xi_\gamma\right|^p. \tag{1.5}$$

Для выявления структуры пространств $W^m_{p\alpha.\beta}(\Omega)$ установим следующее

Предложение 1. Для элементов $u(x)\in W^m_{p\alpha.\beta}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\left|D^{m-k}u(x),L_p(\Omega_0)\right|^p\le cx_n^{kp-1-\alpha}(b-x_n)^{kp-1-\beta}\left|u(x),W^m_{p.\alpha,\beta}(\Omega)\right|^p;k=1,2,...,m. \tag{1.6}$$

Доказательство. Сначала докажем (1.6) для $k=1$. В силу плотности $\dot{C}^m$ (класс финитных, m раз непрерывно дифференцируемых функций) в $W^m_{p.\alpha,\beta}(\Omega)$ неравенство (1.6) достаточно доказать при $u\in\dot{C}^m$. Отметим (см. [2]), что для любого $u(x)\in W^m_{p\alpha.\beta}(\Omega)$ существуют постоянные $c_1,c_2>0$, такие, что

$$\begin{gathered}c_1\left|u,W^m_{p.\alpha.\beta}(\Omega)\right|^p\le\left|u,W^m_{p.\alpha.0}(\Omega_0\times(0,b/2))\right|^p+\\+\left|u,W^m_{p.0.\beta}(\Omega_0\times(b/2,b))\right|^p\le c_2\left|u,W^m_{p.\alpha.\beta}(\Omega)\right|^p.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Теперь оценим $\left|D^{m-1}u\right|^p$ по отдельности для $x_n\in(0,b/2)$ и $x_n\in(b/2,b)$.

Пусть $x_n\in(0,b/2)$ и $\alpha<p-1$. Тогда можем записать

$$\left|D^{m-1}u\right|^p=\left|\int_0^{x_n}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p=\left|\int_0^{x_n}\tau^{-\alpha/p}\tau^{\alpha/p}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p\le$$
$$\le\left[\int_0^{x_n}\tau^{-\alpha q/p}d\tau\right]^{p/q}\int_0^{x_n}\tau^\alpha\left|D^mu\right|^pd\tau.$$

Теперь, интегрируя обе части неравенства по Ω, получим

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-1}u\right|^p dx^* \le cx_n^{p-1-\alpha}\int_{\Omega_0}\int_0^{x_n}\tau^\alpha\left|D^m u\right|^p d\tau dx^* \le cx_n^{p-1-\alpha}\left|u, W^m_{p,\alpha,0}(\Omega_0\times(0,b/2))\right|^p.$$

Пусть теперь $\alpha > p-1$. Тогда имеет место равенство

$$D^{m-1}u = D^{m-1}u(x^*, b/2) - \int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau. \tag{1.8}$$

Умножая это равенство на $x_n^{\alpha/p}$ и интегрируя по x_n от 0 до $b/2$, получим

$$\frac{1}{p}\int_0^{b/2}\left|D^{m-1}u(x^*, b/2)x_n^{\alpha/p}\right|^p dx_n \le \int_0^{b/2}\left[\left|x_n^{\alpha/p}D^{m-1}u\right|^p + x_n^{\alpha/p}\left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p\right]dx_n.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, можем записать

$$\int_0^{b/2}x_n^{\alpha/p}\left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p dx_n \le \int_0^{b/2}x_n^{\alpha/p}dx_n\left[\int_{x_n}^{b/2}\tau^{-q\alpha/p}d\tau\right]^{p/q}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau.$$

С другой стороны,

$$\left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p \le \left[\int_{x_n}^{b/2}\tau^{-q\alpha/p}d\tau\right]^{p/q}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau \le cx_n^{p-1-\alpha}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau.$$

После этого из (1.8) получаем

$$\left|D^{m-1}u\right|^p \le p\left(\left|D^{m-1}u(x^*, b/2)\right|^p + \left|\int_{x_n}^{b/2}\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p\right)$$

и, следовательно, имея в виду условие $a > p-1$, получим

$$\left|D^{m-1}u\right|^p \le cx_n^{p-1-\alpha}\int_{x_n}^{b/2}\tau^\alpha\left|\frac{\partial D^{m-1}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}\right|^p d\tau. \tag{1.9}$$

Теперь, интегрируя обе части неравенства (1.9) по Ω_0, имеем

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-1}u\right|^p dx^* \le cx_n^{p-1-\alpha}\left|u, W^m_{p,\alpha,0}(\Omega_0\times(0, b/2))\right|^p. \tag{1.10}$$

Таким образом, мы доказали, что при любых $\alpha \ge 0, \alpha \ne p-1$ справедливо неравенство (1.8). Аналогичными рассуждениями при $x_n \in (b/2, b)$ доказывается, что

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-1}u\right|^p dx^* \le c(b-x_n)^{p-1-\beta}\left|u, W^m_{p,0,\beta}\left(\Omega_0\times\left(b/2, b\right)\right)\right|^p. \tag{1.11}$$

Теперь, используя (1.7), (1.10), (1.11), получим неравенство (1.6) при $k=1$.

Пусть теперь $k=2$. Сначала оценим $\left|D^{m-2}u\right|^p$ для $x_n \in (0, b/2)$ и $a < 2p-1$. Тогда можем записать

$$\left|D^{m-2}u\right|^p = \left|\int_0^{x_n}\frac{\partial D^{m-2}u(x^*,\tau)}{\partial\tau}d\tau\right|^p \le \left[\int_0^{x_n}\tau^{-q\alpha/p}d\tau\right]^{p/q}\int_0^{x_n}\tau^\alpha\left|D^{m-1}u\right|^p d\tau \le$$

$$\le cx_n^{p-1-\alpha}\int_0^{x_n}\tau^{p-1}\int_0^{x_n}\tau^\alpha\left|D^m u\right|^p d\tau d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\left|D^{m-2}u\right|^p \le cx_n^{p-1-\alpha}\int_0^{x_n}\tau^{p-1}d\tau\int_0^{x_n}\tau^{\alpha}\left|D^m u\right|^p d\tau = cx_n^{2p-1-\alpha}\int_0^{x_n}\tau^{\alpha}\left|D^m u\right|^p d\tau.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по Ω_0, получим

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-2}u\right|^p dx^* \le cx_n^{2p-1-\alpha}\int_{\Omega_0}\int_0^{b/2}\tau^{\alpha}\left|D^m u\right|^p d\tau dx^* \le cx_n^{2p-1-\alpha}\left|u, W^m_{p,\alpha,0}(\Omega_0\times(0, b/2))\right|^p. \quad (1.12)$$

Пусть теперь $a > 2p-1$. Тогда, проводя аналогичные рассуждения, как при $k=1$, получим

$$\left|D^{m-2}u\right|^p \le cx_n^{p-1-\alpha}\int_{x_n}^{b/2}\tau^{\alpha}\left|D^{m-1}u\right|^p d\tau.$$

Теперь, используя неравенство (1.9), имеем

$$\left|D^{m-2}u\right|^p \le cx_n^{2p-1-\alpha}\int_{x_n}^{b/2}\tau^{\alpha}\left|D^m u\right|^p d\tau. \quad (1.13)$$

Интегрируя неравенство (1.13) по Ω_0, приходим к оценке

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-2}u\right|^p dx^* \le cx_n^{2p-1-\alpha}\left|u, W^m_{p,\alpha,0}\left(\Omega_0\times\left(0, b/2\right)\right)\right|^p. \quad (1.14)$$

Таким образом, мы доказали, что при любых $\alpha \ge 0, \alpha \ne 2p-1$ справедливо неравенство (1.14). Аналогичными рассуждениями при $x_n \in \left(b/2, b\right)$ получаем

$$\int_{\Omega_0}\left|D^{m-2}u\right|^p dx^* \le c(b-x_n)^{2p-1-\beta}\left|u, W^m_{p,0,\beta}\left(\Omega_0\times\left(b/2, b\right)\right)\right|^p. \quad (1.15)$$

Используя теперь (1.7), (1.14), (1.15), получаем неравенство (1.6) при $k=2$. По индукции доказывается неравенство (1.6) при $k=3,4,\dots,m$.

Доказательство завершено.

Следствие 1. Если $1-\frac{1}{p}\le\frac{\alpha}{p}\le m-\frac{1}{p}$, $1-\frac{1}{p}\le\frac{\beta}{p}\le m-\frac{1}{p}$ и $\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{p};\frac{\beta}{p}+\frac{1}{p}$ не равны ни одному из чисел $1,2,\dots,m$, то функциональное пространство $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{gathered}\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)=\{u\in W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega);\ D^s u\big|_{\Omega_0}=0,\ s=0,1,\dots,s_\alpha-1,\\ D^s u\big|_{\Omega_b}=0,\ s=0,1,\dots,s_\beta-1,\ D^\sigma u\big|_{\Gamma^*}=0;|\sigma|\le m-1\},\end{gathered} \quad (1.16)$$

где s_α и s_β – целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{1+\alpha}{p}\le s_\alpha<\frac{1+\alpha}{p}+1;\ \frac{1+\beta}{p}\le s_\beta<\frac{1+\beta}{p}+1 \text{ (см. [2]).}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$1-\frac{1}{p}\le\frac{\alpha}{p}\le m-\frac{1}{p},\ 1-\frac{1}{p}\le\frac{\beta}{p}\le m-\frac{1}{p}. \quad (1.17)$$

Замечание 1. При $s_\alpha = m$ (или $s_\beta = m$) в определении нормы (1.1) в $W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ можно взять сумму только по $|\sigma| = m$. Действительно, тогда из равенства $\left|u, W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right|^p = 0$ следует, что $D^{m-1}u$ – постоянное число, но так как $D^{m-1}u(x)\big|_{\Omega_0} = 0$ (или $D^{m-1}u\big|_{\Omega_b} = 0$), имеем $D^{m-1}u \equiv 0$. Аналогично проведя рассуждения для $|\sigma| \le m-2$, получим $u(x) \equiv 0$.

Замечание 1 фактически означает, что при выполнении его условий пространство $W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ не содержит постоянных функций (отличных от тождественного нуля).

§ 2. Решение краевой задачи. В этом параграфе будет доказана однозначная разрешимость задачи (0.1), (0.2). Определим оператор $L : \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega) \to \left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$ по формуле

$$\langle L(u), v\rangle = \sum_{|\sigma| \le m} \int_\Omega A_\sigma(x, D^\gamma u) D^\sigma v dx, |\gamma| \le m, \qquad (2.1)$$

где $u, v \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$, $\left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$ – сопряженное пространство, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов над $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$, а $\langle L(u), v\rangle$ – значение функционала $L(u)$ на v. Разрешимость задачи опирается на одну важную теорему теории монотонных операторов, доказанную в [3]. Для полноты изложения приведем ее формулировку.

Пусть X – действительное сепарабельное рефлексивное пространство Банаха, X^* – сопряженное пространство, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов над X. Значение функционала $\omega \in X^*$ на элементе $u \in X$ обозначим через $< \omega, u >$.

Рассмотрим оператор (вообще говоря, нелинейный) $A : X \to X^*$.

Теорема A ([3], теорема 11). Пусть монотонный оператор $A : X \to X^*$ удовлетворяет следующим двум условиям.

I^0. Для любого $u \in X$ справедливо неравенство $< A(u), u > \ge c(\|u\|)\|u\|$, где $c(r)$ – функция вещественного переменного r, такая, что $\lim\limits_{r\to\infty} c(r) = +\infty$, $\|u\|$ – норма в пространстве X.

II^0. Оператор A полунепрерывен в том смысле, что он переводит всякую сильно сходящуюся в X последовательность $u_n \to u$ в слабо сходящуюся последовательность $A(u_n) \to A(u)$. Тогда оператор $A : X \to X^*$ осуществляет отображение “на”, т.е. для любого $h \in X^*$ уравнение $A(u) = h$ имеет, по крайней мере, одно решение в пространстве X.

Теорема 2.1. Пусть оператор L, действующий из пространства $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ в $\left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$, удовлетворяет условиям i), ii). Тогда он является монотонным, полунепрерывным и коэрцитивным.

Доказательство. Сперва докажем, что оператор L определен корректно. Оценим интеграл (2.1), используя условие (1.2).

$$\left|\sum_{|\sigma|\le m} \int_\Omega A_\sigma(x, D^\gamma u) D^\sigma v dx\right| \le \sum_{|\sigma|\le m} \left[\int_\Omega x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |D^\sigma v|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_\Omega x_n^{-q\alpha/p}(b-x_n)^{-q\beta/p} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot |A_\sigma(x, D^\gamma u)|^q dx \right]^{1/q} \le c \sum_{|\sigma|\le m} \left[\int_\Omega x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |D^\sigma v|^p dx\right]^{1/p} \left[\int_\Omega x_n^\alpha (b-x_n)^\beta |D^\gamma u|^p dx\right]^{1/q} < \infty,$$

так как $u,v\in \dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$.

Из условия (1.4) следует коэрцитивность оператора L:

$$\langle L(u),u\rangle=\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega A_\sigma(x,D^\gamma u)D^\sigma u dx\ge \mu_0\sum_{|\gamma|\le m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma u\right|^p dx=h(\|u\|)\|u\|, \quad (2.2)$$

где $h(r)=\mu_0 r^{p-1}\to\infty$ при $r\to\infty$.

Теперь докажем полунепрерывность оператора L, т. е. что он всякую сильно сходящуюся последовательность пространства $\dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ переводит в последовательность, слабо сходящуюся в сопряженном пространстве.

Пусть $u\in \dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ и последовательность $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty, u_k\in \dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$, такова, что $\|u_k-u\|\to 0$ при $k\to\infty$. (2.3)

Для любого $v\in \dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ имеем в силу (1.3)

$$\left|\langle L(u_k)-L(u),v\rangle\right|=\left|\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega\left[A_\sigma(x,D^\gamma u_k)-A_\sigma(x,D^\gamma u)\right]D^\sigma v dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial A_\sigma(x,D^\gamma u+\tau D^\gamma(u_k-u))}{\partial\xi_\gamma}D^\gamma(u_k-u)D^\sigma v d\tau dx\right|\le$$

$$\le c_2\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega\int_0^1 x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma u+\tau D^\gamma(u_k-u)\right|^{p-2}\left|D^\gamma(u_k-u)\right|\left|D^\sigma v\right|d\tau dx\le$$

$$\le c_3\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left[\left|D^\gamma u\right|^{p-2}+\left|D^\gamma(u_k-u)\right|^{p-2}\right]\left|D^\gamma(u_k-u)\right|\left|D^\sigma v\right|dx\le \quad (2.4)$$

$$\le c_3\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left(\left|D^\gamma u\right|^{p-2}\left|D^\gamma(u_k-u)\right|\left|D^\sigma v\right|dx+\left|D^\gamma(u_k-u)\right|^{p-1}\left|D^\sigma v\right|\right)dx\le$$

$$\le c_4\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left[\left(\left|D^\gamma u\right|^{p-1}+\left|D^\sigma v\right|^{p-1}\right)\left|D^\gamma(u_k-u)\right|+\left|D^\gamma(u_k-u)\right|^{p-1}\left|D^\sigma v\right|\right]dx.$$

Оценим теперь интегралы правой части последнего неравенства. Имеем в силу (2.3)

$$\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma u\right|^{p-1}\left|D^\gamma(u_k-u)\right|dx\le\left[\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma u\right|^p dx\right]^{1/q}\cdot$$
$$\cdot\left[\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma(u_k-u)\right|^p dx\right]^{1/p}\le\|u\|^{p-1}\|u_k-u\|\to 0 \quad (2.5)$$

при $k\to\infty$.

Остальные интегралы в (2.4) оцениваются аналогично. Таким образом, из (2.4), (2.5) следует, что

$$\left|\langle L(u_k),v\rangle-\langle L(u),v\rangle\right|\to 0 \text{ при } k\to\infty \quad (2.6)$$

и полунепрерывность оператора L доказана.

Установим теперь монотонность оператора L. Для любых $u,v\in \dot W^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ в силу (1.5) имеем

$$\langle L(u)-L(v),u-v\rangle=\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega\left[A_\sigma(x,D^\gamma u)-A_\sigma(x,D^\gamma v)\right]D^\sigma(u-v)dx=$$

$$=\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega\int_0^1\frac{\partial A_\sigma(x,D^\gamma v+\tau D^\gamma(u-v))}{\partial\tau}D^\gamma(u-v)D^\sigma(u-v)d\tau dx\ge$$

$$\geq \mu_2 \sum_{|\gamma|\leq m} \int_{\Omega} x_n^{\alpha}(b-x_n)^{\beta} \left| D^{\gamma}(u-v) \right|^p dx \geq 0,$$

и монотонность оператора L доказана.

Доказательство завершено.

Определение. Элемент $u \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.2), если для любого $v \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ имеет место равенство

$$\langle L(u), v \rangle = \sum_{|\sigma|\leq m} \int_{\Omega} A_{\sigma}(x, D^{\gamma}u) D^{\sigma} v dx = \int_{\Omega} f v dx, \tag{2.7}$$

где $f \in \left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$.

Теорема 2.2. Пусть оператор L, действующий из пространства $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ в $\left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$, удовлетворяет условиям i), ii). Тогда для любого $f \in \left(\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*$ обобщенное решение задачи (0.1)–(0.2) существует и единственно.

Доказательство. Существование обобщенного решения непосредственно следует из теоремы 2.1 и теоремы А.

Докажем единственность обобщенного решения. Пусть функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $\dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$ являются обобщенными решениями задачи (0.1)–(0.2). Тогда имеют место равенства $\langle L(u_1), v \rangle = \langle f, v \rangle$ и $\langle L(u_2), v \rangle = \langle f, v \rangle$, $\forall v \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega)$. Отсюда получаем

$$\langle Lu_1 - Lu_2, v \rangle = 0, \forall v \in \dot{W}^m_{p,\alpha,\beta}(\Omega). \tag{2.8}$$

Полагая в равенстве (2.8) $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ и учитывая монотонность оператора L, имеем $0 = \langle L(u_1) - L(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq \mu_0 \|u_1 - u_2\|^p$. Следовательно, $u_1(x) \equiv u_2(x)$.

Доказательство завершено.

§ 3. Разрешимость начально-краевой задачи. В этом параграфе исследуется смешанная краевая задача для нелинейного вырождающегося эволюционного уравнения вида

$$u_t + L(u) = f(t, x) \tag{3.1}$$

в цилиндре $Q_T = (0, T) \times \Omega$, а оператор L определен выражением (0.1) и

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), x \in \Omega, \tag{3.2}$$

$$D^s u\big|_{\Omega_0} = 0; s = 0,1,\dots,s_{\alpha} - 1; D^s u\big|_{\Omega_b} = 0; s = 0,1,\dots,s_{\beta} - 1,$$

$$D^{\sigma} u\big|_{\Gamma^*} = 0; |\sigma| \leq m-1, 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Разрешимость задачи (3.1)–(3.3) опирается на одну общую теорему существования, доказанную в [3]. Для полноты изложения приведем ее формулировку. С этой целью введем обозначения. Пусть X – банахово пространство, а X^* – пространство линейных непрерывных функционалов над X. Обозначим через $L_p(0,T;X)(p>1)$ пространство функций $u(t):[0,T] \to X$ с нормой

$$|||u|||^p = \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt, \tag{3.4}$$

где $\|\cdot\|_X$ – норма банахова пространства X.

Пусть, далее, $A(t,u)$ – нелинейный оператор, зависящий от параметра $t\in[0,T]$, действующий из пространства $L_p(0,T;X)$ в сопряженное пространство $L_q(0,T;X^*)$, $1/p+1/q=1$.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u'+A(t,u)=h, \tag{3.5}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0, \tag{3.6}$$

где $h(t)$ – произвольно заданный элемент пространства $L_q(0,T;X^*)$.

Обозначим наконец через $H(u_0)$ пространство функций $u(t)\in \in L_p(0,T;X)$ таких, что $u'\in L_q(0,T;X^*)$, $u(0)=u_0$, $u_0\in X$.

Теорема B ([3], теорема 13). Пусть выполнены следующие условия:

1) для почти всех $t\in[0,T]$ и любого $u(t)\in L_p(0,T;X)$ справедливо неравенство

$$\langle A(t,u),u\rangle\geq c_0\|u\|_X^p-k(t), \tag{3.7}$$

с некоторой постоянной $c_0>0$, $k(t)$ – ограниченная функция;

2) оператор $A(t,u):L_p(0,T;X)\to L_q(0,T;X^*)$ ограничен и полунепрерывен.

Тогда отображение $L(u)=u'+A(t,u):H(u_0)\to L_q(0,T;X^*)$ есть эпиморфизм, т. е. для любого $h\in L_q(0,T;X^*)$ задача (3.5)–(3.6) разрешима.

Пусть в условиях теоремы B пространство $X=\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 3.1. Пусть оператор L удовлетворяет условиям i), ii) параграфа 1, а $f\in L_p\left(0,T;\left(\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*\right)$. Тогда для любого $u_0\in \dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)$ задача (3.1)–(3.3) имеет единственное обобщенное решение $u\in L_p\left(0,T;\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)$.

Доказательство (существование). Сначала докажем, что оператор L действует ограниченным образом из пространства $L_p\left(0,T;\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)$ в $L_q\left(0,T;\left(\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*\right)$.

Пусть B – произвольное ограниченное множество пространства

$$L_p\left(0,T;\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right):B=\left\{u\in L_p\left(0,T;\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right),\ \|u\|\leq R<\infty\right\}. \tag{3.8}$$

Зафиксируем произвольный элемент $u^*\in B$ и $t\in[0,T]$. Рассмотрим линейный функционал

$$l(v)=L(u^*,v)\overset{\mathrm{def}}{=}\int_0^T\langle L(u^*),v\rangle dt=\sum_{|\sigma|\leq m}\int_0^T\int_\Omega A_\sigma(x,D^\gamma u^*)D^\sigma v\,dx\,dt \tag{3.9}$$

на пространстве $L_p\left(0,T;\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)$. Из условия i) имеем

$$\left|\langle L(u^*),v\rangle\right|=\left|\sum_{|\sigma|,|\gamma|\leq m}\int_\Omega A_\sigma(x,D^\gamma u^*)D^\sigma v\,dx\right|\leq\left[\sum_{|\sigma|,|\gamma|\leq m}\int_\Omega x_n^{-q\alpha/p}(b-x_n)^{-q\beta/p}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left|A_\sigma(x,D^\gamma u^*)\right|^q dx\right]^{1/q}\left[\sum_{|\sigma|\leq m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\sigma v\right|^p dx\right]^{1/p}\leq c_1\left[\sum_{|\gamma|\leq m}x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\gamma u^*\right|^p dx\right]^{1/q}\cdot \tag{3.10}$$

$$\cdot\left[\sum_{|\sigma|\le m}\int_\Omega x_n^\alpha(b-x_n)^\beta\left|D^\sigma v\right|^p dx\right]^{1/p}=c_1\left\|u^*\right\|^{p-1}_{W^m_{p,\alpha,\beta}}\left\|v\right\|_{W^m_{p,\alpha,\beta}},$$

где $c_1>0$ – некоторая постоянная.

Интегрируя последнее неравенство по $t\in[0,T]$, получим

$$\left|L(u^*,v)\right|\le c_1\left(\int_0^T\|v\|^p_{W^m_{p,\alpha,\beta}}dt\right)^{1/p}\left\|u^*\right\|_p^{p/q}\le CR^{1/q}\|v\|_p. \tag{3.11}$$

Вводя обозначение

$$\|u\|_q'=\left(\int_0^T\|u\|^p_{(W^m_{p,\alpha,\beta})^*}dt\right)^{1/q}, \tag{3.12}$$

из (3.11) получим

$$\left\|L(u^*)\right\|_q'\le CR^{1/q}, \tag{3.13}$$

откуда следует ограниченность образа множества B в пространстве $L_q\left(0,T;\left(\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*\right)$.

Монотонность и полунепрерывность оператора L нетрудно доказать, используя схему доказательства теоремы 3.1 с учетом того, что коэффициенты уравнения не зависят от временной переменной.

Затем с применением теоремы В, доказывается существование обобщенного решения задачи (3.1)–(3.3).

(Единственность). Пусть $u_1,u_2\in H(u_0)$ – два решения задачи (3.1)–(3.3), отвечающее одному и тому же начальному условию $u_0\in\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)$. Тогда их разность удовлетворяет тождествам

$$(u_1-u_2)_t+L(u_1)-L(u_2)=0, \tag{3.14}$$

$$(u_1-u_2)\big|_{t=0}=0. \tag{3.15}$$

Из тождества (3.14) имеем для почти всех $\tau\in[0,T]$

$$\int_0^\tau\left\langle(u_1-u_2)_t,u_1-u_2\right\rangle dt+\int_0^\tau\left\langle L(u_1)-L(u_2),u_1-u_2\right\rangle dt=0, \tag{3.16}$$

при этом сходимость интегралов обусловлена принадлежностью $(u_1-u_2)_t$ и $L(u)$ пространству $L_q\left(0,T;\left(\dot W^m_{p\alpha,\beta}(\Omega)\right)^*\right)$. В силу монотонности оператора L из (3.16) следует, что

$$\int_0^\tau\left\langle(u_1-u_2)_t,u_1-u_2\right\rangle dt=\frac{1}{2}\int_0^\tau\frac{\partial}{\partial t}\|u_1-u_2\|^2_{L_2}dt\le 0.$$

Поскольку $p>2$, то очевидно, что $u_1-u_2\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Теперь с учетом начального условия (3.15) из последнего неравенства вытекает

$$\int_\Omega\left|u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)\right|^2dx=0.$$

Отсюда в силу произвольности τ заключаем, что $u_1\equiv u_2$ в цилиндре Q_T.

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Иджеванский филиал ЕГУ *Поступила 02.10.2001*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акопян Г. С., Шахбагян Р. Л.** – Изв. НАН РА, Математика, 1996, т. 31, №3, с. 5–30.
2. **Кудрявцев Л.Д.** Труды МИАН СССР, 1984, т. 170, с. 161–190.
3. **Дубинский Ю.А.** – УМН, 1968, т. 23, вып. 1(139), с. 45–90.
4. **Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В.** – Изв. ВУЗ-ов, сер. математ., 1988, т. 8(315), с. 4–30.
5. **Тепоян Л.** – Изв. НАН РА, Математика, 1999, т. 34, №5, с. 48–56.

Ա. Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ

ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՍԵՐՎՈՂ ՔՎԱԶԻԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են եզրային խնդիրներ բարձր կարգի քվազիգծային էվոլյուցիոն հավասարումների համար, ընդ որում վերասերումը իրականացվում է եզրի վրա երկու ուղղությամբ՝ տարբեր կշիռներով: Ապացուցվում է նրանց լուծման գոյությունը և միակությունը հատուկ կշռային տարածություններում:

A. V. TSUTSULIAN

BOUNDARY PROBLEMS FOR HIGH ORDER DEGENERATE QUASILINEAR EQUATIONS

Summary

In this paper we consider boundary problems for high order quasilinear evolution equations, that are degenerate on boundary in two directions with different weights. It is proved that there exists a solution in special weighted functional spaces and the solution is unique.