ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2002 Естественные науки

Математика

УДК 517.5

И. Г. ХАЧАТРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Работа основана на построенной автором теории пространств с операцией предела последовательности. Рассматривается частично упорядоченное множество $\mathbb{L}$ всех линейных операций предела последовательности в векторном пространстве X, каждая из которых порождает ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и заданная линейная операция предела последовательности. Доказывается, что $\mathbb{L}$ содержит наименьший элемент, в $\mathbb{L}$ всякое непустое подмножество имеет точную нижнюю границу, а совершенно упорядоченное — точную верхнюю границу и, следовательно, $\mathbb{L}$ содержит максимальные элементы. Даются характеристики наименьшего элемента и максимальных элементов множества $\mathbb{L}$. Для линейных пространств с операцией предела последовательности доказываются некоторые предложения об окрестностях нуля, выпуклых множествах и дифференцируемых отображениях, а также предложения, обобщающие классические теорему Банаха–Штейнгауза и теорему об открытом отображении. В частности получены результаты, усиливающие некоторые известные варианты теоремы Банаха–Штейнгауза для топологических векторных пространств.

Введение. Вопрос построения теории, обобщающей основные понятия классического математического анализа, стал предметом систематического исследования в начале XX века (см. [1], с. 138—145, 166—167; [2], с. 11—16, 194—198, 259—260; [3], с. 197; [4], с. 42—45). Первая попытка построения общей теории принадлежит М. Фреше [5]. В качестве исходного понятия теории он принял предел последовательности. Его подход заключается в следующем: выделяется некоторый класс последовательностей в множестве X, называемых сходящимися, с каждой последовательностью из этого класса сопоставляется некоторый элемент множества X, называемый ее пределом, и требуется выполнение аксиом

1) для каждого $x \in X$ последовательность $(x, x, \ldots)$ сходится к x;

2) подпоследовательность сходящейся к $x \in X$ последовательности в X сходится к x.

Однако эти две аксиомы не дают удовлетворительной характеристики понятия предела последовательности. Поэтому П. С. Урысон [6] (см. также [7], с. 801—806) к указанным аксиомам добавил следующую аксиому:

3) несходящаяся к $x \in X$ последовательность в X обладает подпоследовательностью, никакая подпоследовательность которой не сходится к x.

Основанная на этих трех аксиомах теория L^*-пространств получила некоторое дальнейшее развитие в [3], с. 197—212, и [8] (см. также [4], с. 108—109).

Другую попытку построения общей теории предпринял Ф. Рисс [9], исходя из понятия точки накопления. Однако его теория осталась незаконченной и дана им лишь в виде предварительных наметок.

Начало общей топологии (т. е. теории, основанной на понятии окрестности) положил Ф. Хаусдорф [10]. О системе аксиом этой теории в [2], с. 13, написано: «*Выбор налагаемых на окрестности аксиом, очевидно, до некоторой степени произволен, и исторически он был предметом продолжительных поисков.*

Система аксиом, на которой, в конце концов, остановились, вполне отвечает потребностям современного анализа, не впадая при этом в чрезмерную и беспредметную общность». С историей выбора этой системы аксиом вкратце можно ознакомиться в [4], с. 42—45.

В классическом анализе при введении основных понятий используется такое семейство окрестностей, что возникшая система всех открытых множеств не допускает расширения с сохранением операции предела последовательности, т. е. отображения, сопоставляющего с каждой последовательностью множество ее пределов. Это имеет место и в любом метрическом пространстве (понятие метрического пространства ввел М. Фреше [5]). Однако топология как система открытых множеств, вообще говоря, не обладает указанным свойством, и две различные топологии могут определить одну и ту же операцию предела последовательности. По этой причине введенные в общей топологии понятия оторваны от понятия предела последовательности в том смысле, что, к примеру, одна и та же функция при одной и той же операции предела последовательности непрерывна в одной топологии и не непрерывна в другой.

Топология фиксируется заданием сходимости направленностей или фильтров. Поэтому рассматриваемые в общей топологии понятия однозначно связаны с понятием предела направленности или фильтра. С историей введения понятий направленности, фильтра и их сходимости вкратце можно ознакомиться в [4], с. 96. В общей топологии к понятию окрестности было приспособлено понятие сходимости в конце 1930-х годов. Характеристические свойства топологической сходимости направленностей указаны Келли [11] (см. также [12], с. 107).

Начиная с 1950-х годов появились исследования (см. [13—20]), посвященные построению общей теории сходимости, в которых, как и в указанных выше работах Фреше и Урысона, понятие предела вводится с помощью аксиом без учета понятия окрестности. Однако в интуитивном восприятии понятия окрестности и предела взаимно связаны, и поэтому правильнее ввести их совместно. Более того, при построении теории методом введения одного из указанных понятий с помощью аксиом без учета другого допускается некоторый произвол в выборе системы аксиом, что делает теорию несколько искусственной.

Работа [21] также посвящена вопросу построения теории, обобщающей основные понятия классического анализа. В отличие от указанных подходов к решению вопроса в [21] понятия окрестности и предела вводятся совместно, без использования специальных аксиом, на основе их интуитивного понимания. Характеристические свойства введенного понятия операции предела или полной системы окрестностей точки могут быть использованы для аксиоматического построения теории. Этот подход применяется в двух вариантах. В одном из них совместно с понятием окрестности вводится понятие предела последовательности, а в другом — понятие предела направленности или фильтра. В результате возникают две различные теории, не сравнимые с точки зрения общности. Одна из них называется теорией пространств с операцией предела последовательности, а другая — теорией пространств с операцией предела направленности или фильтра. Вторая теория в некотором смысле может быть включена в первую, причем ее часть, относящаяся к топологическим пространствам с операцией предела направленности или фильтра, совпадает с общей топологией. Введенное в [21] понятие окрестности шире, чем рассматриваемое в общей топологии, а именно: окрестность точки может не содержать непустого открытого множества даже в топологическом пространстве с операцией предела последовательности (напр., в пространстве всех вещественных функций на вещественной оси с операцией предела, соответствующей поточечной сходимости, дополнение множества непрерывных функций является окрестностью функции Дирихле и не содержит ее открытой окрестности).

Интуитивно окрестность точки представляется как всякое подмножество, из дополнения которого нельзя приблизиться к этой точке. Окрестность точки должна содержать эту точку, поскольку в интуитивном восприятии точка сколь угодно близка к себе. Если задан некоторый способ приближения к точке, то по нему определяется система всех окрестностей этой точки. Обратно, исходя из какой-либо системы окрестностей точки, можно дать некоторый способ приближения к точке, а затем уточнить систему всех окрестностей этой точки. В [21] при введении понятия окрестности точки в одном случае требуется, чтобы из дополнения окрестности нельзя было приблизиться к этой точке последовательностью, а в другом — направленностью.

В непустом множестве X, элементы которого называются точками, понятия окрестности точки и предела последовательности вводятся следующим образом. Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $X^{\mathbf{N}}$ — множество всех последовательностей в X, а 2^X — множество всех подмножеств множества X. С каждой точкой $x \in X$ сопоставляется некоторое непустое множество V_x подмножеств множества X, содержащих эту точку. Каждое $v \in V_x$ называется окрестностью точки x, а V_x — системой (точнее — предварительной системой) окрестностей этой точки. Точка $x \in X$ называется пределом последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$ по системе окрестностей V_x, а последовательность $\hat{x}$ называется сходящейся к x, если вне каждого $v \in V_x$ может находиться лишь конечное число членов этой последовательности. Рассматривается отображение $\Lambda : X^{\mathbf{N}} \to 2^X$, сопоставляющее с каждой последовательностью $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$ множество ее пределов $\Lambda(\hat{x}) \in 2^X$ и называемое операцией предела последовательности в X, определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Если каждая сходящаяся последовательность имеет лишь один предел, то Λ называется операцией однозначного предела последовательности. Пара (X, Λ) называется пространством с операцией предела последовательности, а X — носителем пространства. В пространстве (X, Λ) окрестностью точки $x \in X$ называется всякое подмножество $u \subset X$, в дополнении $X \backslash u$ которого нет сходящейся к x последовательности. Множество U_x всех окрестностей точки x пространства (X, Λ) называется полной системой окрестностей этой точки. Операция предела последовательности в X, определенная указанным выше способом при помощи семейства полных систем окрестностей $(U_x : x \in X)$, совпадает с Λ. Для каждого $x \in X$ система U_x является фильтром в X и совпадает с пересечением всех фильтров в X, содержащих исходную систему V_x и имеющих конечную или счетную базу (фильтр U_x может не иметь конечной или счетной базы). В пространстве (X, Λ) подмножество $M \subset X$ называется открытым, если оно либо пусто, либо является окрестностью каждой своей точки, т. е. $M \in U_x$ для каждого $x \in M$. Множество τ всех открытых подмножеств пространства (X, Λ) является топологией в X. Топология τ определяет в X операцию предела последовательноти Λ', которая может отличаться от Λ. Именно: Λ' определяется семейством систем окрестностей $(V'_x : x \in X)$, где V'_x для каждого $x \in X$ является системой всех таких $v \in \tau$, что $x \in v$. Среди топологий в X, определяющих операцию предела последовательности Λ', τ является сильнейшей и называется секвенциальной топологией пространства (X, Λ). При этом τ является также топологией всех открытых подмножеств пространства (X, Λ'), а значит, и его секвенциальной топологией. Имеет место включение $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$. В случае $\Lambda' = \Lambda$ пространство (X, Λ) называется топологическим. Примерами топологических пространств с операцией предела последовательности могут служить секвенциально равномерные пространства, в частности пространства с операцией однозначного предела последовательности и линейные пространства. Пространство (X, Λ) называется линейным, а Λ — линейной операцией предела последовательности, если X — векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, а для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$, $\hat{y}$ в X и любой сходящейся к некоторому α числовой последовательности $\hat{\alpha}$ имеют место включения $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ и $\alpha\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$. Из этих включений вытекает, что на самом деле выполняются равенства (конечно, если $\alpha \neq 0$ в случае операции неоднозначного предела последовательности Λ). Секвенциальная топология линейного пространства инвариантна относительно сдвигов и гомотетий. В векторном пространстве среди топологий, определяющих данную линейную операцию однозначного предела последовательности, может не существовать векторной или даже хаусдорфовой топологии.

Аналогично вводятся понятия окрестности точки и предела направленности. Пусть $\mathcal{K}(X)$ — класс всех направленностей в X. Точка $x \in X$ называется пределом направленности $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ по системе окрестностей V_x этой точки, если направленность $\check{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$. Отображение $L : \mathcal{K}(X) \to 2^X$, сопоставляющее с каждой направленностью $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ множество ее пределов $L(\check{x}) \in$ $\in 2^X$, называется операцией предела направленности в X, определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Пара (X, L) называется пространством с операцией предела направленности. В пространстве (X, L) окрестностью точки $x \in X$ называется всякое подмножество $w \subset X$, в дополнении $X \backslash w$ которого нет сходящейся к x направленности. Множество W_x всех окрестностей точки x пространства (X, L) называется полной системой окрестностей этой точки. Семейство систем окрестностей $(W_x : x \in X)$ тоже определяет в X операцию предела направленности L. Для каждого $x \in X$ система W_x является фильтром в X, имеющим предбазу V_x. В пространстве (X, L) подмножество называется открытым, если оно либо пусто, либо является окрестностью каждой своей точки. Множество τ' всех открытых подмножеств пространства (X, L) является топологией в X. Топология τ' определяет в X операцию предела направленности L', которая может отличаться от L. В случае $L' = L$ пространство (X, L) называется топологическим. Пространство с операцией предела направленности является топологическим тогда и только тогда, когда в нем окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки (пространство с операцией предела последовательности, обладающее этим свойством, является частным случаем топологического пространства с операцией предела последовательности и называется пространством Фреше–Урысона). Пространство с операцией однозначного предела направленности может не быть топологическим. Операция предела последовательности Λ в X, определенная семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, является сужением отображения L на $X^{\mathbf{N}} \subset \mathcal{K}(X)$. При этом Λ определяется также семейством систем окрестностей $(W_x : x \in X)$. Однако $W_x \subset U_x$ для всех $x \in X$, где U_x — полная система окрестностей точки x пространства (X, Λ). Кроме того, $\tau' \subset \tau$, где τ — секвенциальная топология пространства (X, Λ). Как было отмечено выше, теория топологических пространств с операцией предела направленности совпадает с общей топологией. При этом включения $W_x \subset U_x$ и $\tau' \subset \tau$ позволяют результаты теории пространств с операцией предела направленности и, в частности, общей топологии сформулировать также в теории пространств с операцией предела последовательности.

Укажем еще вариант построения теории, хотя он не представляет определенного интереса. Зафиксируем некоторое направленное множество I и обозначим через $\mathcal{K}_I(X)$ класс тех направленностей в X, каждая из которых является поднаправленностью некоторой направленности в X, имеющей область определения I. Рассмотрим отображение $L_1 : \mathcal{K}_I(X) \to 2^X$, сопоставляющее с каждой направленностью $\tilde{x} \in \mathcal{K}_I(X)$ множество ее пределов $L_1(\tilde{x}) \in 2^X$ по семейству систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Очевидно, что L_1 является сужением отображения L на $\mathcal{K}_I(X) \subset \mathcal{K}(X)$. Для каждого $x \in X$ обозначим через W'_x множество всех таких подмножеств $w \subset X$, что в $X \backslash w$ не существует сходящейся к x направленности из класса $\mathcal{K}_I(X)$. Отображение L_1 может быть определено также при помощи каждого из семейств систем окрестностей $(W_x : x \in X)$ и $(W'_x : x \in X)$. Для каждого $x \in X$ система W'_x является фильтром в X, причем $W_x \subset W'_x$, а между фильтрами U_x и W'_x, вообще говоря, нет определенного отношения включения. Однако в случае $I = \mathbf{N}$ имеет место включение $X^{\mathbf{N}} \subset \mathcal{K}_{\mathbf{N}}(X)$ и, значит, $W'_x \subset U_x$.

Остановимся вкратце на некоторых особенностях теории пространств с операцией предела последовательности.

Условия, сформулированные при помощи операции предела последовательности, не всегда допускают эффективное описание в терминах окрестностей (напр., аксиомы линейной операции предела последовательности, понятие дифференцируемой функции или необходимые и достаточные условия секвенциальной равномеризуемости пространства с операцией предела последовательности). Обратно, условия, сформулированные в терминах окрестностей, не всегда допускают эффективное описание при помощи операции предела последовательности (напр., аксиомы векторной топологии или необходимое и достаточное условие метризуемости линейного пространства с операцией предела последовательности). Поэтому понятия окрестноти и предела последовательности вместе дают более широкую классификацию рассматриваемых объектов. Это, в частности, относится к подмножествам частично упорядоченного множества $\mathcal{L}(X)$ всех операций предела последовательности в заданном множестве X. Для $\Lambda_1 \in \mathcal{L}(X)$ и $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(X)$

считается $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, если $\Lambda_1(\hat{x}) \subset \Lambda_2(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$. При этом говорится, что Λ_1 сильнее Λ_2 или Λ_2 слабее Λ_1. Множество $\mathcal{L}(X)$ является полной решеткой.

В множестве $\mathcal{L}_1(X)$ всех операций однозначного предела последовательности совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, следовательно, в $\mathcal{L}_1(X)$ существуют максимальные элементы, т. е. максимально слабые операции однозначного предела последовательности. Однако в множестве всех операций предела последоватвльноти, определенных хаусдорфовыми топологиями, совершенно упорядоченное подмножество может не иметь верхней границы. Если X — векторное пространство, то в множестве $\mathcal{L}_1^*(X)$ всех линейных операций однозначного предела последовательности совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, следовательно, в $\mathcal{L}_1^*(X)$ существуют максимальные элементы. Существует также наименьший элемент, т. е. сильнейшая линейная операция предела последовательности (она определяется векторной топологией). Однако в множестве всех линейных операций однозначного предела последовательности, определенных векторными топологиями, совершенно упорядоченное подмножество может не иметь верхней границы.

В связи с некоторыми вопросами представляет интерес вместе с данной линейной операцией предела последовательности Λ в векторном пространстве X рассмотрение множества $\mathbb{L}$ всех линейных операций предела последовательности, порождающих ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ. Как доказывается здесь, в $\mathbb{L}$ совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, значит, в $\mathbb{L}$ существуют максимальные элементы (существует также наименьший элемент). Линейная операция предела последовательности, являющаяся наименьшим или максимальным элементом в $\mathbb{L}$, может не определяться векторной топологией. Линейные пространства, соответствующие наименьшему и максимальному элементам, могут быть различных категорий, причем пространство, соответствующее максимальному элементу, квазиполно.

Расширение понятия окрестности способствует получению новых результатов как, например, доказанные ниже предложение 3.2 и теорема 3.2, на которых основаны доказательства теорем 4.1, 4.2 и 4.5, обобщающих классические теорему Банаха–Штейнгауза и теорему об открытом отображении (укажем также теоремы 4.3 и 4.4, усиливающие некоторые известные варианты теоремы Банаха–Штейнгауза для топологических векторных пространств).

Введенное в [21] понятие пополнения пространства непривычно в том смысле, что, напр., пополнение линейного пространства многочленов на отрезке вещественной оси с равномерной сходимостью есть линейное пространство непрерывных функций, в котором сходимость сильнее равномерной сходимости. Это понятие пополнения интересно хотя бы тем, что всякое секвенциально непрерывное линейное отображение неполного линейного пространства в полное линейное пространство допускает секвенциально непрерывное линейное продолжение на пополнение этого пространства. С другой стороны, секвенциально непрерывный линейный функционал, определенный на векторном подпространстве линейного пространства, может не допускать секвенциально непрерывного линейного продолжения на замыкание этого подпространства.

Теория пространств с операцией предела последовательности удобна также для введения понятия дифференцируемой функции в ненормируемых линейных пространствах (в связи с этим см. [20], с. 5—16; [22], с. 43—48).

Сказанное показывает, что теория пространств с операцией предела последовательности является более гибкой и может служить более удобной основой для функционального анализа, а полученные здесь результаты являются существенным вкладом в эту теорию.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

Приведем из [21] некоторые определения и предложения, которые используются здесь. Во введении уже были определены понятия операции предела последовательности (короче — операция предела), пространства с операцией предела последовательности (короче — пространство с операцией предела), операции однозначного предела, окрестности точки и полной системы окрестностей точки в пространстве с операцией предела, открытого множества, секвенциальной топологии пространства с операцией предела, топологического пространства с операцией предела, линейной операциии предела, линейного пространства с операцией предела (короче — линейное пространство). Были введены обозначения $\mathbb{N}$, $X^{\mathbb{N}}$, 2^X и было определено отношение частичного упорядочения в множестве операций предела. Всюду в дальнейшем: $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество всех вещественных неотрицательных чисел, а $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел. Для последовательности $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})=(x_1, x_2, \dots)$ в множестве X через $[\hat{x}]$ или $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ будем обозначить множество элементов из X, являющихся членами последовательности $\hat{x}$. Для указания, что последовательность $\hat{x}'$ является подпоследовательностью последовательности $\hat{x}$, будем использовать запись $\hat{x}'\prec\hat{x}$. Последовательность в одноэлементном множестве $\{x\}$ называется *стационарной* и обозначается через $\dot{x}$ (в этом случае $[\dot{x}]=\{x\}$). Будем говорить, что последовательность $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ почти вся лежит в подмножестве $M\subset X$, если $X\backslash M$ содержит лишь конечное число членов последовательности $\hat{x}$. Здесь термины функция и отображение используются как синонимы.

1. Общие пространства с операцией предела. Характеристические свойства операции предела последовательности даются в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Отображение $\Lambda:X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ является операцией предела в множестве X (т. е. может быть определено семейством некоторых систем окрестностей) тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами*

1) $x\in\Lambda(\dot{x})$ для каждого $x\in X$;

2) $\Lambda(\hat{x})\subset\Lambda(\hat{x}')$ для любых $\hat{x}'\prec\hat{x}$ из $X^{\mathbb{N}}$;

3) если $x\in X$ и $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ такие, что для каждого $\hat{x}'\prec\hat{x}$ существует $\hat{x}''\prec\hat{x}'$, для которого $x\in\Lambda(\hat{x}'')$, то $x\in\Lambda(\hat{x})$;

4) если $x\in X$ и $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ такие, что $x\in\Lambda(\dot{x}_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то $x\in\Lambda(\hat{x})$.

В пространстве с операцией предела (X, Λ) полная система U_x окрестностей точки x есть множество таких $u\subset X$, что $x\notin\Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi}\in(X\backslash u)^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим в множестве X операцию однозначного предела Λ. Обозначим через $\hat{X}$ множество таких $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{x})\neq\emptyset$. Сужение на $\hat{X}$ отображения $\Lambda:X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ обозначим через λ и для каждого $\hat{x}\in\hat{X}$ в качестве $\lambda(\hat{x})$ примем точку вместо одноточечного множества. Полученное отображение $\lambda:\hat{X}\to X$ тоже называется операцией однозначного предела в X.

Теорема 1.2. *Отображение $\lambda:\hat{X}\to X$, где $\hat{X}\subset X^{\mathbb{N}}$, является операцией однозначного предела в X тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами*

1) $\dot{x}\in\hat{X}$ и $\lambda(\dot{x})=x$ для каждого $x\in X$;

2) если $\hat{x}\in\hat{X}$ и $\hat{x}'\prec\hat{x}$, то $\hat{x}'\in\hat{X}$ и $\lambda(\hat{x}')=\lambda(\hat{x})$;

3) если $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{x}'\prec\hat{x}$ существует $\hat{x}''\prec\hat{x}'$ из $\hat{X}$ и $\lambda(\hat{x}_1)=\lambda(\hat{x}_2)$ для любых $\hat{x}_1\prec\hat{x}$ и $\hat{x}_2\prec\hat{x}$ из $\hat{X}$, то $\hat{x}\in\hat{X}$.

Эти свойства операции однозначного предела последовательности эквивалентны приведенным во введении трем аксиомам.

В пространстве с операцией предела (X, Λ) окрестность точки, являющаяся открытым множеством, называется *открытой окрестностью* этой точки, а система W_x всех открытых окрестностей точки $x\in X$ — *полной системой открытых окрестностей* точки x. Пусть U_x — полная система окрестностей точки x. Подсистема $V_x\subset U_x$ $(V_x\subset W_x)$ называется *фундаментальной системой* окрестностей (открытых окрестностей) точки x, если для каждого $u\in U_x$ $(u\in W_x)$ существует такое $v\in V_x$, что $v\subset u$.

Пусть X_1 — непустое подмножество пространства (X, Λ). Отображение $\Lambda_1: X_1^{\mathbb{N}}\to 2^{X_1}$, определенное формулой $\Lambda_1(\hat{x})=\Lambda(\hat{x})\cap X_1$, $\hat{x}\in X_1^{\mathbb{N}}$, является операцией предела в X_1, а пространство (X_1, Λ_1) называется *подпространством* пространства (X, Λ) и указывается записью $(X_1, \Lambda_1)\subset(X, \Lambda)$. Пусть $x\in X_1$, а U_x и U'_x — полные системы окрестностей точки x в пространствах (X, Λ) и (X_1, Λ_1) соответственно. Тогда $U'_x=\{u\cap X_1:u\in U_x\}$. Если τ и τ' — секвенциальные топологии пространств (X, Λ) и (X_1, Λ_1) соответственно, а $\widetilde{\tau}=\{w\cap X_1:w\in\tau\}$, то $\widetilde{\tau}\subset\tau'$, причем возможен случай $\widetilde{\tau}\neq\tau'$.

Определение 1.1. *В пространстве* (X, Λ) *точка* x *называется внутренней (квазивнутренней) точкой множества* M*, если* M *содержит открытую окрестность (*M *является окрестностью) точки* x*. Множество всех внутренних (квазивнутренних) точек множества* M *называется его внутренностью (квазивнутренностью) и обозначается через* M° (M^-).

Определение 1.2. *В пространстве* (X, Λ) *точка* x *называется предельной точкой множества* M*, если* $x \in \Lambda(\hat{x})$ *для некоторого* $\hat{x} \in (M \setminus \{x\})^{\mathbf{N}}$.

Теорема 1.3. *В пространстве* (X, Λ) *точка* x *является предельной точкой множества* M *тогда и только тогда, когда каждая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с* $M \setminus \{x\}$.

Определение 1.3. *В пространстве* (X, Λ) *точка* x *называется точкой накопления множества* M*, если каждая открытая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с* $M \setminus \{x\}$.

Определение 1.4. *В пространстве* (X, Λ) *множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Теорема 1.4. *В пространстве* (X, Λ) *для множества* M *следующие условия попарно эквивалентны:*

1) M *замкнуто;*

2) $X \setminus M$ *открыто;*

3) M *содержит все свои точки накопления.*

Определение 1.5. *В пространстве* (X, Λ) *пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество* M*, называется замыканием, а объединение* M *с множеством его предельных точек — квазизамыканием множества* M *и обозначаются соответственно через* $\overline{M}$ *и* M^+.

Теорема 1.5. *В пространстве* (X, Λ) *замыкание множества* M *совпадает с объединением* M *и множества его точек накопления. Кроме того, имеют место равенства* $(X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}$, $\overline{X \setminus M} = X \setminus M^\circ$, $(X \setminus M)^- = X \setminus M^+$, $(X \setminus M)^+ = X \setminus M^-$.

Теорема 1.6. *Отображение* $M \mapsto M^+$ *множества* 2^X *в себя является операцией квазизамыкания в некотором (притом единственном) пространстве* (X, Λ) *с операцией предела последовательности тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами*

1) $\varnothing^+ = \varnothing$; *2)* $M \subset M^+$; *3)* $(M \cup G)^+ = M^+ \cup G^+$;

4) для каждого $x \in M^+ \setminus M$ *существует такое* $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$*, что* $x \in [\hat{x}']^+$ *для любого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Теорема 1.7. *В пространстве с операцией предела последовательности операция замыкания обладает свойствами*

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; *2)* $M \subset \overline{M}$; *3)* $\overline{M \cup G} = \overline{M} \cup \overline{G}$; *4)* $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$;

5) при $M \neq \overline{M}$ *существуют такие* $x \in \overline{M} \setminus M$ *и* $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$*, что* $x \in \overline{[\hat{x}']}$ *для любого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Обратно, если отображение $M \mapsto \overline{M}$ *множества* 2^X *в себя обладает свойствами 1)—5), то оно является операцией замыкания в некотором (притом единственном) топологическом пространстве* (X, Λ) *с операцией предела последовательности.*

Теорема 1.8. *Если в пространстве* (X, Λ) *каждая последовательность* $\hat{x}$ *обладает подпоследовательностью* $\hat{y}$*, для которой* $\overline{[\hat{y}]} \subset [\hat{x}]^+$*, то это пространство топологическое.*

Определение 1.6. *Топология* τ *подмножеств множества* X *называется секвенциальной топологией в* X*, если она, рассматриваемая как система открытых множеств, не допускает расширения с сохранением определенной ею операции предела последовательности. Будем говорить, что топология* τ_1 *подмножеств множества* X_1 *допускает секвенциальное продолжение, если существуют надмножество* $X \supset X_1$ *и в нем секвенциальная топология* τ*, которая индуцирует в* X_1 *топологию* τ_1.

Не всякая операция предела может быть определена системой открытых множеств и не всякая топология может допускать секвенциальное продолжение. Однако всякая топология является подсистемой некоторой секвенциальной топологии (т. е. допускает секвенциальное расширение).

Предложение 1.1. *Если $X_1 \neq \emptyset$ — открытое или замкнутое множество в пространстве (X, Λ), то секвенциальная топология этого пространства индуцирует в X_1 топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$.*

Определение 1.7. *Пространство с операцией предела последовательности называется пространством Фреше–Урысона, если в нем окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки.*

Теорема 1.9. *Для пространства с операцией предела (X, Λ) следующие условия попарно эквивалентны:*

1) (X, Λ) — пространство Фреше–Урысона;

2) $M^+ = \overline{M}$ для любого $M \subset X$;

3) $M^- = M^\circ$ для любого $M \subset X$;

4) секвенциальная топология пространства (X, Λ) индуцирует в любом $X_1 \subset X$ топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства, имеющего носитель X_1;

5) пространство (X, Λ) топологическое, и его секвенциальная топология индуцирует в любом подмножестве секвенциальную топологию.

Определение 1.8. *Пространство (X, Λ) называется отделимым (хаусдорфовым), если в нем любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности (открытые окрестности).*

Предложение 1.2. *Пространство (X, Λ) отделимо (хаусдорфово) тогда и только тогда, когда пересечение квазизамыканий (замыканий) всех окрестностей (открытых окрестностей) точки содержит лишь эту точку.*

Определение 1.9. *В пространстве (X, Λ) подмножество $M \subset X$ называется плотным (секвенциально плотным) в подмножестве $G \subset X$, если $G \subset \overline{M}$ $(G \subset M^+)$. Если же $\overline{M} = X$ $(M^+ = X)$, то M называется всюду (секвенциально всюду) плотным. Подножество $K \subset X$ называется нигде (секвенциально нигде) не плотным, если $(\overline{K})^\circ = \emptyset$ $((K^+)^- = \emptyset)$.*

Определение 1.10. *В пространстве (X, Λ) подмножество называется множеством первой (секвенциально первой) категории, если оно является объединением конечной или счетной системы нигде (секвенциально нигде) не плотных подмножеств. Подмножество, не являющееся множеством первой (секвенциально первой) категории, называется множеством второй (секвенциально второй) категории.*

Определение 1.11. *В пространстве (X, Λ) подмножество G называется сепарабельным (секвенциально сепарабельным), если существует конечное или счетное подмножество $M \subset G$, плотное (секвенциально плотное) в G.*

Определение 1.12. *В пространстве (X, Λ) множество M называется секвенциально компактным (секвенциально квазикомпактным), если для каждого $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $M \cap \Lambda(\hat{x}') \neq \emptyset$ $(\Lambda(\hat{x}') \neq \emptyset)$, секвенциально относительно компактным, если $\overline{M}$ секвенциально компактно.*

Определение 1.13. *В пространстве (X, Λ) покрытие E множества M называется окрестностным покрытием для M, если система $\{A^- : A \in E\}$ покрывает M.*

Определение 1.14. *В пространстве (X, Λ) множество M называется окрестностно (окрестностно счетно) компактным, если из любого его окрестностного (окрестностного счетного) покрытия можно выделить конечное подпокрытие, не обязательно окрестностное, и окрестностно относительно компактным, если $\overline{M}$ окрестностно компактно.*

Теорема 1.10. *В пространстве (X, Λ) множество окрестностно счетно компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

Определение 1.15. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывной (короче — секвенциально непрерывной) в точке $x_0 \in G$, если для лю-*

бой последовательности точек $x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к x_0, значение $f(x_0)$ является пределом последовательности $(f(x_n): n \in \mathbb{N})$. Функция f называется секвенциально непрерывной на $M \subset G$, если она секвенциально непрерывна в каждой точке из M. Если функция f секвенциально непрерывна на области определения G, то она просто называется секвенциально непрерывной.

Теорема 1.11. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а $(\widetilde{V}_y : y \in Y)$ — семейство систем окрестностей в Y, определяющее операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_{y_0}$ точки $y_0 = f(x_0)$ существует такая окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$.*

Теорема 1.12. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела. Относительно функции $f: X \to Y$ рассмотрим следующие условия:*

1) функция f секвенциально непрерывна;

2) $f(M^+) \subset (f(M))^+$ для любого $M \subset X$;

3) $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ для любого $M \subset X$;

4) прообраз $f^{-1}(H)$ каждого открытого (замкнутого) в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ подмножества $H \subset Y$ открыт (замкнут) в (X, Λ).

Тогда 1) эквивалентно 2), а 3) эквивалентно 4), причем из 1) следует 3). Если пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ топологическое, то из 3) следует 1), т. е. все эти условия попарно эквивалентны.

Определение 1.16. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела. Отображение $f: X \to Y$, переводящее каждое открытое подмножество пространства (X, Λ) в открытое подмножество пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$, называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-открытым (короче — открытым) отображением.*

2. Линейные пространства. В поле вещественных или комплексных чисел классическую операцию предела обозначим через lim. Сходимость числовой последовательности $\hat{r} = (r_n:\ n \in \mathbb{N})$ к r будем записывать в виде $\lim \hat{r} = r$ или $\lim\limits_n r_n = r$. Для верхнего предела последовательности $\hat{r}$ вещественных чисел тоже будем использовать общепринятую запись $\overline{\lim}\, \hat{r}$ или $\overline{\lim\limits_n}\, r_n$.

В векторном пространстве X подмножество $M \subset X$ называется *вещественно (радиально) уравновешенным*, если $rM \subset M$ для любого $r \in \mathbb{R}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ с $|r| \leqslant 1$, *вещественным векторным* подпространством, если $M \neq \varnothing$ и $\alpha M + \beta M \subset M$ для любых вещественных чисел α и β. Множество $\bigcup\{rM : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ называется *радиальным уравновешением* множества M. Отображение f векторного пространства X в векторное пространство Y называется *вещественно линейным*, если f аддитивно и $f(rx) = rf(x)$ для всех $x \in X$ и $r \in \mathbb{R}$. *Функционал Минковского* $\mu_v : X \to \mathbb{R}_+$ поглощающего подмножества $v \subset X$ определяется равенством $\mu_v(x) = \inf\{r > 0 : x \in rv\}$, $x \in X$.

Для последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в векторном пространстве X, числовой последовательности $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ и числа α обозначаются $\hat{x} + \hat{y} = (x_n + y_n : n \in \mathbb{N})$, $\hat{\alpha}\hat{x} = (\alpha_n x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\alpha\hat{x} = \dot{\alpha}\hat{x} = (\alpha x_n : n \in \mathbb{N})$.

Теорема 1.13. *Линейное пространство (X, Λ) топологическое, и в нем*

а) $\Lambda(\dot{0})$ является замкнутым векторным подпространством, а всякая окрестность каждого вектора из $\Lambda(\dot{0})$ является окрестностью любого вектора из $\Lambda(\dot{0})$, причем пересечение всех окрестностей нуля совпадает с $\Lambda(\dot{0})$;

б) $\Lambda(\hat{x}) = x + \Lambda(\dot{0})$ для любой сходящейся последовательности $\hat{x}$ и любого $x \in \Lambda(\hat{x})$, причем $\Lambda(\hat{x})$ замкнуто, а для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ множества $\Lambda(\hat{x})$ и $\Lambda(\hat{y})$ либо не пересекаются, либо совпадают;

в) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся последовательность, $\hat{x}' \prec \hat{x}$, $\hat{z}$ — последовательность в $\Lambda(\hat{x})$, а $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность векторов $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$, то $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}') = \Lambda(\hat{z}) = \Lambda(\hat{\xi})$;

г) если последовательность $\hat{x}$ либо сходится, либо не обладает сходящейся *подпоследовательностью, то* $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^{+} = \Lambda(\hat{x}) \cup ([\hat{x}] + \Lambda(\dot{0}))$, *причем в первом случае замыкание* $\overline{[\hat{x}]}$ *окрестностно компактно;*

д) всякое секвенциально компактное подмножество M в X секвенциально относительно компактно, и $\overline{M} = M^{+} = M + \Lambda(\dot{0})$, *а, следовательно, каждая последовательность* $\hat{x} \in \overline{M}^{\mathbf{N}}$ *обладает подпоследовательностью, имеющей предел в M, и для $\hat{x}$ существует такое* $\hat{y} \in M^{\mathbf{N}}$, *что* $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$;

е) если подмножество $H \subset X$ открыто или замкнуто, то $H = H + \Lambda(\dot{0})$.

Следствие 1.1. *Линейная операция предела Λ тогда и только тогда является операцией однозначного предела, когда* $\Lambda(\dot{0}) = \{0\}$.

Теорема 1.14. *Пусть u_0 — окрестность нуля в линейном пространстве (X, Λ), а $x \in X$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in u_0$ для всех чисел α с $|\alpha| < \varepsilon$. Следовательно, u_0 является поглощающим множеством. Окрестность нуля u_0 содержит уравновешенную окрестность нуля. Множество $x + u_0$ является окрестностью вектора x. Кроме того, если u_x — окрестность вектора x, то $u_x - x$ является окрестностью нуля, а для любого числа $\alpha \neq 0$ множество αu_x является окрестностью вектора αx.*

Теорема 1.15. *В линейном пространстве для каждых вектора x, числа α и открытой окрестности $v_{\alpha x}$ вектора αx существуют число $\varepsilon > 0$ и открытая окрестность v_x вектора x такие, что $\beta v_x \subset v_{\alpha x}$ для всех чисел β, удовлетворяющих неравенству $|\beta - \alpha| < \varepsilon$. Следовательно, открытая окрестность нуля содержит уравновешенную открытую окрестность нуля.*

Предложение 1.3. *В линейном пространстве (X, Λ) каждая окрестность нуля содержит такую уравновешенную окрестность нуля v, что* $v = v + \Lambda(\dot{0})$.

Замечание 1.1. Пусть $(V'_x : x \in X)$ — семейство систем окрестностей в векторном пространстве X, определяющее линейную операцию предела Λ. С помощью системы окрестностей нуля V'_0 определим семейство систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, положив $V_x = \{x + v : v \in V'_0\}$ и, в частности, $V_0 = V'_0$. Ясно, что семейство систем окрестностей $(V_x : x \in X)$ определяет в X линейную операцию предела Λ. Учитывая это, всюду в дальнейшем, говоря, что в векторном пространстве X система окрестностей нуля V_0 определяет операцию предела Λ (не обязательно линейную), будем понимать, что Λ определяется семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, где $V_x = \{x + v : v \in V_0\}$.

Предложение 1.4. *Пусть v — окрестность нуля в линейном пространстве, а A — такое множество чисел, что* $\inf\limits_{\alpha \in A} |\alpha| \neq 0$. *Тогда множество* $u = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \alpha v$ *является окрестностью нуля.*

Теорема 1.16. *Пусть G — замкнутое (открытое) и M — секвенциально компактное множества в линейном пространстве, а A — компактное числовое множество, причем $0 \notin A$. Тогда множества $M + G$,* $\bigcap\limits_{x \in M} (x + G)$, *$AG$ и* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \alpha G$ *замкнуты (открыты). В частности для любых вектора x и числа $\alpha \neq 0$ множества $x + G$ и αG замкнуты (открыты).*

Теорема 1.17. *В линейном пространстве для произвольного множества M справедливы равенства*

$$M^{+} = \bigcap_{u \in U'_0} (M + u), \quad \overline{M} = \bigcap_{w \in W'_0} (M + w), \quad \overline{M} + G = M + G,$$

где U'_0 — фундаментальная система окрестностей нуля, W'_0 — фундаментальная система открытых окрестностей нуля, а G — открытое множество.

Теорема 1.18. *В линейном пространстве (X, Λ)*

а) если $M \subset X$ и $G \subset X$, то

$$M^{+} + G^{+} \subset (M + G)^{+}, \quad \overline{M} + \overline{G} \subset \overline{M + G}, \quad M^{-} + G^{-} \subset (M + G)^{-},$$

$$M^{\circ} + G^{\circ} \subset (M + G)^{\circ}, \quad M^{+} + G^{-} \subset M + G, \quad \overline{M} + G^{\circ} \subset M + G,$$

причем если M или G секвенциально квазикомпактно (секвенциально относи-

тельно компактно), то $M^+ + G^+ = (M+G)^+$ $(\overline{M} + \overline{G} = \overline{M+G})$;

б) если $M \subset X$, *а* $t \neq 0$ *— число, то*

$$tM^+ = (tM)^+, \quad t\overline{M} = \overline{tM}, \quad tM^- = (tM)^-, \quad tM^\circ = (tM)^\circ;$$

в) если подмножество $M \subset X$ *уравновешено, вещественно уравновешено или радиально уравновешено, то соответствующим свойством обладают также множества* M^+, $\overline{M}$, M^- *(при* $0 \in M^-$ *или* $M^- = \varnothing$*) и* M° *(при* $0 \in M^\circ$ *или* $M^\circ = \varnothing$*);*

г) если $Y \subset X$ *— векторное (вещественное векторное) подпространство, то* Y^+ *и* $\overline{Y}$ *— векторные (вещественные векторные) подпространства, а* $Y^- = Y^\circ = \varnothing$ *при* $Y \neq X$*;*

д) если подмножество $M \subset X$ *выпукло, то* M^+, $\overline{M}$, M^- *и* M° *выпуклы, причем* $M^- = M^\circ$.

Теорема 1.19. *Пусть* μ_v *— функционал Минковского выпуклой окрестности нуля* v *в линейном пространстве* (X, Λ). *Тогда*

$$v^\circ = v^- = \bigcup_{0<t<1} tv = \{x \in X : \mu_v(x) < 1\}, \qquad \overline{v} = v^+ = \bigcap_{t>1} tv = \{x \in X : \mu_v(x) \leqslant 1\}.$$

Кроме того, $\overline{v^\circ} = \overline{v}$ *и* $(\overline{v})^\circ = v^\circ$, *а множество* $w = \bigcap\limits_{|\alpha|=1} \alpha v^\circ$ *есть наибольшее подмножество в* v, *являющееся выпуклой уравновешенной открытой окрестностью нуля, причем* w *есть множество всех таких* $x \in X$, *что* $\mu_v(\alpha x) < 1$ *для любого числа* α *с* $|\alpha| = 1$.

Определение 1.17. *Линейное пространство называется локально выпуклым, если в нем каждая открытая окрестность нуля содержит выпуклую окрестность нуля.*

Предложение 1.5. *Пусть в векторном пространстве* X *линейная операция предела* Λ *определена такой системой окрестностей нуля* V_0, *что для каждого* $v \in V_0$ *существует* $u \in V_0$, *удовлетворяющее включению* $u + u \subset v$. *Тогда*

а) для любого $M \subset X$ *множество* $G = \bigcap\limits_{v \in V_0} (M + v)$ *замкнуто в линейном пространстве* (X, Λ), *причем* $\overline{M} \subset G$;

б) в (X, Λ) *внутренность* v° *каждого* $v \in V_0$ *содержит окрестность нуля из* V_0 *и, значит, является открытой окрестностью нуля;*

в) если $\widetilde{V}_0$ *— фильтр в* X, *имеющий предбазу* V_0, *то для каждого* $v \in \widetilde{V}_0$ *существует такая открытая в* (X, Λ) *окрестность нуля* $w \in \widetilde{V}_0$, *что* $\overline{w} + \overline{w} \subset v$;

г) если Λ *является операцией однозначного предела (т. е. пересечение системы* V_0 *содержит только нуль), то пространство* (X, Λ) *хаусдорфово;*

д) если фильтр в X, *имеющий предбазу* V_0, *содержит полную систему открытых окрестностей нуля пространства* (X, Λ), *а секвенциально компактное подмножество* $K \subset X$ *и замкнутое подмножество* $M \subset X$ *не пересекаются, то существует такая уравновешенная открытая окрестность нуля* w, *что* $(\overline{K} + w) \cap (M + w) = \varnothing$;

е) если V_0 *является предбазой фильтра всех окрестностей нуля пространства* (X, Λ), *то* (X, Λ) *является пространством Фреше–Урысона.*

Определение 1.18. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, а* $G \subset X$. *Система* F *отображений* G *в* Y *называется равностепенно секвенциально непрерывной в точке* $x_0 \in G$, *если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *в* G *и любой последовательности отображений* $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, *последовательность* $(f_n(x_n) - f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ *сходится к нулю в пространстве* $(Y, \widetilde{\Lambda})$. *Если система* F *равностепенно секвенциально непрерывна в каждой точке подмножества* $G' \subset G$, *то она называется равностепенно секвенциально непрерывной на* G', *причем в случае* $G' = G$ *она просто называется равностепенно секвенциально непрерывной.*

Определение 1.19. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, а* $G \subset X$. *Отображение* $f : G \to Y$ *называется секвенциально равномерно непре-*

рывным на $G' \subset G$, если для любых последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N}) \in G'^{\mathbb{N}}$, таких, что $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$, последовательность векторов $f(x_n) - f(x'_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Система F отображений G в Y называется равностепенно секвенциально равномерно непрерывной на G', если для указанных $\hat{x}$, $\hat{x}'$ и любой последовательности отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(f_n(x_n) - f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю.

Предложение 1.6. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а $\widetilde{V}$ — некоторая система окрестностей нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, определяющая операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Система F отображений подмножества $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для каждого $\tilde{v} \in \widetilde{V}$ существует такая окрестность нуля v пространства (X, Λ), что $f(x) - f(x_0) \in \tilde{v}$ для любых $f \in F$ и $x \in G$ при $x - x_0 \in v$.*

Предложение 1.7. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а $\widetilde{V}$ — некоторая система окрестностей нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, определяющая операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Система F отображений подмножества $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на $G' \subset G$ тогда и только тогда, когда для каждого $\tilde{v} \in \widetilde{V}$ существует такая окрестность нуля v пространства (X, Λ), что $f(x) - f(x') \in \tilde{v}$ для любых $f \in F$, $x \in G$ и $x' \in G'$ при $x - x' \in v$.*

Предложение 1.8. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $G \subset X$ — вещественное векторное подпространство, а $f : G \to Y$ — аддитивное отображение. Тогда*

а) если f секвенциально непрерывно в некоторой точке, то оно секвенциально равномерно непрерывно на G;

б) если для любых $x \in G$ и сходящейся к нулю последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $f(r_n x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то $f(rx) \in rf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $x \in G$, $r \in \mathbb{R}$ и, следовательно, если при этом $\widetilde{\Lambda}$ является операцией однозначного предела, то f вещественно линейно.

Предложение 1.9. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства. Тогда равностепенно секвенциально непрерывная в одной точке система аддитивных отображений X в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на X.*

Теорема 1.20. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $\Phi = X/\Lambda(\dot{0})$ — фактор-пространство векторного пространства X по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$, $\hat{\Phi} \subset \Phi^{\mathbb{N}}$ — подмножество таких последовательностей $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ элементов $\varphi_n = x_n + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x}_n)$ из Φ, что последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $x_n \in X$ сходится в (X, Λ), а $\widetilde{\lambda} : \hat{\Phi} \to \Phi$ — отображение, определенное формулой $\widetilde{\lambda}(\hat{\varphi}) = \Lambda(\hat{x})$ для всех $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}$. Тогда отображение $\widetilde{\lambda}$ определено корректно и является операцией однозначного предела в Φ, причем $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ является линейным пространством, называемым фактор-пространством пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$. При этом фактор-отображение $\pi : X \to \Phi$, сопоставляющее с каждым $x \in X$ элемент $\varphi = x + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x})$ из Φ, является линейным, открытым и секвенциально равномерно непрерывным на X отображением.*

Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся линейной операцией предела последовательности в векторном пространстве X, вообще говоря, не есть линейное отображение в прямом смысле, поскольку множество 2^X не векторное пространство. Однако если рассматривать сужение Λ' отображения Λ на подмножество $\hat{X} \subset X^{\mathbb{N}}$ всех сходящихся последовательностей $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, а $\Lambda'(\hat{x})$ принять за элемент фактор-пространства $X/\Lambda(\dot{0})$ и положить $0\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$ вместо $0\Lambda'(\hat{x}) = \{0\}$, то оно как отображение $\Lambda' : \hat{X} \to X/\Lambda(\dot{0})$ является линейным. В частности линейная операция однозначного предела последовательности в X является линейным отображением $\hat{X}$ на X.

Предложение 1.10. *Отображение* $\Lambda: X^{\mathbf{N}} \to 2^X$, *являющееся линейной операцией предела в векторном пространстве* X, *вполне определяется заданием множества* $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$, *называемого ядром линейной операции предела* Λ *и состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей в* (X, Λ).

Теорема 1.21. *Подмножество* $\hat{X}_0 \subset X^{\mathbf{N}}$ *является ядром некоторой линейной операции предела* Λ *в векторном пространстве* X *тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $\hat{X}_0$ *— векторное подпространство в* $X^{\mathbf{N}}$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}_0$ *и* $\hat{x}' \prec \hat{x}$, *то* $\hat{x}' \in \hat{X}_0$;

3) $\hat{\alpha}\dot{z} \in \hat{X}_0$ *для любых* $z \in X$ *и сходящейся к нулю числовой последовательности* $\hat{\alpha}$;

4) $\hat{\alpha}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ *для любых* $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ *и сходящейся числовой последовательности* $\hat{\alpha}$;

5) если $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$ *такое, что для каждого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *существует* $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ *из* $\hat{X}_0$, *то* $\hat{x} \in \hat{X}_0$;

6) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbf{N}}$ *такое, что* $\dot{x}_n \in \hat{X}_0$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\hat{x} \in \hat{X}_0$.

При этом $\hat{X}_0$ *является ядром линейной операции однозначного предела в* X *тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям 1)—5) и не содержит отличной от* $\dot{0}$ *стационарной последовательности.*

Определение 1.20. *В линейном пространстве* (X, Λ) *множество* M *называется* Λ*-ограниченным (короче — ограниченным), если* $0 \in \Lambda(\hat{r}\hat{x})$ *для любых* $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$ *и сходящейся к нулю последовательности* $\hat{r}$ *положительных чисел.*

Предложение 1.11. *В линейном пространстве* (X, Λ) *для ограниченности множества* M *необходимо, чтобы* $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ *для любых* $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$ *и сходящейся к нулю числовой последовательности* $\hat{\alpha}$, *и достаточно, чтобы* $0 \in \Lambda(\hat{r}\hat{x})$ *для любых* $\hat{x} \in M^{\mathbf{N}}$ *и сходящейся к нулю строго убывающей последовательности* $\hat{r}$ *положительных рациональных чисел.*

Теорема 1.22. *Пусть* (X, Λ) *— линейное пространство,* $M \subset X$, *а* V_0 *— некоторая система окрестностей нуля, определяющая операцию предела* Λ. *Если* M *ограничено, то для каждой окрестности нуля* w *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $\alpha M \subset w$ *для всех чисел* α *с* $|\alpha| < \varepsilon$. *Обратно, если для каждого* $v \in V_0$ *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $rM \subset v$ *для всех рациональных* $r \in (0; \varepsilon)$, *то* M *ограничено. Если же каждое* $v \in V_0$ *содержит радиальное уравновешение некоторого* $u \in V_0$, *то для ограниченности* M *достаточно, чтобы для каждого* $v \in V_0$ *существовало такое число* $\alpha \neq 0$, *что* $\alpha M \subset v$.

Определение 1.21. *В линейном пространстве* (X, Λ) *последовательность* $\hat{x}$ *называется фундаментальной, если* $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$ *для любого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Фундаментальная последовательность может не быть ограниченной.

Теорема 1.23. *Пусть* (X, Λ) *— линейное пространство, а* V_0 *— некоторая система окрестностей нуля этого пространства, определяющая операцию предела* Λ. *В* (X, Λ) *последовательность* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого* $v \in V_0$ *существует такое* $n_0 \in \mathbb{N}$, *что* $x_n - x_m \in v$ *для всех* $n \geqslant n_0$ *и* $m \geqslant n_0$.

Определение 1.22. *В линейном пространстве множество* M *называется предкомпактным, если любая последовательность в* M *обладает фундаментальной подпоследовательностью.*

Определение 1.23. *Линейное пространство* (X, Λ) *называется полным (квазиполным), если в нем любая фундаментальная (фундаментальная и ограниченная) последовательность сходится. Подмножество* $M \subset X$ *называется полным (квазиполным), если* $M \cap \Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$ *для любой фундаментальной (фундаментальной и ограниченной) последовательности* $\hat{x}$ *в* M.

Определение 1.24. *В линейном пространстве* (X, Λ) *множество* M *называется* Λ*-вполне ограниченным (короче — вполне ограниченным), если каждая последовательность* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *в* M *обладает двумя такими подпоследовательностями* $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ *и* $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N})$, *что* $0 \in \Lambda(\hat{x}' - \hat{x}'')$ *и* $i_n \neq j_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.24. *В линейном пространстве множество M вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждых $M_1 \subset M$ и окрестности нуля v существует такое конечное $K_1 \subset M_1$, что $M_1 \subset K_1 + v$.*

Предложение 1.12. *Если линейное пространство (X, Λ) имеет такую полную систему окрестностей нуля U_0, что система окрестностей нуля $\{u+u : u \in U_0\}$ определяет операцию предела Λ, то вполне ограниченное подмножество ограничено.*

Определение 1.25. *Пусть X — непустое множество, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Отображение $f : X \to Y$ называется ограниченным на $M \subset X$, если $f(M)$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Система F отображений X в Y называется равномерно ограниченной на M, если $\bigcup\limits_{f \in F} f(M)$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X. Отображение f называется ограниченным на системе $\mathfrak{S}$, если оно ограничено на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Система отображений F называется равномерно огранеченной на системе $\mathfrak{S}$, если она равномерно ограничена на каждом множестве из $\mathfrak{S}$.*

Определение 1.26. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-ограниченным (короче — ограниченным), если оно ограничено на каждом ограниченном подмножестве пространства (X, Λ). Система F отображений X в Y называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-равномерно ограниченной (короче — равномерно ограниченной), если она равномерно ограничена на каждом ограниченном подмножестве пространства (X, Λ).*

Теорема 1.25. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а F — некоторая система отображений $f : X \to Y$, удовлетворяющих равенству $f(nx) = nf(x)$ для всех $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

а) если система F равностепенно секвенциально непрерывна в нуле, то она равномерно ограничена;

б) если в (X, Λ) для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{\alpha}$, что $\hat{\alpha}\hat{x}$ сходится к нулю, то равномерно ограниченная система F равностепенно секвенциально непрерывна в нуле;

в) если система F равномерно ограничена на некоторой окрестности нуля пространства (X, Λ), то она равностепенно секвенциально непрерывна в нуле.

Определение 1.27. *Пусть X — непустое множество, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространство с операцией предела. Будем говорить, что последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ отображений X в Y сходится к отображению $f : X \to Y$ поточечно на $M \subset X$, а f является поточечным пределом последовательности $\hat{f}$ на M, если для каждого $x \in M$ последовательность $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ сходится к $f(x)$ в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. В случае, когда $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, будем говорить, что $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M, а f является равномерным пределом последовательности $\hat{f}$ на M, если для любой последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в M последовательность $(f_n(x_n) - f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Если $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом множестве из некоторой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X, то будем говорить, что $\hat{f}$ сходится к f равномерно на системе $\mathfrak{S}$, а f является $\mathfrak{S}$-равномерным пределом последовательности $\hat{f}$.*

Теорема 1.26. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, а $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная на X последовательность отображений $f_n : X \to Y$, сходящаяся поточечно на X к отображению $f : X \to Y$. Тогда*

а) если f секвенциально непрерывно, то $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в X.

б) если полная система окрестностей нуля $\widetilde{U}$ пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ такая, что система окрестностей нуля $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела

$\widetilde{\Lambda}$, *то* f *секвенциально непрерывно.*

Теорема 1.27. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — *линейные пространства, причем* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *имеет такую полную систему окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$, *что система окрестностей нуля* $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$, $M \subset X$, *а* v — *некоторая окрестность нуля в* (X, Λ). *Если равностепенно секвенциально равномерно непрерывная на* M *последовательность* $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ *отображений* X *в* Y *сходится к отображению* $f: X \to Y$ *поточечно на* $M+v$, *то* f *секвенциально равномерно непрерывно на* M, *а* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на каждом вполне ограниченном подмножестве в* M.

Теорема 1.28. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — *линейные пространства, причем* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *имеет такую полную систему окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$, *что система окрестностей нуля* $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$. *Если последовательность* $(f_n : n \in \mathbb{N})$ *линейных (аддитивных) отображений* X *в* Y *равностепенно секвенциально непрерывна, то наибольшее подмножество* $H \subset X$, *на котором она поточечно сходится к секвенциально непрерывному линейному (аддитивному) отображению* $f: X \to Y$, *а также множество* $\widetilde{H}$ *тех* $x \in X$, *для которых последовательность* $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ *фундаментальна, являются замкнутыми векторными (вещественными векторными) подпространствами в* (X, Λ).

Следующая теорема аналогична теореме Асколи (см. [12], с. 307—311; [23], с. 477—493), обобщает классическую теорему Арцела (см. [24], с. 70—74) и доказана в [21] для более общих пространств, чем линейные пространства.

Теорема 1.29. *Пусть* (X, Λ) — *сепарабельное пространство с операцией предела,* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — *линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$, *что система окрестностей нуля* $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$, C — *множество всех секвенциально непрерывных отображений* X *в* Y, $\mathfrak{S}$ — *система всех секвенциально квазикомпактных подмножеств в* X, *а* $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — *операция предела* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости в* C. *Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества* $F \subset C$ *в линейном пространстве* $(C, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

1) для каждого $x \in X$ *множество* $\{f(x) : f \in F\}$ *предкомпактно (секвенциально квазикомпактно) в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$;

2) F *равностепенно секвенциально непрерывно.*

Известные теоремы о метризуемости и нормируемости топологических векторных пространств (см. [24], с. 94; [25], с. 25, 38) для линейных пространств с операцией предела принимают следующие формулировки.

Теорема 1.30. *В полуметризуемом линейном пространстве существует конечная или счетная фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных открытых окрестностей нуля. Обратно, если операция предела линейного пространства* (X, Λ) *может быть определена конечной системой окрестностей нуля, то* Λ *определяется также единственной полуметрикой* d *на* X, *заданной равенством* $d(x, y) = 0$ *для всех* x *и* y *из* X. *Если же* Λ *определяется счетной системой окрестностей нуля* V_0, *то существует такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на* X, *определяющая операцию предела* Λ, *что все открытые шары с центром в нуле уравновешены. При этом если каждая окрестность нуля из* V_0 *содержит выпуклую окрестность нуля, то полуметрика с указанными свойствами может быть выбрана так, чтобы все открытые шары были бы выпуклыми.*

Линейное пространство с отличным от $\{0\}$ носителем метризуемо тогда и только тогда, когда его операция предела может быть определана при помощи счетной системы окрестностей нуля, пересечение которых содержит только нуль.

Теорема 1.31. *Линейное пространство полунормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует ограниченная выпуклая окрестность нуля.*

Линейное пространство нормируемо тогда и только тогда, когда оно имеет ограниченную выпуклую окрестность нуля, не содержащая отличное от $\{0\}$ векторное подпространство.

3. Полная решетка линейных операций предела. Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathcal{L}^*(X)$ всех линейных операций предела в векторном пространстве $X \neq \{0\}$ и подмножество $\mathcal{L}_1^*(X) \subset \mathcal{L}^*(X)$ всех линейных операций однозначного предела в X.

Теорема 1.32. *Для частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}^*(X)$ и $\mathcal{L}_1^*(X)$ справедливы следующие утверждения.*

а) Множество $\mathcal{L}^*(X)$ является полной решеткой, наибольший элемент Λ_* которой определяется равенством $\Lambda_*(\hat{x}) = X$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, а наименьший элемент λ^* есть операция однозначного прдела в X, по которой последовательность векторов x_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю тогда и только тогда, когда для некоторой конечной системы линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ из X векторы x_n представляются в виде $x_n = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k$, где α_{kn} — числа, для которых $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_{kn}| = 0$ (векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ и их число m могут быть различными для различных $\hat{x}$). Кроме того, точная нижняя граница Λ_1 непустого подмножества $E = \{\Lambda_i : i \in I\} \subset \mathcal{L}^*(X)$ определяется равенством $\Lambda_1(\hat{x}) = \bigcap\limits_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, причем для ядра $\hat{X}_1$ линейной операции предела Λ_1 имеет место равенство $\hat{X}_1 = \bigcap\limits_{i \in I} \hat{X}_i$, где $\hat{X}_i$ — ядро линейной операции предела Λ_i. Точная верхняя граница Λ_2 в $\mathcal{L}^*(X)$ подмножества E есть сильнейшая среди линейных операций предела $\Lambda \in \mathcal{L}^*(X)$, удовлетворяющих включению $\bigcup\limits_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, и определяется равенством $\Lambda_2(\hat{x}) = \bigcap\limits_{\Lambda \in H} \Lambda(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, где H — множество всех верхних границ подмножества E в $\mathcal{L}^*(X)$ ($H \neq \varnothing$, поскольку в $\mathcal{L}^*(X)$ существует наибольший элемент).

б) В случае конечномерного X множество $\mathcal{L}_1^*(X)$ состоит из одного элемента. В случае бесконечномерного X непустое подмножество $E \subset \mathcal{L}_1^*(X)$ имеет в $\mathcal{L}_1^*(X)$ точную нижнюю границу, а верхней границы может не иметь. Однако если E совершенно упорядочено, то оно имеет точную верхнюю границу в $\mathcal{L}_1^*(X)$ и, значит, в $\mathcal{L}_1^*(X)$ существуют максимальные элементы.

Теорема 1.33. *Линейная операция однозначного предела λ в векторном пространстве X является максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathcal{L}_1^*(X)$ тогда и только тогда, когда в пространстве (X, λ) каждая последовательность $\hat{x}$ либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к отличному от нуля вектору.*

Теорема 1.34. *Если λ — максимальный элемент в $\mathcal{L}_1^*(X)$, то линейное пространство (X, λ) квазиполно.*

Теорема 1.35. *Если λ^* — наименьший элемент в $\mathcal{L}^*(X)$, то*

а) в линейном пространстве (X, λ^*) предкомпактное множество ограничено, а линейная оболочка ограниченного множества конечномерна;

б) пространство (X, λ^*) полно и в нем вещественное векторное подпространство замкнуто, а ограниченное подмножество секвенциально относительно компактно;

в) в (X, λ^*) поглощающее выпуклое множество является окрестностью нуля и система всех таких окрестностей нуля определяет операцию предела λ^*;

г) в (X, λ^*) для всякого поглощающего и вещественно уравновешенного множества v множество $v + v^+$ является окрестностью нуля;

д) (X, λ^*) в случае бесконечномерного X не является пространством Фреше–Урысона, а X является в нем множеством первой категории и секвенциально первой категории, причем в случае, когда X имеет счетный базис Гамеля, пространство (X, λ^*) локально выпукло.

4. Дифференциалы и производные. Введенные М. Фреше понятия дифференциала и производной функции, действующей в нормированных линейных пространствах, хорошо известны (см. [24], с. 196; [26], с. 646; [27], с. 480). Однако в теории топологических векторных пространств введение указанных понятий в случае, когда пространства не нормируемы, связяно с определенными трудностями (см. [20], с. 5—16). Одно из определений дифференцируемого отображения принадлежит Себаштьяну э Сильва (см. [22], с. 43—48): для топологических векторных пространств (X, τ) и $(Y, \widetilde{\tau})$ отображение $f: X \to Y$ называется дифференцируемым в точке $x \in X$, если существует такое $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывное линейное отображение $A: X \to Y$, что для любых ограниченного подмножества $M \subset X$ и окрестности нуля v пространства $(Y, \widetilde{\tau})$ найдется $\varepsilon > 0$, для которого $t^{-1}(f(x+th)-f(x))-A(h) \in v$ при любых $h \in M$ и $t \in (0; \varepsilon)$. Это требование относительно отображения A эквивалентно следующему: для любых ограниченной последовательности векторов $h_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящейся к нулю последовательности чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $t_n^{-1}(f(x+t_n h_n)-f(x))-A(h_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\tau})$. Недостатком этого определения является то, что в условии, наложенном на $f(x+z)-f(x)-A(z)$, $z \in X$, используются лишь те сходящиеся к нулю последовательности $\hat{z}$ векторов пространства (X, τ), которые представляются в виде $\hat{z} = \hat{t}\hat{h}$, где $\hat{t}$ — сходящаяся к нулю последовательность чисел, а $\hat{h}$ — ограниченная последовательность векторов. Поэтому дифференцируемое в указанном смысле отображение может не быть секвенциально непрерывным. Действительно, рассмотрим на бесконечномерном вещественном векторном пространстве X операцию скалярного произведения $\langle\cdot, \cdot\rangle$ и функционал f, определенный равенством $f(x) = \langle x, x\rangle$, $x \in X$. Пусть λ^* — линейная операция однозначного предела в X, по которой последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $x \in X$, если $\lim\limits_n \langle x_n - x, y\rangle = 0$ для всех $y \in X$. Функционал f не является λ^*-секвенциально непрерывным ни в одной точке, хотя f дифференцируем по Себаштьяну э Сильва в любой точке (в качестве векторной топологии в X, определяющей операцию предела λ^*, принимается слабая топология, порожденная скалярным произведением).

В [21] дано определение дифференцируемого отображения, в котором используются все сходящиеся к нулю последовательности векторов пространства (в общем случае трудно дать его эффективное описание в терминах окрестностей). Вводятся три различных понятия дифференцируемости отображения: дифференцируемость по векторному подпространству, дифференцируемость по направлению вещественного векторного подпространства и дифференцируемость по направлению вектора.

Определение 1.28. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства над одним и тем же числовым пространством, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Функция $f: G \to Y$ называется дифференцируемой в точке $x \in G$ по X_0, если существует такое секвенциально непрерывное линейное отображение $A: X_0 \to Y$, что для любой сходящейся к нулю в (X, Λ) последовательности векторов $h_n \in X_0 \cap (G - x)$, $n \in \mathbb{N}$, и любой последовательности чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, при которой последовательность $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ ограничена в (X, Λ), последовательность векторов $t_n(f(x+h_n) - f(x) - A(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом A называется производной функции f в точке x по X_0, а для любого $h \in X_0 \cap (G - x)$ вектор $A(h)$ называется дифференциалом функции f в точке x по X_0 при приращении h. В случае $X_0 = X$ функция f просто называется дифференцируемой в точке x, A — производной функции f в точке x, а $A(h)$ — дифференциалом функции f в точке x при приращении h. Если функция f дифференцируема по X_0 в каждой точке области определения G, то она просто называется дифференцируемой по X_0, а в случае $X_0 = X$ она называется дифференцируемой.*

Дифференцируемая в точке функция секвенциально непрерывна в этой точке.

Предложение 1.13. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства над одним и тем же числовым пространством, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Если функции $f_1: G \to Y$ и $f_2: G \to Y$*

дифференцируемы в точке $x \in G$ *по* X_0, *то для любых чисел* α_1 *и* α_2 *функция* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *дифференцируема в точке* x *по* X_0, *причем если* A_1 *и* A_2 *— производные функций* f_1 *и* f_2 *в точке* x *по* X_0 *соответственно, то* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ *является производной функции* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *в точке* x *по* X_0.

Предложение 1.14. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством,* $X_0 \subset X$ *— векторное подпространство, подмножество* $G \subset X$ *и точка* $x \in G$ *такие, что для каждого* $h \in X_0$ *существует сходящаяся к нулю последовательность чисел* $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *для которой* $r_n h \in G - x$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *а* $f : G \to Y$ *— функция, дифференцируемая в точке* x *по* X_0. *Если* A *и* B *производные функции* f *в точке* x *по* X_0, *то* $A(h) - B(h) \in \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, $h \in X_0$. *Следовательно, в случае операции однозначного предела* $\widetilde{\Lambda}$ *функция* f *имеет лишь одну производную в точке* x *по* X_0.

Теорема 1.36. *Пусть* (X, Λ), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *и* (Z, Λ') *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством,* $G \subset X$ *и* $M \subset Y$ *— непустые подмножества,* $f : G \to Y$ *и* $\varphi : M \to Z$ *— некоторые функции, причем* $H = f^{-1}(M) \neq \neq \emptyset$, $x \in H$ *и* $y = f(x)$, *а* $X_0 \subset X$ *и* $Y_0 \subset Y$ *— векторные подпространства, причем* $f(H) - y \subset Y_0$. *Если функция* f *дифференцируема в точке* x *по* X_0 *и имеет производную* A *в точке* x *по* X_0, *а функция* φ *дифференцируема в точке* y *по* Y_0 *и имеет производную* B *в точке* y *по* Y_0, *то функция* $F : H \to Z$, *определенная равенством* $F(\xi) = \varphi(f(\xi))$, $\xi \in H$, *дифференируема в точке* x *по* $X_1 = A^{-1}(Y_0)$ *и имеет производную* C *в точке* x *по* X_1, *определенную равенством* $C(h) = B(A(h))$, $h \in X_1$.

Определение 1.29. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства,* $X_0 \subset \subset X$ *— вещественное векторное подпространство, а* $G \subset X$ *— непустое подмножество. Функция* $f : G \to Y$ *называется дифференцируемой в точке* $x \in G$ *по направлению* X_0, *если существует такое секвенциально непрерывное вещественно линейное отображение* $A : X_0 \to Y$, *что для любой сходящейся к нулю в* (X, Λ) *последовательности векторов* $h_n \in X_0 \cap (G - x)$, $n \in \mathbb{N}$, *и любой последовательности чисел* $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *при которой последовательность* $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ *ограничена в* (X, Λ), *последовательность векторов* $t_n(f(x + h_n) - f(x) - A(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$. *При этом* A *называется производной функции* f *в точке* x *по направлению* X_0, *а для* $h \in X_0 \cap (G - x)$ *вектор* $A(h)$ *называется дифференциалом функции* f *в точке* x *по направлению* X_0 *при приращении* h. *Функция* f, *дифференцируемая по направлению* X_0 *в каждой точке области определения* G, *просто называется дифференцируемой по направлению* X_0.

Приведенные выше утверждения относительно функций, дифференцируемых по векторному подпространству, могут быть сформулированы для функций, дифференцируемых по направлению вещественного векторного подпространства.

Замечание 1.2. Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — комплексные линейные пространства, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Очевидно, функция $f : G \to Y$ тогда и только тогда дифференцируема в точке $x \in G$ по X_0, когда она дифференцируема в точке x по направлению X_0 и одна ее производная A в точке x по направлению X_0 удовлетворяет равенству $A(\mathrm{i}h) = \mathrm{i}A(h)$ для всех $h \in X_0$. В случае $X_0 = X = Y = \mathbb{C}$ это равенство есть не что иное, как условия Коши–Римана (см. [28], с. 35—38). В общем случае при наличии в X и Y секвенциально непрерывных инволюций условие $A(\mathrm{i}h) = \mathrm{i}A(h)$, $h \in X$, с помощью подходящих обозначений тоже можно записать в виде условий, аналогичных условиям Коши–Римана.

Определение 1.30. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства,* $e \in X$, $X_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$, *а* $G \subset X$ *— непустое подмножество. Функция* $f : G \to Y$ *называется дифференцируемой в точке* $x \in G$ *по направлению* e, *если существует такое секвенциально непрерывное положительно однородное отображение* $A_1 : X_1 \to Y$, *что для любой сходящейся к нулю в* (X, Λ) *последовательности векторов* $h_n \in X_1 \cap (G - x)$, $n \in \mathbb{N}$, *и любой последовательности чисел* $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *при которой последовательность* $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ *ограничена в* (X, Λ), *последовательность векторов* $t_n(f(x + h_n) - f(x) - A_1(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$. *При этом* A_1 *называется производной функции* f *в точке* x *по* *направлению e, а для любого $h \in X_1 \bigcap (G - x)$ вектор $A_1(h)$ называется дифференциалом функции f в точке x по направлению e при приращении h. Если функция f дифференцируема по направлению e в каждой точке области определения G, то она просто называется дифференцируемой по направлению e.*

Предложение 1.15. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $e \in X$, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Для дифференцируемости функции $f: G \to Y$ в точке $x \in G$ по направлению $X_0 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$ необходимо и достаточно существование таких производных A_1 и A_2 функции f в точке x по направлениям векторов e и $-e$ соответственно, что $A_1(e) = -A_2(-e)$. При этом отображение $A: X_0 \to Y$, определенное равенством $A(\alpha e) = \alpha A_1(e)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, является производной функции f в точке x по направлению X_0.*

Для нормированных линейных пространств дифференцируемость функции по пространству (по направлению вектора) совпадает с дифференцируемостью по Фреше (соответственно по Гато) (см. [24], с. 196—207; [27], с. 480—482).

§ 2. Некоторые подмножества полной решетки линейных операций предела

Непосредственно из теорем 1.20, 1.32 и 1.33 вытекает

Теорема 2.1. *Пусть X_0 — векторное подпространство векторного пространства X, $\Phi = X/X_0$ — фактор-пространство, а L_0 — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. Тогда L_0 содержит наименьший элемент, а всякое непустое подмножество в L_0 имеет точную нижнюю границу. Кроме того, в L_0 совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу, и, следовательно, L_0 содержит максимальные элементы. При этом*

а) элемент $\Lambda_0 \in \mathrm{L}_0$ является наименьшим тогда и только тогда, когда в фактор-пространстве (Φ, λ_0) пространства (X, Λ_0) по векторному подпространству X_0 операция предела λ_0 является наименьшим элементом в $\mathcal{L}^*(\Phi)$;

б) если $\Lambda_0 \in \mathrm{L}_0$ — наименьший элемент, то в пространстве (X, Λ_0) последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда для некоторой конечной системы линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, линейная оболочка которых не содержит ненулевого вектора из X_0, векторы x_n представляются в виде $x_n = y_n + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k$, где $y_n \in X_0$, а α_{kn} — числа, для которых $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_{kn}| = 0$;

в) элемент $\Lambda \in \mathrm{L}_0$ является максимальным тогда и только тогда, когда в фактор-пространстве (Φ, λ) пространства (X, Λ) по векторному подпространству X_0 операция предела λ является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1^*(\Phi)$;

г) элемент $\Lambda \in \mathrm{L}_0$ является максимальным тогда и только тогда, когда в пространстве (X, Λ) каждая последовательность $\hat{x}$ либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому $y \notin \Lambda(\dot{0})$. ▶

Предложение 2.1. *Пусть $\hat{x}$ — некоторая последовательность векторов в линейном пространстве (X, Λ). Тогда либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому $y \notin \Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ' в X, что $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda \leqslant \Lambda'$.*

◀ Пусть $\hat{X}_0$ — ядро линейной операции предела Λ, а $\hat{Y}$ — линейная оболочка в $X^{\mathbf{N}}$ множества всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$ и их подпоследовательностей, когда $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся числовые последовательноти. Обозначим через $\hat{X}_0'$ — множество всех таких $\hat{\xi} \in X^{\mathbf{N}}$, что для каждого $\hat{\xi}' \prec \hat{\xi}$ существует $\hat{\xi}'' \prec \hat{\xi}'$ из $\hat{Y} + \hat{X}_0$. Очевидно, $\hat{x} \in \hat{X}_0'$. Легко проверить, что множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы 1.21. Пусть $\dot{y} \in \hat{X}_0'$ для некоторого вектора $y \notin \Lambda(\dot{0})$. Тогда, очевидно, $\dot{y} \in \hat{Y} + \hat{X}_0$. Поэтому $\dot{y} = \hat{y} + \hat{\eta}$, где $\hat{y} \in \hat{Y}$ и $\hat{\eta} \in \hat{X}_0$. Из равенства $\hat{y} = \dot{y} - \hat{\eta}$ вытекает, что последовательность $\hat{y}$ сходится к y в (X, Λ). Однако в силу определения $\hat{Y}$ последовательность $\hat{y}$ представляется в виде $\hat{y} = \hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ с некоторым $m \in \mathbb{N}$, где $\hat{x}_k \prec \hat{x}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, а $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ — сходящиеся числовые последовательности.

Если же $\dot{y} \in \hat{X}_0'$ только при $y \notin \Lambda(\dot{0})$, то множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет также условию 6) теоремы 1.21 и, значит, является ядром некоторой линейной операции предела Λ' в X, причем $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$. Так как $\hat{X}_0 \subset \hat{X}_0'$, то $\Lambda \leqslant \Lambda'$. ▶

Предложение 2.2. *Пусть $\hat{x}$ — ограниченная последовательность в линейном пространстве (X, Λ). Тогда либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору, не принадлежащему $\Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ' в X, что $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$, $\Lambda \leqslant \Lambda'$ и всякое Λ'-ограниченное подмножество в X Λ-ограничено.*

◀ В силу предложения 2.1 либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому $y \notin \Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ' в X, что $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda \leqslant \Lambda'$. В первом случае обозначим $\lim \hat{\alpha}_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. В силу ограниченности $\hat{x}$ каждая из последовательностей $(\hat{\alpha}_k - \dot{\alpha}_k)\hat{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, сходится к нулю в (X, Λ). Поэтому из равенства $\hat{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k\hat{x}_k + \sum\limits_{k=1}^{m} (\hat{\alpha}_k - \dot{\alpha}_k)\hat{x}_k$ получаем, что последовательность $\alpha_1\hat{x}_1 + \alpha_2\hat{x}_2 + \ldots + \alpha_m\hat{x}_m$ сходится к y. Во втором случае обозначим через $\hat{X}_0$ и $\hat{X}_0'$ ядра линейных операций предела Λ и Λ' соответственно. Пусть $\hat{Y}$ — линейная оболочка множества всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$ и их подпоследовательностей, когда $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся числовые последовательности. Как показано в доказательстве предложения 2.1, в качестве $\hat{X}_0'$ можно взять множество всех таких $\hat{\xi} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{\xi}' \prec \hat{\xi}$ найдется $\hat{\xi}'' \prec \hat{\xi}'$ из $\hat{Y} + \hat{X}_0$. Однако в силу Λ-ограниченности $\hat{x}$ каждая последовательность из $\hat{X}_0'$ тоже Λ-ограничена. Отсюда вытекает, что Λ'-ограниченное подмножество в X Λ-ограничено. ▶

Теорема 2.2. *Пусть (X, Λ') — линейное пространство, E — система всех Λ'-ограниченных подмножеств в X, а $\mathbb{L}$ — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что система всех Λ-ограниченных подмножеств совпадает с E. Тогда $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda'(\dot{0})$ для любого $\Lambda \in \mathbb{L}$, причем $\mathbb{L}$ содержит наименьший элемент, а всякое непустое подмножество в $\mathbb{L}$ имеет точную нижнюю границу. Кроме того, в $\mathbb{L}$ совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу, и, следовательно, $\mathbb{L}$ содержит максимальные элементы. При этом*

а) элемент $\Lambda_0 \in \mathbb{L}$ является наименьшим тогда и только тогда, когда в пространстве (X, Λ_0) для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{\alpha}$, что $\hat{\alpha}\hat{x}$ сходится к нулю;

б) элемент $\Lambda \in \mathbb{L}$ является максимальным тогда и только тогда, когда в пространстве (X, Λ) каждая ограниченная последовательность $\hat{x}$ либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору $y \notin \Lambda(\dot{0})$;

в) для максимального $\Lambda \in \mathbb{L}$ линейное пространство (X, Λ) квазиполно.

◀ Пусть $\Lambda \in \mathbb{L}$. Если $x \in \Lambda(\dot{0})$, то последовательность $\hat{x} = (nx : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в пространстве (X, Λ) и, значит, ограничена. Поэтому она ограничена также в пространстве (X, Λ'). Отсюда вытекает, что стационарная последовательность $\dot{x}$ сходится к нулю в (X, Λ'). Следовательно, $x \in \Lambda'(\dot{0})$. Аналогично доказывается, что если $y \in \Lambda'(\dot{0})$, то $y \in \Lambda(\dot{0})$. Значит, $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda'(\dot{0})$.

Линейную операцию предела Λ_0 в X определим равенством $\Lambda_0(\hat{x}) = \bigcap\{\Lambda(\hat{x}) : \Lambda \in \mathrm{L}\}$, $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$. Пусть $\hat{x}$ — ограниченная последовательность в (X, Λ'), а $\hat{\alpha}$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ для каждого $\Lambda \in \mathrm{L}$. Поэтому $0 \in \Lambda_0(\hat{\alpha}\hat{x})$. Отсюда вытекает, что в пространстве (X, Λ_0) множество M ограничено тогда и только тогда, когда $M \in E$. Следовательно, $\Lambda_0 \in \mathrm{L}$. Очевидно, Λ_0 является наименьшим элементом в L. Аналогично доказывается, что в L непустое подмножество имеет точную нижнюю границу.

Для каждого $\Lambda \in \mathrm{L}$ обозначим через $\hat{X}_0(\Lambda)$ ядро линейной операции предела Λ. Пусть $\mathrm{L}' \subset \mathrm{L}$ — непустое совершенно упорядоченное подмножество. Положим $\hat{Y} = \bigcup\{\hat{X}_0(\Lambda) : \Lambda \in \mathrm{L}'\}$. В силу совершенной упорядоченности L' множество $\hat{Y}$ является векторным подпространством в $X^{\mathbf{N}}$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.21, кроме, быть может, условия 5). Обозначим через $\hat{Y}_0$ множество таких $\hat{x} \in X^{\mathbf{N}}$, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ найдется $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{Y}$. Легко проверить, что множество $\hat{Y}_0$ удовлетворяет условиям 1)—6) теоремы 1.21 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции предела Λ_1 в X. Докажем, что $\Lambda_1 \in \mathrm{L}$. Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — ограниченная последовательность в пространстве (X, Λ_1), а $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Стремящуюся к бесконечности последовательность $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ положительных чисел выберем так, чтобы последовательность $\hat{r}\hat{\alpha}$ сходилась к нулю. Тогда $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x}$ сходится к нулю, т. е. $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x} \in \hat{Y}_0$. Однако каждая подпоследовательность последовательности $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (r_{k_n}\alpha_{k_n}x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ из $\hat{Y}$. Имеем, что $\hat{y} \in \hat{X}_0(\Lambda)$ для некоторого $\Lambda \in \mathrm{L}'$ и, значит, $[\hat{y}] \in E$. Так как числовая последовательность $\hat{r}' = \left(r_{k_n}^{-1} : n \in \mathbb{N}\right)$ сходится к нулю, то последовательность $\hat{r}'\hat{y} = (\alpha_{k_n}x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в пространстве (X, Λ'). Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{\alpha}\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в (X, Λ'). Но тогда $\hat{\alpha}\hat{x}$ тоже сходится к нулю в (X, Λ'). Отсюда получаем, что $[\hat{x}] \in E$. Следовательно, $\Lambda_1 \in \mathrm{L}$. Значит, совершенно упорядоченное подмножество L' имеет точную верхнюю границу в L. В силу леммы Цорна в L существует максимальный элемент.

(а) Пусть $\hat{X}_0' \subset X^{\mathbf{N}}$ — подмножество всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$, когда $\hat{x}$ пробегает все ограниченные последовательности в (X, Λ'), а $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся к нулю числовые последовательности. Множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.21, кроме, быть может, условия 5). Обозначим через $\hat{X}_0$ множество всех таких $\hat{y} \in X^{\mathbf{N}}$, что для каждого $\hat{y}' \prec \hat{y}$ найдется $\hat{y}'' \prec \hat{y}'$ из $\hat{X}_0'$. Множество $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям 1)—6) теоремы 1.21 и, значит, является ядром некоторой линейной операции предела Λ_0 в X. Очевидно, $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$ для любого $\Lambda \in \mathrm{L}$. Кроме того, $\Lambda_0 \in \mathrm{L}$. Поэтому Λ_0 является наименьшим элементом в L. Из построения Λ_0 следует, что в (X, Λ_0) каждая сходящаяся к нулю последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, представимой в виде $\hat{y} = \hat{\alpha}'\hat{x}'$, где $\hat{\alpha}' = (\alpha'_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность, а $\hat{x}' = (x'_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ — ограниченная последовательность векторов. Числовую последовательность $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ определим следующим образом: $\alpha_{k_n} = |\alpha'_{k_n}|^{-\frac{1}{2}}$ при $\alpha'_{k_n} \neq 0$, $\alpha_{k_n} = k_n$ при $\alpha'_{k_n} = 0$, а $\alpha_i = 1$ для всех $i \in \mathbb{N}\backslash\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Последовательность $\hat{r} = (\alpha_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ не ограничена, а $(\alpha_{k_n}\alpha'_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Поэтому в силу ограниченности $\hat{x}'$ последовательность $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю. Но тогда $\hat{\alpha}\hat{x}$ тоже сходится к нулю.

Пусть, обратно, элемент $\Lambda_0 \in \mathrm{L}$ такой, что в пространстве (X, Λ_0) каждая сходящаяся к нулю последовательность обладает указанным в утверждении а) свойством. Рассмотрим некоторые $\Lambda \in \mathrm{L}$ и сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x}$ в (X, Λ_0). Очевидно, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}$, для которой существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ положительных чисел, что последовательность $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю в (X, Λ_0). Так как $[\hat{r}\hat{y}] \in E$, а числовая последовательность $\hat{r}' = (r_n^{-1} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то последовательность $\hat{y} = \hat{r}'\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю в (X, Λ). Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в (X, Λ). Но тогда $\hat{x}$ тоже сходится к нулю в (X, Λ). Отсюда следует, что $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$. Значит, Λ_0 является наименьшим элементом в L.

(б) Пусть $\Lambda \in \mathrm{L}$ — максимальный элемент, а $\hat{x}$ — ограниченная последовательность в (X, Λ). Согласно предложению 2.2, либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору, не принадлежащему $\Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ_1 в X, что $\Lambda_1 \in \mathrm{L}$ и $\Lambda \leqslant \Lambda_1$. Во втором случае $\Lambda = \Lambda_1$, так как Λ — максимальный элемент в L. Поэтому в данном случае $\hat{x}$ сходится к нулю.

Пусть, обратно, элемент $\Lambda \in \mathrm{L}$ такой, что в (X, Λ) каждая ограниченная последовательность обладает указанным в утверждении б) свойством. Рассмотрим некоторый элемент $\Lambda_2 \in \mathrm{L}$, удовлетворяющий условию $\Lambda \leqslant \Lambda_2$, и последовательность $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, сходящуюся к нулю в пространстве (X, Λ_2). Очевидно, что последовательность $\hat{x}$ Λ-ограничена. Предположим, что $\hat{x}$ не сходится к нулю в (X, Λ). Тогда, по условию, $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация $\hat{y}$ сходится к некоторому вектору $y \notin \Lambda(\dot{0}) = \Lambda_2(\dot{0})$. В силу $\Lambda \leqslant \Lambda_2$ последовательность $\hat{y}$ сходится к y в (X, Λ_2) и, значит, $y \in \Lambda_2(\dot{0})$. Полученное противоречие доказывает, что $\hat{x}$ сходится к нулю в (X, Λ). Поэтому $\Lambda_2 = \Lambda$, т. е. Λ является максимальным элементом в L.

(в) Пусть $\Lambda \in \mathrm{L}$ — максимальный элемент, а $\hat{x}$ — фундаментальная и ограниченная последовательность в (X, Λ). В силу б) $\hat{x}$ либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что некоторая их линейная комбинация $\hat{y} = \alpha_1\hat{x}_1 + \alpha_2\hat{x}_2 + \alpha_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому $y \notin \Lambda(\dot{0})$. Если во втором случае положить $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$, то из очевидного равенства $\alpha\hat{x}_1 = \hat{y} + \sum\limits_{k=2}^{m} \alpha_k(\hat{x}_1 - \hat{x}_k)$ в силу фундаментальности $\hat{x}$ получим, что последовательность $\alpha\hat{x}_1$ сходится к y. Поэтому $\alpha \neq 0$ и $\hat{x}_1$ сходится к $\alpha^{-1}y$. Но тогда $\hat{x}$ тоже сходится к $\alpha^{-1}y$. Тем самым в любом случае $\hat{x}$ сходится. Следовательно, (X, λ) квазиполно. ▶

Замечание 2.1. Пусть X_0 — векторное подпространство векторного пространства X, а L_0 — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. Тогда из теоремы 2.1 следует, что если $\Lambda' \in \mathrm{L}_0$ — наименьший или максимальный элемент, то в пространстве (X, Λ') каждая ограниченная последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору, не принадлежащему X_0.

Следствие 2.1. *Пусть (X, Λ') — линейное пространство, E — система всех ограниченных подмножеств в (X, Λ'), а L — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что система всех ограниченных подмножеств пространства (X, Λ) совпадает с E. Тогда*

а) если для некоторого $\Lambda \in \mathrm{L}$ пространство (X, Λ) полуметризуемо, то Λ является наименьшим элементом в L;

б) если $\Lambda \in \mathrm{L}$ такое, что в пространстве (X, Λ) каждое ограниченное множество секвенциально квазикомпактно, то Λ — максимальный элемент в L;

в) если в фактор-пространстве (Φ, λ') пространства (X, Λ') по $\Lambda'(\dot{0})$ операция предела λ' является сильнейшей линейной операцией предела, то множество L состоит из единственного элемента Λ'. ▶

§ 3. Об окрестностях нуля

Известная теорема о конечномерности топологического векторного пространства (см. [25], с. 24—25) для линейных пространств с операцией предела принимает следующую формулировку (в доказательстве здесь возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что вполне ограниченное множество может не быть ограниченным).

Теорема 3.1. *Если линейное пространство* (X, Λ) *обладает вполне ограниченной окрестностью нуля, то фактор-пространство* $X/\Lambda(\dot{0})$ *конечномерно, причем если и* $\Lambda(\dot{0})$ *конечномерно, то* X *тоже конечномерно.*

◀ Пусть v — вполне ограниченная окрестность нуля в (X, Λ). Согласно теореме 3.17, для окрестности нуля $\frac{1}{2}v$ существует такое конечное $K \subset X$, что $v \subset K + \frac{1}{2}v$. Для линейной оболочки Y множества K имеем $v \subset Y + \frac{1}{2}v$. Методом индукции докажем, что $v \subset Y + 2^{-n}v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \subset Y + 2^{-k}v$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем $\frac{1}{2}v \subset \frac{1}{2}Y + 2^{-k-1}v$. Поэтому $v \subset Y + \frac{1}{2}Y + 2^{-k-1}v = Y + 2^{-k-1}v$. Следовательно, включение $v \subset Y + 2^{-n}v$ верно для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $H = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (Y + 2^{-n}v)$. Тогда $v \subset H$. Докажем, что $H = X$. Действительно, в противном случае существует $x \in X \backslash H$. Ясно, что $x \notin Y + 2^{-m}v$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $2^{-n}x \notin Y + 2^{-m-n}v$. Значит, $2^{-n}x \notin v$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако последовательность векторов $2^{-n}x$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю и, следовательно, почти вся лежит в v. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $H = X$. Следовательно, $Y + v = X$. Теперь докажем, что $Y + \Lambda(\dot{0}) = X$. С этой целью предположим противное и рассмотрим некоторое $x_0 \in X \backslash (Y + \Lambda(\dot{0}))$. Обозначим через Z линейную оболочку множества $x_0 + Y$ и положим $w = v \cap Z$. Ясно, что $Z = Y + w$, а w является вполне ограниченной окрестностью нуля в конечномерном линейном подпространстве $(Z, \Lambda') \subset (X, \Lambda)$. Имеем, что $x_0 \notin \Lambda'(\dot{0}) = Z \cap \Lambda(\dot{0}) = Y \cap \Lambda(\dot{0})$. Кроме того, как нетрудно убедиться, в конечномерном линейном пространстве вполне ограниченность множества эквивалентна его ограниченности. Поэтому существует такое $r > 0$, что для любого $x \in w$ в представлении $x = \beta x_0 + y$, где $y \in Y$, число β удовлетворяет неравенству $|\beta| < r$. Отсюда вытекает, что и для любого $z \in Y + w$ в представлении $z = \gamma x_0 + y'$, где $y' \in Y$, выполняется неравенство $|\gamma| < r$. Однако это противоречит равенству $Z = Y + w$. Следовательно, $Y + \Lambda(\dot{0}) = X$. ▶

На основании доказательства теоремы 3.1 сформулируем следующее предложение, усиливающее теорему 3.1 и аналогичную теорему для топологического векторного пространства.

Предложение 3.1. *Если линейное пространство* (X, Λ) *обладает такой окрестностью нуля* v, *что* $v \subset Y + \alpha v$ *для некоторых конечномерного векторного подпространства* $Y \subset X$ *и числа* α *с* $|\alpha| < 1$, *а при любом* $x \in X$ *для вещественно линейной оболочки* Z *множества* $x + Y$ *пересечение* $v \cap Z$ *ограничено, то* $X = Y + \Lambda(\dot{0})$. ▶

Будем говорить, что в векторном пространстве X подмножество $M \subset X$ поглощает последовательность $\hat{x}$ векторов из X, если M поглощает множество $[\hat{x}]$. Кроме того, выпуклую оболочку множества $[\hat{x}]$ будем называть также выпуклой оболочкой последовательности $\hat{x}$.

Предложение 3.2. *В линейное пространстве* (X, Λ) *радиально уравновешенное подмножество, которое поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, поглощает также каждое ограниченное подмножество. Кроме того, относительно* (X, Λ) *следующие условия попарно эквивалентны:*

1) для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ *существует такая неограниченная числовая последовательность* $\hat{\alpha}$, *что* $\hat{\alpha}\hat{x}$ *сходится к нулю;*

2) радиально уравновешенное подмножество, которое поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, является окрестностью нуля;

3) радиально уравновешенное подмножество, которое поглощает каждое ограниченное подмножество, является окрестностью нуля.

◀ Пусть радиально уравновешенное подмножество $M \subset X$ поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, а $G \subset X$ — ограниченное подмножество. Предположим, что M не поглощает G. Тогда существует такая последовательность векторов $x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, что $n^{-2}x_n \notin M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $(n^{-1}x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то $rn^{-1}x_n \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором $r > 0$. Но тогда $n^{-2}x_n \in M$ для всех $n > r^{-1}$, поскольку M радиально уравновешено. Полученное противоречие доказывает, что M поглощает G. Из доказанного вытекает эквивалентность условий 2) и 3). Докажем, что из условия 1) следует 2). Предположим, что радиально уравновешенное подмножество $M \subset X$ поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, но не является окрестностью нуля. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $x_n \in X \setminus M$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия 1) следует существование такой подпоследовательности $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$, что для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\hat{y} = (r_n x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. По условию, M поглощает $\hat{y}$, т. е. $r r_n x_{i_n} \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором $r > 0$. Однако $r r_n > 1$ для всех $n \geqslant n'$ при некотором $n' \in \mathbb{N}$. Поэтому $x_{i_n} \in M$ для всех $n \geqslant n'$. Полученное противоречие доказывает, что M является окрестностью нуля.

Теперь докажем, что из условия 2) следует 1). Пусть последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Предположим, что для любой неограниченной числовой последовательности $\hat{\alpha}$ последовательность $\hat{\alpha}\hat{x}$ не сходится к нулю. Тогда $x_n \notin \Lambda(\dot{0})$ для всех $n \geqslant n'$ при некотором $n' \in \mathbb{N}$. Обозначим $H = \{\alpha x_n : |\alpha| \geqslant 1, n \geqslant n'\}$. Множество $M = X \setminus H$ уравновешено. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in H$. С учетом предположений относительно $\hat{x}$ имеем, что $y_n = r_n x_{i_n}$, где $i_n \in \mathbb{N}$ и r_n — некоторые числа, причем $i_n \geqslant n'$ и $\alpha x_{i_n} \notin H$ для любого числа α с $|\alpha| < 1$. Кроме того, последовательность $(r_n x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ может сходиться к нулю только тогда, когда $|r_n| < r$ для некоторого $r > 1$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\frac{1}{r} y_n \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M поглощает $\hat{y}$. Поэтому M поглощает также любую сходящуюся к нулю последовательность и, по условию 2), является окрестностью нуля. Значит, сходящаяся к нулю последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в M. Однако, согласно построению M, $x_n \notin M$ для всех $n \geqslant n'$. Полученное противоречие доказывает существование такой неограниченной числовой последовательности $\hat{\alpha}$, что $\hat{\alpha}\hat{x}$ сходится к нулю. ▶

Предложение 3.3. *В полуметризуемом линейном пространстве* (X, Λ) *каждая фундаментальная последовательность* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *обладает подпоследовательностью* $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, *для которой замыкание выпуклой оболочки множества* $\{\alpha x_{k_n} : n \in \mathbb{N}, |\alpha| \leqslant 1\}$ *ограничено. Кроме того, если выпуклая оболочка каждой сходящейся к нулю последовательности ограничена, то* (X, Λ) *локально выпукло.*

◀ Пусть d — такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ, что все открытые шары с центром в нуле уравновешены. Подпоследовательность $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{x}$ выберем так, чтобы $d(0, x_{k_i} - x_{k_s}) < 2^{-i}$ для всех $s > i$ и $i \in \mathbb{N}$. Докажем, что выпуклая оболочка E множества $\{\alpha x_{k_n} : n \in \mathbb{N}, |\alpha| \leqslant 1\}$ ограничена. Рассмотрим последовательность векторов $y_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящуюся к нулю последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$. Нужно доказать, что последовательность $(r_n y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Для числа $\varepsilon > 0$ выберем $\nu \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{1-\nu} < \varepsilon$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор y_n представляется в виде $y_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} t_{ni} x_{k_i}$, где $m_n > \nu$ — некоторое натуральное число, а числа t_{ni} такие, что $\sum\limits_{i=1}^{m_n} |t_{ni}| \leqslant 1$. Так как в (X, Λ) фундаментальная последовательность ограничена, то найдется такое $\delta \in (0; 1)$, что $d(0, r x_{k_i}) < \frac{\varepsilon}{2(\nu+1)}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и числа r с $|r| < \delta$. Очевидно, имеет место неравенство $d(0, r x_{k_i} - r x_{k_s}) < 2^{-i}$ при $s > i$ и $|r| < \delta$. Выберем $n' \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|r_n| < \delta$ для всех $n \geqslant n'$. Тогда из равенства

$$r_n y_n = \sum_{i=1}^{\nu} r_n t_{ni} x_{k_i} + \Big(\sum_{i=\nu+1}^{m_n} t_{ni}\Big) r_n x_{k_{m_n}} + \sum_{i=\nu+1}^{m_n} r_n t_{ni} (x_{k_i} - x_{k_{m_n}})$$

при $n \geqslant n'$ получим $d(0, r_n y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{i=\nu+1}^{m_n} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-\nu} < \varepsilon$. Поэтому последовательность $(r_n y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю и, значит, множество E ограничено. Но тогда в (X, Λ) замыкание $\overline{E}$ тоже ограничено.

Докажем второе утверждение. В (X, Λ) фундаментальную систему окрестностей нуля $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из уравновешенных окрестностей нуля, выберем так, чтобы $2u_{n+1} \subset u_n$. Выпуклую оболочку множества u_n обозначим через v_n. Тогда $2v_{n+1} \subset v_n$. Система окрестностей нуля $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в X некоторую линейную операцию предела Λ', причем $\Lambda \leqslant \Lambda'$ и пространство (X, Λ') полуметризуемо. Докажем, что $\Lambda' = \Lambda$, т. е. всякая сходящаяся к нулю в (X, Λ') последовательность $\hat{z}$ сходится к нулю и в (X, Λ). Рассмотрим такую стремящуюся к бесконечности последовательность $\hat{r}$ положительных чисел, что $\hat{r}\hat{z}$ сходится к нулю в (X, Λ'). Так как последовательность $\hat{r}\hat{z}$ почти вся лежит в каждом v_n, то в (X, Λ) сходящуюся к нулю последовательность можно выбрать так, чтобы $[\hat{r}\hat{z}]$ содержалось в ее выпуклой оболочке, ограниченной в (X, Λ) по условию. Но тогда $[\hat{r}\hat{z}]$ тоже ограничено в (X, Λ). Поэтому $\hat{z}$ сходится к нулю в (X, Λ). Таким образом, $\Lambda' = \Lambda$, а $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в (X, Λ). Следовательно, (X, Λ) локально выпукло. ▶

Предложение 3.4. *Пусть Λ_0 и Λ — линейные операции предела в векторном пространстве X, порождающие одну и ту же систему ограниченных подмножеств, причем пространство (X, Λ_0) полуметризуемо, а (X, Λ) квазиполно. Тогда*

а) если в (X, Λ) квазизамыкание секвенциально квазикомпактного подмножества ограничено, то (X, Λ_0) полно;

б) если в (X, Λ) для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, квазизамыкание выпуклой оболочки множества $\{r_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, то (X, Λ_0) локально выпукло и полно.

◀ (а) В (X, Λ_0) фундаментальную систему окрестностей нуля $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из уравновешенных окрестностей нуля u_n, выберем так, чтобы $u_{n+1} + u_{n+1} \subset u_n$. Тогда $u_{n+1}^+ + u_{n+1}^+ \subset u_n^+$, где квазизамыкания взяты в (X, Λ). Система окрестностей нуля $\{u_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в X некоторую линейную операцию предела Λ', причем $\Lambda_0 \leqslant \Lambda'$ и пространство (X, Λ') полуметризуемо. Докажем, что $\Lambda' = \Lambda_0$, т. е. всякая сходящаяся к нулю в (X, Λ') последовательность $\hat{\xi} = (\xi_i : i \in \mathbb{N})$ сходится к нулю и в (X, Λ_0). Стремящуюся к бесконечности последовательность чисел $r_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы последовательность $\hat{\eta} = (\eta_i : i \in \mathbb{N})$ векторов $\eta_i = r_i \xi_i$ сходилась к нулю в (X, Λ'), а последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ выберем так, чтобы $\eta_i \in u_n^+$ для всех $i \geqslant k_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего неравенствам $k_n \leqslant i < k_{n+1}$ с некоторым $n \in \mathbb{N}$, выберем последовательность векторов $z_{i\nu} \in u_n$, $\nu \in \mathbb{N}$, сходящуюся к η_i в (X, Λ). С учетом $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$ из построения множества $M = \{z_{i\nu} : i \geqslant k_1, \nu \in \mathbb{N}\}$ легко следует, что M секвенциально квазикомпактно в (X, Λ). По условию, в (X, Λ) квазизамыкание M^+ ограничено. Однако $\{\eta_i : i \geqslant k_1\} \subset M^+$. Поэтому последовательность $\hat{\eta}$ ограничена в (X, Λ), а значит, и в (X, Λ_0). Но тогда $\hat{\xi}$ сходится к нулю в (X, Λ_0). Отсюда с учетом $\Lambda_0 \leqslant \Lambda'$ вытекает, что $\Lambda' = \Lambda_0$. Следовательно, $\{u_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в (X, Λ_0). Рассмотрим в (X, Λ_0) фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ и окрестность нуля u_i. Найдется такое $n' \in \mathbb{N}$, что $y_n - y_{n'} \in u_{i+1}$ для всех $n \geqslant n'$. Рассмотрим также последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $x_n = y_{n'+n} - y_{n'} \in u_{i+1}$. Каждая из последовательностей $\hat{y}$ и $\hat{x}$ фундаментальна и ограничена в квазиполном пространстве (X, Λ) и, значит, сходится в нем. Очевидно, $\Lambda(\hat{y}) = y_{n'} + \Lambda(\hat{x})$ и $\Lambda(\hat{x}) \subset u_{i+1}^+$. Для $y \in \Lambda(\hat{y})$ имеем $y - y_{n'} \in u_{i+1}^+$ и $y_n - y = (y_n - y_{n'}) - (y - y_{n'}) \in u_{i+1} - u_{i+1}^+ \subset u_i^+$ при всех $n \geqslant n'$. Поэтому $\hat{y}$ сходится к y в (X, Λ_0), т. е. (X, Λ_0) полно.

(б) Очевидно, в рассматриваемом случае выпуклая оболочка каждой сходящейся к нулю в (X, Λ_0) последовательности ограничена. Поэтому в силу предложения 3.3 пространство (X, Λ_0) локально выпукло. Докажем его полноту. Рассмотрим в (X, Λ_0) фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. В силу $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$ последовательность $\hat{y}$ фундаментальна и ограничена в квазиполном пространстве (X, Λ) и, значит, сходится в нем к некоторому $y \in X$. Выберем подпоследовательность $\hat{y}' = (y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ так, чтобы последовательность векторов $x_n = 2^{n+1}(y_{k_n} - y_{k_{n+1}})$, $n \in \mathbb{N}$, сходилась к нулю в (X, Λ_0). Легко проверить, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$2^n(1-2^{-m})^{-1}(y_{k_n} - y_{k_{n+m}}) = \sum_{i=0}^{m-1}(1-2^{-m})^{-1}2^{-i-1}x_{i+n},$$

причем $\sum\limits_{i=0}^{m-1}(1-2^{-m})^{-1}2^{-i-1} = 1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность векторов $2^n(1-2^{-m})^{-1}(y_{k_n} - y_{k_{n+m}})$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к $2^n(y_{k_n} - y)$ в (X, Λ). По условию, в (X, Λ) квазизамыкание выпуклой оболочки множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. Поэтому множество $\{2^n(y_{k_n} - y) : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. Следовательно, последовательность векторов $y_{k_n} - y$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в (X, Λ_0), т. е. $\hat{y}'$ сходится к y. Таким образом, фундаментальная в (X, Λ_0) последовательность $\hat{y}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{y}'$. Отсюда вытекает, что $\hat{y}$ сходится в (X, Λ_0) и, значит, (X, Λ_0) полно. ►

Замечание 3.1. Теорема 2.2 и утверждение а) предложения 3.4 показывают существование линейного пространства (X, Λ), в котором квазизамыкание секвенциально квазикомпактного подмножества может не быть ограниченным. Очевидно, такая линейная операция предела Λ не определяется векторной топологией. Более того, система окрестностей нуля $\{u^+ : u \in U_0\}$, где U_0 — полная система окрестностей нуля пространства (X, Λ), не определяет операцию предела Λ.

Теорема 3.2. *Пусть (X, Λ) — квазиполное линейное пространство, в котором для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью, квазизамыкание выпуклой оболочки которой ограничено, а Λ_0 — сильнейшая линейная операция предела в X, при которой всякое Λ-ограниченное подмножество в X Λ_0-ограничено. Если для подмножества $M \subset X$ множество $M + \Lambda_0(\dot{0})$ поглощающее и вещественно уравновешенное, то множество $M + M^+$, где квазизамыкание взято в пространстве (X, Λ_0), является окрестностью нуля в (X, Λ_0), причем если $M + \Lambda_0(\dot{0})$ еще и выпуклое, то M^+ тоже является окрестностью нуля в (X, Λ_0).*

◄ Пусть $\hat{e} = (e_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в (X, Λ), квазизамыкание E^+ выпуклой оболочки E которой ограничено. Обозначим через G и G' выпуклые оболочки множеств $E \cup (-E)$ и $E^+ \cup (-E^+)$ соответственно. Заметим, что если $K \subset X$ — выпуклое подмножество, то для выпуклой оболочки K_1 множества $K \cup (-K)$ справедливы равенства

$$K_1 = \bigcup\{tK - (1-t)K : t \in [0;\, 1]\} = \bigcup\{rtK - r(1-t)K : t \in [0;\, 1],\ r \in [-1;\, 1]\}.$$

Поэтому выпуклые множества G и G' ограничены и вещественно уравновешены. Рассмотрим полное нормированное вещественное линейное пространство $(l_1, \|\cdot\|)$ всех таких последовательностей $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ вещественных чисел, что $\|\hat{\alpha}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| < \infty$. Докажем, что для любого $\hat{\alpha} \in l_1$ последовательность $\hat{s} = (s_i : i \in \mathbb{N})$ векторов $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n e_n$ сходится в (X, Λ). Для произвольной подпоследовательности $(s_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ при $k_i \neq i$ имеем $s_{k_i} - s_i = \sum\limits_{n=i+1}^{k_i}\alpha_n e_n$. Последовательность чисел $c_i = \sum\limits_{n=i}^{\infty}|\alpha_n|$, $i \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Кроме того, $s_{k_i} - s_i \in c_i G$ и $s_i \in c_1 G$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Так как G ограничено, то последовательность векторов $s_{k_i} - s_i$, $i \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в (X, Λ) и, значит, последовательность $\hat{s}$ фундаментальна и ограничена в (X, Λ). Поэтому $\hat{s}$ сходится в квазиполном пространстве (X, Λ). Множество пределов $\Lambda(\hat{s})$ (или предел последовательности $\hat{s}$ в случае операции однозначного предела Λ) примем в качестве суммы ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \Lambda(\hat{s})$. Обозначим через X_1 множество всех векторов $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ при всех $(\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$. Очевидно, что X_1 является вещественным векторным подпространством в X (оно может не быть замкнутым в пространствах (X, Λ) и (X, Λ_0)). При этом $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda_0(\dot{0}) \subset X_1$ и $e_n \in X_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что функционал $p : X_1 \to \mathbb{R}_+$, определенный равенством

$$p(x) = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| : (\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1,\ x \in \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \Big\}, \quad x \in X_1,$$

является полунормой на X_1. Пусть Λ_1 — операция предела в X_1, определенная полунормой p. Множество $\{x \in X : p(x) \leqslant 1\} \subset G'$ ограничено в (X, Λ). Поэтому сходящаяся в полунормируемом вещественном линейном пространстве (X_1, Λ_1) последовательность сходится к тому же пределу также в каждом пространстве (X, Λ) и (X, Λ_0). При этом $\Lambda_1(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$ и $p(e_n) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем, что (X_1, Λ_1) полно. Рассмотрим в (X_1, Λ_1) фундаментальную последовательность $\hat{z} = (z_i : i \in \mathbb{N})$. Выберем последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ так, чтобы $p(z_{k_{i+1}} - z_{k_i}) < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Заметим, что если $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ для некоторого $(\beta_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$, то

$$p(x) = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n + \gamma_n| : (\gamma_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n = \Lambda(\dot{0}) \Big\}.$$

Учитывая это и действуя по индукции, для каждого $i \in \mathbb{N}$ можно так выбрать элемент $\hat{\alpha}^{(i)} = (\alpha_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}) \in l_1$, что $z_{k_i} \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} e_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_n^{(i+1)} - \alpha_n^{(i)}\right| < 2^{-i}$. Очевидно, для любых $i \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_n^{(i+m)} - \alpha_n^{(i)}\right| < 2^{1-i}$. Поэтому последовательность выбранных элементов $\hat{\alpha}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, фундаментальна в полном пространстве $(l_1, \|\cdot\|)$ и, следовательно, сходится к некоторому $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$. Рассмотрим некоторое $z \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем $p(z_{k_i} - z) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\alpha_n^{(i)} - \alpha_n\right|$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_i p(z_{k_i} - z) = 0$, т. е. последовательность $(z_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ сходится к z в (X_1, Λ_1). Так как фундаментальная последовательность $\hat{z}$ обладает сходящейся подпоследовательностью, то $\hat{z}$ тоже сходится и, значит, (X_1, Λ_1) полно.

Пусть $H \subset X$ — поглощающее и вещественно уравновешенное подмножество. Рассмотрим в (X, Λ_0) сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x}$ и некоторую ее подпоследовательность $\hat{x}'$. С учетом утверждения а) теоремы 2.2 из условий теоремы следует, что $\hat{x}'$ обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$, для которой существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, что последовательность $(r_n^2 y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в (X, Λ_0), а $\hat{y}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}' = (y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, для которой квазизамыкание в (X, Λ) выпуклой оболочки множества $\{r_{k_n} y_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. В рассмотренной выше последовательности $(e_n : n \in \mathbb{N})$ возьмем $e_n = r_{k_n} y_{k_n}$. Очевидно, множество $H_1 = H \cap X_1$ поглощающее и уравновешенное в вещественном векторном подпространстве $X_1 \subset X$. Поэтому $X_1 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} nH_1$. Согласно теореме Бэра (см. [24], с. 41; [25], с. 53), X_1 является множеством второй категории в полном полунормируемом вещественном линейном пространстве (X_1, Λ_1). Следовательно, в (X_1, Λ_1) при некотором $n \in \mathbb{N}$ замыкание множества nH_1 обладает внутренней точкой. Но тогда $\overline{H}_1$ тоже обладает внутренней точкой. Так как $H_1 \cap (\overline{H}_1)^\circ \neq \varnothing$ и $H_1 = -H_1$, то $H_1 + \overline{H}_1$ является окрестностью нуля в (X_1, Λ_1).

Имеем, что $p(r_{k_n} y_{k_n}) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\hat{y}'$ сходится к нулю в (X_1, Λ_1). Поэтому найдется такое $n' \in \mathbb{N}$, что $y_{k_n} \in H_1 + \overline{H}_1$ для всех $n \geqslant n'$. Однако $\overline{H}_1$ совпадает с квазизамыканием множества H_1 в (X_1, Λ_1). Так как сходящаяся в (X_1, Λ_1) последовательность сходится к тому же пределу и в (X, Λ_0), то $\overline{H}_1$ содержится в квазизамыкании множества H_1, взятом в (X, Λ_0). Значит, $H_1 + \overline{H}_1 \subset H + H^+$, где квазизамыкание H^+ взято в (X, Λ_0). Отсюда вытекает, что $y_{k_n} \in H + H^+$ для всех $n \geqslant n'$. Таким образом, в (X, Λ_0) каждая подпоследовательность $\hat{x}'$ сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}'$, которая почти вся лежит в $H + H^+$. Поэтому последовательность $\hat{x}$ тоже почти вся лежит в $H + H^+$. Следовательно, $H + H^+$ является окрестностью нуля в (X, Λ_0).

Рассмотрим теперь такое $M \subset X$, что множество $H = M + \Lambda_0(\dot{0})$ поглощающее и вещественно уравновешенное. Как уже было доказано, $H + H^+$ является окрестностью нуля в (X, Λ_0). Однако $\Lambda_0(\dot{0}) + H^+ = M^+$ и $H + H^+ = M + M^+$. Поэтому $M + M^+$ является окрестностью нуля в (X, Λ_0). Если же H еще и выпуклое, то $\frac{1}{2}(H+H^+) \subset H^+ = M^+$, т. е. M^+ является окрестностью нуля в (X, Λ_0). ▶

Из теорем 2.2 и 3.2 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть (X, Λ) — квазиполное линейное пространство, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{x}$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$ ограничено. Если для подмножества $M \subset X$ множество $M + \Lambda(\dot{0})$ поглощающее и вещественно уравновешенное, то множество $M + M^+$ является окрестностью нуля, причем если $M + \Lambda(\dot{0})$ еще и выпуклое, то M^+ тоже является окрестностью нуля.* ▶

В силу предложения 3.3 всякое полное полуметризуемое линейное пространство удовлетворяет условиям следствия 3.1. При этом, как показывает теорема 1.35, пространство, удовлетворяющее условиям следствия 3.1, может быть первой категории и секвенциально первой категории.

В связи с теоремой 3.2 и следствием 3.1 отметим, что если в линейном пространстве (X, Λ) система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела Λ, то замыкание выпуклой оболочки ограниченого подмножества ограничено.

§ 4. Обобщения теоремы Банаха–Штейнгауза и теоремы об открытом отображении

Используя теорему 3.2, докажем следующее утверждение, обобщающее классическую теорему Банаха–Штейнгауза (см. [24], с. 116; [25], с. 54).

Теорема 4.1. *Пусть (X, Λ) — квазиполное линейное пространство, в котором для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью, квазизамыкание выпуклой оболочки которой ограничено, Λ_0 — сильнейшая линейная операция предела в X, при которой всякое Λ-ограниченное подмножество в X Λ_0-ограничено, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\widetilde{V}_0 = \{u + u^+ : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in X$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то она равномерно ограничена и равностепенно $(\Lambda_0, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывна.*

◀ Пусть $v \in \widetilde{V}_0$. С учетом предложения 1.3 выберем уравновешенную окрестность нуля $u \in \widetilde{U}_0$ так, чтобы $u + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = u$ и $u + u^+ \subset v$. Обозначим $M = \bigcap_{f \in F} f^{-1}(u)$. Для каждого $x \in X$ в силу ограниченности $F(x)$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $F(x) \subset nu$. Поэтому $x \in nM$ в силу аддитивности отображений $f \in F$, т. е. множество M поглощающее. Для $x \in M$ и $r \in [-1; 1]$ имеем, что $rf(x) \in u$ при каждом $f \in F$. Из утверждения а) теоремы 2.2 и утверждения б) теоремы 1.25 следует, что каждое отображение $f \in F$ $(\Lambda_0, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывно, а в силу предложения 1.8 имеем также $f(rx) \in rf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset u + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = u$. Поэтому $rx \in M$ и, значит, M вещественно уравновешено. Но тогда в силу теоремы 3.2 множество $w = M + M^+$, где квазизамыкание взято в (X, Λ_0), является окрестностью нуля в (X, Λ_0). С учетом теоремы 1.12 из включения $f(M) \subset u$ получаем $f(M^+) \subset u^+$. Следовательно, $f(w) = f(M + M^+) = f(M) + f(M^+) \subset u + u^+ \subset v$. Отсюда вытекает равностепенно $(\Lambda_0, \widetilde{\Lambda})$-секвенциальная непрерывность, а значит, и равномерная ограниченность F. ▶

Следствие 4.1. *Пусть (X, Λ) — квазиполное линейное пространство, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{x}$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$ ограничено, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u + u^+ : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in X$ множество $\{f(x) : f \in F\}$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то она равностепенно секвенциально непрерывна.* ▶

Следствие 4.2. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, удовлетворяющие условиям следствия 4.1, $\mathcal{F}_0$ — множество всех секвенциально непрерывных либо аддитивных, либо вещественно линейных, либо линейных отображений X в Y, а Λ_X — операция предела в $\mathcal{F}_0$ поточечной сходимости на X. Если $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полно, то линейное пространство $(\mathcal{F}_0, \Lambda_X)$ тоже полно.* ▶

Теорема 4.2. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, причем $(Y, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u + u^+ : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, а $M \subset X$ — такое выпуклое подмножество, что квазизамыкание M^+ ограничено и всякая фундаментальная последовательность векторов из M сходится в (X, Λ). Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in M^+$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то для выпуклой оболочки G множества $M \cup (-M)$ и любого числа $r \in \mathbb{R}$ множество $F(rG) = \bigcup_{f \in F} f(rG)$ ограничено. Если при этом каждое отображение $f \in F$ секвенциально непрерывно, то множество $F(rG^+)$ тоже ограничено.*

◀ Вещественно линейную оболочку множества M^+ обозначим через X'. С учетом выпуклости M^+ каждое $z \in X'$ представляется в виде $z = \alpha x + \beta\xi$, где $x \in M^+$ и $\xi \in M^+$, а α и β — вещественные числа. Из ограниченности и аддитивности отображения $f \in F$ следует, что $f(z) \in \alpha f(x) + \beta f(\xi) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Поэтому множество $F(z)$ ограничено. Докажем ограниченность множества $F(M)$. Рассмотрим некоторую последовательность $\hat{e} = (e_n : n \in \mathbb{N})$ в M и, исходя из нее, как и в доказательстве теоремы 3.2, построим вещественное векторное подпространство $X_1 \subset X$ и полное полунормируемое вещественное линейное пространство (X_1, Λ_1). Имеем, что $X_1 \subset X'$, $e_n \in X_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\hat{e}$ ограничена в (X_1, Λ_1), причем сходящаяся в (X_1, Λ_1) последовательность сходится к тому же пределу и в (X, Λ). Ясно, что пространства (X_1, Λ_1), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и система $F' = \{f' = f|_{X_1} : f \in F\}$ отображений X_1 в Y удовлетворяют всем условиям следствия 4.1. Поэтому система F' равностепенно $(\Lambda_1, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывна и, значит, равномерно ограничена. Для любой последовательности отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, из равенств $f_n(e_n) = f'_n(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $f'_n = f_n|_{X_1}$, вытекает, что последовательность $(f_n(e_n) : n \in \mathbb{N})$ ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, т. е. $F(M)$ ограничено. Отсюда легко следует также ограниченность множества $F(rG)$. Если каждое отображение $f \in F$ секвенциально непрерывно, то ограниченность $F(rG^+)$ вытекает из включения $F(rG^+) \subset (F(rG))^+$, так как в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ квазизамыкание ограниченного подмножества ограничено. ▶

На основании теорем 4.1 и 4.2 сформулируем следующие две теоремы для топологических векторных пространств, усиливающие известные результаты в [25], с. 57, и [28], с. 106.

Теорема 4.3. *Пусть* (X, τ) *и* $(Y, \widetilde{\tau})$ *— топологические векторные пространства, причем* (X, τ) *секвенциально полно и в нем для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов* x_n *и чисел* $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *последовательность* $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ *обладает подпоследовательностью, имеющей ограниченную выпуклую оболочку. Если система* F *ограниченных аддитивных отображений* X *в* Y *такая, что для каждого* $x \in X$ *множество* $\{f(x) : f \in F\}$ *ограничено в* $(Y, \widetilde{\tau})$, *то она равномерно ограничена.* ►

Теорема 4.4. *Пусть* (X, τ) *и* $(Y, \widetilde{\tau})$ *— топологические векторные пространства,* M *— выпуклое, ограниченное и секвенциально полное подмножество в* (X, τ), *а* G *— выпуклая оболочка множества* $M \cup (-M)$. *Если система* F *ограниченных аддитивных отображений* X *в* Y *такая, что для каждого* $x \in M$ *множество* $\{f(x) : f \in F\}$ *ограничено в* $(Y, \widetilde{\tau})$, *то для любого* $r \in \mathbb{R}$ *множество* $\bigcup\limits_{f \in F} f(rG)$ *тоже ограничено.* ►

Отметим, что в теоремах 4.3 и 4.4 не предполагается хаусдорфовость топологических векторных пространств.

При помощи теоремы 3.2 докажем и следующий вариант теоремы об открытом отображении (см. [24], с. 127; [25], с. 58—60; [28], с. 100, 210).

Теорема 4.5. *Пусть* (X, Λ) *— полное полуметризуемое линейное пространство,* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— квазиполное линейное пространство, в котором для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов* y_n *и чисел* $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *последовательность* $(r_n y_n : n \in \mathbb{N})$ *обладает подпоследовательностью, квазизамыкание выпуклой оболочки которой ограничено, а* $\widetilde{\Lambda}_0$ *— сильнейшая линейная операция предела в* Y, *при которой всякое* $\widetilde{\Lambda}$*-ограниченное подмножество в* Y $\widetilde{\Lambda}_0$*-ограничено. Если любые два вектора пространства* $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, *разность которых не принадлежит* $\widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$, *имеют непересекающиеся окрестности и существует ограниченное аддитивное отображение* f *векторного пространства* X *на* Y, *то пространство* $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ *полуметризуемо и полно, а для всякой окрестности нуля* w *пространства* (X, Λ) *множество* $f(w) + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ *является окрестностью нуля в* $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, *причем в случае* $f(\Lambda(\dot{0})) = \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ *множество* $f(w)$ *тоже является окрестностью нуля в* $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ *и, следовательно,* f *является* $(\Lambda, \widetilde{\Lambda}_0)$*-открытым отображением. Кроме того, если при этом* (X, Λ) *локально выпукло (полунормируемо), то и* $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ *локально выпукло (полунормируемо).*

◄ Заметим, что в силу утверждения б) теоремы 1.25 отображение f секвенциально непрерывно относительно каждой операции предела $\widetilde{\Lambda}_0$ и $\widetilde{\Lambda}$. Пусть d — такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ, что все открытые шары с центром в нуле уравновешены. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $u_n = \{x \in X : d(x, 0) < 2^{-n}\}$ и $v_n = f(u_n)$. Пусть $y \in Y$. В силу $f(X) = Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$. Однако $x \in ku_n$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Так как $f(ku_n) = kv_n$, то $y = f(x) \in f(ku_n) = kv_n$. Поэтому множество v_n поглощающее. Пусть теперь $y \in v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ и $t \in [-1; 1]$. Тогда $ty \in tf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для некоторого $x \in u_n$, причем $tx \in u_n$. В силу предложения 1.8 $tf(x) \in f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Значит, $ty \in f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Поэтому множество $v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ вещественно уравновешено. Но тогда в силу равенства $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ и теоремы 3.2 множество $v_n + v_n^+$, где квазизамыкание взято в пространстве $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Из $u_{n+1} + u_{n+1} \subset u_n$ получаем, что $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ и $v_{n+1}^+ + v_{n+1}^+ \subset v_n^+$. Следовательно, v_n^+ тоже является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Кроме того, система окрестностей нуля $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ определяет некоторую линейную операцию предела $\widetilde{\Lambda}'$ в Y, причем

$\widetilde{\Lambda}_0 \leqslant \widetilde{\Lambda}'$ и пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}')$ полуметризуемо. В силу секвенциальной непрерывности f для каждой окрестности нуля v пространства $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $v_n \subset v$. Поэтому из условия, наложенного на пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, вытекает, что $\widetilde{\Lambda}'(\dot{0}) = \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$. Учитывая это, докажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Для этого достаточно доказать включение $v_{n+1}^+ \subset v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$. Рассмотрим некоторое $y_1 \in v_{n+1}^+$ и последовательно для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем $y_i \in v_{n+i}^+$ следующим образом. Пусть y_i для некоторого $i \in \mathbb{N}$ уже выбрано. Так как v_{n+i+1}^+ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, а $y_i \in v_{n+i}^+$, то $v_{n+i} \cap (y_i - v_{n+i+1}^+) \neq \varnothing$. Отсюда вытекает существование такого $x_i \in u_{n+i}$, что $f(x_i) \in y_i - v_{n+i+1}^+$. Положим $y_{i+1} = y_i - f(x_i)$. Очевидно, $y_{i+1} \in v_{n+i+1}^+$. Построенная последовательность $(y_i : \in i \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda}')$. Поскольку $d(x_i, 0) < 2^{-n-i}$, последовательность векторов $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$, $k \in \mathbb{N}$, фундаментальна в полном пространстве (X, Λ) и, значит, сходится к некоторому $x \in X$. Ясно, что $d(x, 0) < 2^{-n}$, т. е. $x \in u_n$. Из равенств $f(x_i) = y_i - y_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, получаем $f(s_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} (y_i - y_{i+1}) = y_1 - y_{k+1}$. Поэтому в силу секвенциальной непрерывности f последовательность векторов $y_1 - y_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к $f(x)$ в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Но тогда она сходится к каждому из векторов $f(x)$ и y_1 в $(Y, \widetilde{\Lambda}')$. Следовательно, $y_1 \in f(x) + \widetilde{\Lambda}'(\dot{0}) = f(x) + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) \subset v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$, т. е. $v_{n+1}^+ \subset v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$. Из этого включения вытекает, что $\widetilde{\Lambda}' = \widetilde{\Lambda}_0$. Таким образом, пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ полуметризуемо, причем $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) : n \in \mathbb{N}\}$ являются его фундаментальными системами окрестностей нуля. Очевидно, для всякой окрестности нуля w пространства (X, Λ) найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $u_n \subset w$. Поэтому $v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) \subset f(w) + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ и, значит, $f(w) + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. В случае $f(\Lambda(\dot{0})) = \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ с учетом $u_n = u_n + \Lambda(\dot{0})$ имеем $v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) = f(u_n + \Lambda(\dot{0})) = f(u_n) \subset f(w)$, т. е. $f(w)$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$.

Докажем полноту $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Рассмотрим в нем фундаментальную последовательность $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ и фундаментальную систему окрестностей нуля $\{v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) : n \in \mathbb{N}\}$. Подпоследовательность $\hat{z}' = (z_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ выберем так, чтобы $z_{k_n} - z_{k_{n+1}} \in v_n + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $z_{k_n} - z_{k_{n+1}} = f(\xi_n) + \eta_n$, где $\xi_n \in u_n$ и $\eta_n \in \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$. Положим $\xi_n' = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ и $\eta_n' = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$. Имеем $z_{k_1} - z_{k_{n+1}} = f(\xi_n') + \eta_n'$, причем $\eta_n' \in \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0})$. Последовательность $(\eta_n' : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, а $(\xi_n' : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в (X, Λ) и, следовательно, сходится к некоторому $\xi \in X$. Учитывая это, из равенств $z_{k_{n+1}} = z_{k_1} - f(\xi_n') - \eta_n'$, $n \in \mathbb{N}$, получим, что $\hat{z}'$ сходится к $z_{k_1} - f(\xi)$. Тем самым $\hat{z}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{z}'$. Поэтому $\hat{z}$ сходится, т. е. $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ полно.

В случае локально выпуклого (X, Λ) указанную выше полуметрику d можно выбрать так, чтобы множества u_n были выпуклыми. Тогда множества v_n^+ тоже будут выпуклыми, а пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ локально выпуклым. Если же (X, Λ) полунормируемо, а полуметрика d определена полунормой, то $u_n = 2^{-n} u_1$ и $v_n^+ = 2^{-n} v_1^+$. Так как $\{2^{-n} v_1^+ : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, то v_1^+ является ограниченной и выпуклой окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Поэтому, согласно теореме 1.31, $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ полунормируемо. ▶

Отметим, что если в теореме 4.5 условие типа отделимости пространства $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ заменить ограниченностью в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ квазизамыкания секвенциально квазикомпактного подмножества, то утверждения о полуметризуемости $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$, а также его локальной выпуклости или полунормируемости можно доказать без условия полноты пространства (X, Λ).

Следствие 4.3. *Пусть (X, Λ) — полное полуметризуемое линейное пространство, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — квазиполное линейное пространство, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{y}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $\hat{y}' \prec \hat{y}$ ограничено, причем любые два вектора из Y, разность которых не принадлежит $\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, имеют непересекающиеся окрестности. Если существует ограниченное аддитивное отображение f векторного пространства X на Y, то $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полуметризуемо, а для всякой окрестности нуля w пространства (X, Λ) множество $f(w) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, причем в случае $f(\Lambda(\dot{0})) = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ множество $f(w)$ тоже является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и, следовательно, f является открытым отображением. Кроме того, если при этом (X, Λ) локально выпукло (полунормируемо), то и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ локально выпукло (полунормируемо).* ▶

§ 5. О выпуклых множествах

Теорема 5.1. *Пусть μ_v — функционал Минковского поглощающего, вещественно уравновешенного и выпуклого подмножества v в векторном пространстве X, $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в X, для которой числовое множество $\{\mu_v(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено, а $\gamma > 1$ — некоторое число. Тогда существует такая подпоследовательность $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $\mu_v(x) > \gamma$ для всех x из ее выпуклой оболочки.*

◀ Число $k_1 \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $\mu_v(x_{k_1}) \geqslant \gamma + 1$. Докажем существование таких числовых последовательностей $(k_n : n \in \mathbb{N})$ и $(p_n : n \in \mathbb{N})$, где $k_n \in \mathbb{N}$ и $p_n = 1$ или $p_n = -1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что $k_n < k_{n+1}$ и $1 + \mu_v(x_{k_n}) < \mu_v(x_{k_{n+1}})$, а при каждом $m \in \mathbb{N}$ для любого вектора x из выпуклой оболочки H_m множества $\{p_n x_{k_n} : 1 \leqslant n \leqslant m\}$ выполняется неравенство $\mu_v(x) \geqslant \gamma + 2^{1-m}$. Для этого достаточно в предположении, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ выбраны, доказать возможность выбора чисел k_{m+1} и p_{m+1}. Последовательность натуральных чисел $i_n > k_m$, $n \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы $i_n < i_{n+1}$ и $1 + \mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{i_{n+1}})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\mu_v(x_{i_1}) > 1 + \mu_v(x_{k_m})$. Допустим не существует требуемой пары чисел k_{m+1} и p_{m+1}. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие векторы $y'_n \in H_m$, $y''_n \in H_m$ и числа $t'_n \in (0;\, 1)$, $t''_n \in (0;\, 1)$, что

$$\mu_v((1 - t'_n)y'_n + t'_n x_{i_n}) < \gamma + 2^{-m}, \qquad \mu_v((1 - t''_n)y''_n - t''_n x_{i_n}) < \gamma + 2^{-m}. \tag{1}$$

Отсюда получаем $\mu_v(t''_n(1 - t'_n)y'_n + t'_n(1 - t''_n)y''_n) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m})$. Положим $t_n = t''_n(1 - t'_n)(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))^{-1}$. Тогда имеем, что $t_n \in (0;\, 1)$ и $1 - t_n = t'_n(1 - t''_n)(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))^{-1}$. Последнее неравенство напишем в виде

$$(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))\mu_v(t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m}). \tag{2}$$

Однако $t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n \in H_m$ и, значит, $\mu_v(t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n) \geqslant \gamma + 2^{1-m}$. Поэтому из (2) следует, что $(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))(\gamma + 2^{1-m}) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m})$. Это неравенство после простых преобразований принимает вид

$$\frac{1}{t'_n} + \frac{1}{t''_n} < \gamma 2^{m+1} + 4. \tag{3}$$

С другой стороны, в силу (1) имеем, что $t'_n \mu_v(x_{i_n}) - (1 - t'_n)\mu_v(y'_n) < \gamma + 2^{-m}$ и $t''_n \mu_v(x_{i_n}) - (1 - t''_n)\mu_v(y''_n) < \gamma + 2^{-m}$. Отсюда с учетом $\mu_v(y'_n) \leqslant \mu_v(x_{k_m})$ и $\mu_v(y''_n) \leqslant \mu_v(x_{k_m})$ получаем

$$t'_n \mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{k_m}) + \gamma + 2^{-m}, \qquad t''_n \mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{k_m}) + \gamma + 2^{-m}.$$

Однако последовательность чисел $\mu_v(x_{i_n})$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к бесконечности. Поэтому из последних неравенств вытекает, что числовые последовательности

$(t'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(t''_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к нулю. А это противоречит неравенству (3). Следовательно, при некотором $s \in \mathbb{N}$ одно из неравенств

$$\mu_v((1-t)x + tx_{i_s}) \geqslant \gamma + 2^{-m}, \qquad \mu_v((1-t)x - tx_{i_s}) \geqslant \gamma + 2^{-m}$$

выполняется для всех $x \in H_m$ и $t \in [0;\,1]$. Положим $k_{m+1} = i_s$. Таким образом, возможность выбора требуемых чисел k_{m+1}, p_{m+1}, а значит, и числовых последовательностей $(k_n : n \in \mathbb{N})$, $(p_n : n \in \mathbb{N})$ доказана. Обозначим через H выпуклую оболочку множества $\{p_n x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, $H = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} H_m$. Поэтому $\mu_v(x) > \gamma$ для любого $x \in H$. Последовательность натуральных чисел $s_1 < s_2 < \ldots$ выберем так, чтобы последовательность чисел p_{s_n}, $n \in \mathbb{N}$, была стационарной. Тогда подпоследовательность $\hat{x}' = (x_{k_{s_n}} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{x}$ удовлетворяет требованию теоремы. ►

Теорема 5.1 более применима вместе со следующей теоремой (в связи с ней см. [25], с. 70—72, 99).

Теорема 5.2. *Пусть μ_v — функционал Минковского поглощающего и выпуклого подмножества v в векторном пространстве X, $H \subset X$ — такое непустое выпуклое подмножество, что $\inf\limits_{z \in H} \mu_v(z) = \alpha \geqslant 1$, $x_0 \in H$ — некоторый вектор, а μ_u — функционал Минковского поглощающего и выпуклого множества $u = v - H + x_0$. Тогда $1 \leqslant \mu_v(x_0)(1 + \mu_v(x_0) - \alpha)^{-1} \leqslant \mu_u(x_0) \leqslant \alpha$. Кроме того, существуют такой линейный функционал f на X и такое число $\gamma \in (0;\,1]$, что $\Re(f(x_0)) = \mu_u(x_0)$, $\Re(f(x)) \leqslant \mu_u(x) \leqslant \mu_v(x)$ и $\Re(f(y)) \leqslant \gamma \leqslant \gamma + \mu_u(x_0) - 1 \leqslant \Re(f(z))$ для всех $x \in X$, $y \in v$ и $z \in H$. При этом если множество v вещественно уравновешено, то $|\Re(f(x))| \leqslant \mu_v(x)$ и $|\Re(f(y))| \leqslant \gamma$ для всех $x \in X$ и $y \in v$, а если v уравновешено, то $|f(x)| \leqslant \mu_v(x)$ и $|f(y)| \leqslant \gamma$ для всех $x \in X$ и $y \in v$.*

◄ Предположим, что $\mu_u(x_0) < 1$. Тогда найдется такое число $r \in (0;\,1)$, что $x_0 \in ru$. Поэтому $x_0 = r(y_0 - z_0 + x_0)$ для некоторых $y_0 \in v$ и $z_0 \in H$. Положим $z_1 = (1-r)x_0 + rz_0$. Очевидно, $z_1 \in H$ и $z_1 = ry_0$. По условию, $\mu_v(z_1) \geqslant 1$, а с другой стороны, $\mu_v(z_1) = \mu_v(ry_0) = r\mu_v(y_0) \leqslant r < 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_u(x_0) \geqslant 1$.

Для любых $\varepsilon > 0$ и $z \in H$, положив $t = \mu_v(z)$, имеем $1 \leqslant \alpha \leqslant t$, $(t+\varepsilon)^{-1}z \in v$ и $x_0 - (t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}z = (t+\varepsilon)^{-1}z - z + x_0 \in u$. Поэтому

$$\mu_u(x_0) - (t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}\mu_u(z) \leqslant \mu_u(x_0 - (t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}z) \leqslant 1,$$

т. е. $\mu_u(x_0) \leqslant 1 + (t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}\mu_u(z)$. Однако $\mu_u(z) \leqslant t$ и, значит, $\mu_u(x_0) \leqslant 1 + t(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}$. Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что $\mu_u(x_0) \leqslant t = \mu_v(z)$. Но тогда в силу произвольности z получаем $\mu_u(x_0) \leqslant \alpha$.

Обозначим $r = \mu_u(x_0)$. Имеем, что $1 \leqslant r \leqslant \alpha$ и $(r+\varepsilon)^{-1}x_0 \in u$ для любого $\varepsilon > 0$. Поэтому $(r+\varepsilon)^{-1}x_0 = y' - z' + x_0$ для некоторых $y' \in v$ и $z' \in H$. Так как $z' - (r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}x_0 = y'$, то

$$\mu_v(z') - (r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}\mu_v(x_0) \leqslant \mu_v(z' - (r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}x_0) = \mu_v(y') \leqslant 1,$$

т. е. $\mu_v(z') \leqslant 1 + (r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}\mu_v(x_0)$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $\mu_v(z') \leqslant 1 + (r-1)r^{-1}\mu_v(x_0)$. Значит, $\alpha \leqslant 1 + (r-1)r^{-1}\mu_v(x_0)$. Из этого неравенства для числа $r = \mu_u(x_0)$ получается указанная в теореме оценка снизу.

На одномерном вещественном векторном подпространстве, содержащем x_0, определим вещественно линейный вещественный функционал φ_1, положив $\varphi_1(tx_0) = t\mu_u(x_0) \leqslant \mu_u(tx_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Согласно теореме Хана–Банаха о продолжении функционала с сохранением мажоранты (см. [24], с. 135—138; [25], с. 68—70), существует такой вещественно линейный вещественный функционал φ на X, что $\varphi(tx_0) = \varphi_1(tx_0) = t\mu_u(x_0)$ и $\varphi(x) \leqslant \mu_u(x) \leqslant \mu_v(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in X$. Для любых $y \in v$ и $z \in H$ с учетом $y - z + x_0 \in u$ имеем $\varphi(y) - \varphi(z) + \mu_u(x_0) = \varphi(y - z + x_0) \leqslant \mu_u(y - z + x_0) \leqslant 1$. Отсюда получаем, что $\varphi(y) + \mu_u(x_0) - 1 \leqslant \varphi(z)$. Обозначим $\gamma = \sup\limits_{y \in v} \varphi(y)$. Очевидно, $\gamma \leqslant \sup\limits_{y \in v} \varphi(y) = 1$. Так как $t_0 x_0 \in v$ для некоторого $t_0 > 0$ и

$\varphi(t_0x_0)=t_0\mu_u(x_0)>0$, то $\gamma>0$. Таким образом, $\varphi(y)\leqslant\gamma\leqslant\gamma+\mu_u(x_0)-1\leqslant\varphi(z)$ для всех $y\in v$ и $z\in H$.

Если множество v вещественно уравновешено, то $-\varphi(x)=\varphi(-x)\leqslant\mu_v(-x)=$ $=\mu_v(x)$ и $-\varphi(y)=\varphi(-y)\leqslant\gamma$ для всех $x\in X$ и $y\in v$. Поэтому $|\varphi(x)|\leqslant\mu_v(x)$ и $|\varphi(y)|\leqslant\gamma$. Ясно, что в случае вещественного векторного пространства в качестве требуемого функционала может служить $f=\varphi$.

В случае комплексного векторного пространства X требуемый функционал f определяется формулой $f(x)=\varphi(x)-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)$, $x\in X$. Нужно проверить лишь справедливость указанных в теореме оценок для f в случае уравновешенного v. Для $x\in X$ положим $c=|f(x)|(f(x))^{-1}$ при $f(x)\neq 0$ и $c=1$ при $f(x)=0$. Тогда получим, что $|c|=1$ и $|f(x)|=cf(x)=f(cx)=\varphi(cx)$. Однако если v уравновешено, то $\varphi(cx)\leqslant\mu_v(cx)=|c|\mu_v(x)=\mu_v(x)$ и $\varphi(cy)\leqslant\gamma$ для всех $x\in X$ и $y\in v$, так как $cy\in v$. Поэтому $|f(x)|\leqslant\mu_v(x)$ и $|f(y)|\leqslant\gamma$. ▶

При помощи теорем 5.1 и 5.2 докажем следующую теорему, которая в теории топологических векторных пространств доказывается применением теоремы Банаха–Алаоглу и предложения, аналогичного теореме 4.4 (см. [25], с. 80—84).

Теорема 5.3. *Если операция предела линейного пространства* (X,Λ) *определяется некоторой локально выпуклой топологией* τ *в* X, *то для ограниченности подмножества* $M\subset X$ *достаточна ограниченность числового множества* $f(M)$ *для любого* τ*-непрерывного линейного функционала* f *на* X.

◀ Пусть подмножество $M\subset X$ не ограничено. Тогда существуют последовательность $(y_n : n\in\mathbb{N})$ в M и сходящаяся к нулю последовательность чисел $\alpha_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, а также выпуклая и уравновешенная окрестность нуля $v\in\tau$, для которых $\alpha_n^2y_n\notin v$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Положим $x_n=\alpha_ny_n$. Пусть μ_v — функционал Минковского множества v. Очевидно, что $\mu_v(x_n)\geqslant\alpha_n^{-1}$. Поэтому числовое множество $\{\mu_v(x_n):n\in\mathbb{N}\}$ не ограничено. В силу теоремы 5.1 существует такая последовательность натуральных чисел $k_1<k_2<\ldots$, что выпуклая оболочка H множества $\{x_{k_n}:n\in\mathbb{N}\}$ не пересекается с v. А в силу теоремы 5.2 существуют такие линейный функционал f на X и число $\gamma>0$, что $\Re(f(z))\geqslant\gamma$ и $|f(x)|\leqslant\mu_v(x)$ для всех $z\in H$ и $x\in X$. Из последнего неравенства вытекает, что функционал f τ-непрерывен. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем также $|f(x_{k_n})|\geqslant|\Re(f(x_{k_n}))|\geqslant\gamma$. Значит, $|f(y_{k_n})|=\alpha_{k_n}^{-1}|f(x_{k_n})|\geqslant\gamma\alpha_{k_n}^{-1}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что числовое множество $f(M)$ не ограничено. ▶

В связи с теоремой 5.3 заметим, что если локально выпуклая топология τ в векторном пространстве X содержит все выпуклые открытые окрестности нуля линейного пространства (X,Λ), то Λ-секвенциально непрерывный линейный функционал на X непрерывен в топологии τ (операция предела Λ может не определяться топологией τ). Можно построить пример линейного пространства (X,Λ), операция предела которого определяется локально выпуклой топологией в X, и Λ-секвенциально непрерывного линейного функционала на X, не непрерывного в этой топологии. Отсюда вытекает, что в X существуют две различные локально выпуклые топологии, определяющие одну и ту же операцию предела последовательности Λ (примером таких топологий, как известно (см. [26], с. 292), могут служить секвенциальная топология и слабая топология нормированного линейного пространства $(l_1,\|\cdot\|)$).

В качестве еще одного применения теорем 5.1 и 5.2 докажем следующее предложение, примыкающее к теореме об открытом отображении.

Предложение 5.1. *Пусть* (X,Λ) *и* $(Y,\widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, а* f *— вещественно линейное отображение* X *на* Y. *Тогда*

а) если f *переводит каждую выпуклую окрестность нуля пространства* (X,Λ) *в окрестность нуля пространства* $(Y,\widetilde{\Lambda})$, *то для любого линейного функционала* φ *на* Y, *не являющегося секвенциально непрерывным, функционал* ψ *на* X, *определенный равенством* $\psi(x)=\Re(\varphi(f(x)))$, $x\in X$, *тоже не является секвенциально непрерывным;*

б) если в $(Y,\widetilde{\Lambda})$ *для каждой сходящейся к нулю последовательности* $\hat{y}$ *существует такая неограниченная числовая последовательность* $\hat{\alpha}$, *что* $\hat{\alpha}\hat{y}$ *сходится к нулю, а отображение* f *такое, что для любого линейного функциона-*

ла φ на Y, не являющегося секвенциально непрерывным, функционал ψ на X, определенный равенством $\psi(x)=\Re(\varphi(f(x)))$, $x\in X$, тоже не является секвенциально непрерывным, то f переводит каждую выпуклую окрестность нуля пространства (X, Λ) в окрестность нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

◀ (а) Пусть φ — линейный функционал на Y. Секвенциальная непрерывность φ эквивалентна секвенциальной непрерывности функционала g на Y, определенного равенством $g(y)=\Re(\varphi(y))$, $y\in Y$. Обозначим через v множество всех таких $y\in Y$, что $|g(y)|<1$. Пусть ψ — функционал на X, определенный равенством $\psi(x)=g(f(x))$, $x\in X$, а u — множество всех таких $x\in X$, что $|\psi(x)|<1$. Ясно, что $f(u)=v$. Кроме того, множества u и v выпуклые. Если g не является секвенциально непрерывным, то v не является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Но тогда u тоже не является окрестностью нуля в (X, Λ). А это означает, что ψ не является секвенциально непрерывным.

(б) Пусть u — вещественно уравновешенная выпуклая окрестность нуля в (X, Λ). Тогда множество $v=f(u)$ поглощающее, вещественно уравновешенное и выпуклое. Предположим, что v не является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, т. е. существует такая сходящаяся к нулю последовательность $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, что $y_n\notin v$ для всех $n\in\mathbb{N}$. По условию, $\hat{y}$ обладает подпоследовательностью $(y_{k_n} : n\in\mathbb{N})$, для которой существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность чисел $r_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, что последовательность векторов $z_n=r_n y_{k_n}$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Пусть μ_v — функционал Минковского множества v. Имеем $\mu_v(z_n)=r_n\mu_v(y_{k_n})\geqslant r_n$. Поэтому числовое множество $\{\mu_v(z_n) : n\in\mathbb{N}\}$ не ограничено. В силу теоремы 5.1 существует такая последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$, что выпуклая оболочка H множества $\{z_{i_n} : n\in\mathbb{N}\}$ не пересекается с v. А в силу теоремы 5.2 существуют такие линейный функционал φ на Y и число $\gamma>0$, что $|\Re(\varphi(y))|\leqslant\gamma$ и $\Re(\varphi(z))\geqslant\gamma$ для всех $y\in v$ и $z\in H$. Отсюда следует, что функционал ψ на X, определенный равенством $\psi(x)=\Re(\varphi(f(x)))$, $x\in X$, удовлетворяет неравенству $|\psi(x)|\leqslant\gamma$ для всех $x\in u$. Поэтому функционал ψ секвенциально непрерывен. Но тогда, по условию, функционал φ тоже секвенциально непрерывен и, значит, последовательность чисел $\varphi(z_{i_n})$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Это противоречит неравенству $\Re(\varphi(z_{i_n}))\geqslant\gamma$, $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, v является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. ▶

Замечание 5.1. Векторное пространство X^* всех секвенциально непрерывных линейных функционалов, определенных на линейном пространстве (X, Λ), называется *сопряженным с* (X, Λ) векторным пространством. Отображение $\Lambda^* : X^{\mathbb{N}}\to 2^X$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ множество $\Lambda^*(\hat{x})$ всех таких $x\in X$, что $\lim\limits_n f(x_n)=f(x)$ для любого $f\in X^*$, является линейной операцией предела в X, находится в отношении $\Lambda\leqslant\Lambda^*$ и называется операцией предела последовательности *ослабленной* (или *слабой*) сходимости, соответствующей пространству (X, Λ). Заметим, что X^* является также сопряженным с (X, Λ^*) векторным пространством, а операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству (X, Λ^*), совпадает с Λ^*. Слабейшая топология τ^* в X, в которой непрерывны все функционалы из X^*, называется *ослабленной* (или *слабой*) топологией, соответствующей пространству (X, Λ). Если τ и τ' — секвенциальные топологии пространств (X, Λ) и (X, Λ^*) соответственно, то $\tau^*\subset\tau'\subset\tau$. Топология τ^* локально выпукла и определяет операцию предела Λ^*. Пусть $\mathbb{L}$ — множество тех линейных операций предела в X, каждая из которых порождает ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ. Теорема 5.3 показывает, что в некоторых случаях $\Lambda^*\in\mathbb{L}$. Возможны случаи, когда Λ является наименьшим , а Λ^* — максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathbb{L}$, причем X является множеством второй категории в (X, Λ) и первой категории в (X, Λ^*). Примером может служить случай, когда Λ является операцией предела бесконечномерного рефлексивного банахова пространства. Действительно, в силу теоремы Банаха–Алаоглу и теории Эберлейна–Шмульяна (см. [26], с. 283—287) в пространстве (X, Λ^*) ограниченное (т. е. ограниченное по норме) подмножество секвенциально квазикомпактно.

Поэтому, согласно утверждению б) следствия 2.1, Λ^* является максимальным элементом в $\mathbb{L}$. Кроме того, замкнутый шар является замкнутым (см. теорему 5.5) и секвенциально компактным множеством в (X, Λ^*), которое в силу теоремы 3.1 не имеет квазивнутренних точек. Отсюда вытекает, что X является множеством первой категории и секвенциально первой категории в (X, Λ^*). Банахово пространство $\mathcal{C}[0;\ 1]$ всех непрерывных числовых функций, определенных на отрезке $[0;\ 1]$ вещественной оси, где норма элемента $x \in \mathcal{C}[0;\ 1]$ задается равенством $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$, сепарабельно и нерефлексивно. Если Λ — операция предела пространства $\mathcal{C}[0;\ 1]$, то $\Lambda^* \in \mathbb{L}$ и Λ^* является операцией предела поточечной сходимости на $[0;\ 1]$ ограниченных по норме последовательностей непрерывных функций (см. [24], с. 170), причем Λ является наименьшим элементом в $\mathbb{L}$, но Λ^* не является максимальным элементом в $\mathbb{L}$.

Теорема 5.4. *Пусть в линейном пространстве* (X, Λ) *система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела* Λ, *а каждая ограниченная последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору, не принадлежащему* $\Lambda(\dot{0})$. *Тогда операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству* (X, Λ), *совпадает с* Λ.

◀ Пусть Λ^* — операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству (X, Λ). Имеем, что $\Lambda \leqslant \Lambda^*$. В силу теоремы 5.3 подмножество в X Λ-ограничено тогда и только тогда, когда оно Λ^*-ограничено. Поэтому из теоремы 2.2 вытекает, что $\Lambda^* = \Lambda$. ▶

В силу теорем 1.20, 1.35, 2.1 и замечания 2.1 из теоремы 5.4 вытекает

Следствие 5.1. *Пусть* X_0 *— векторное подпространство векторного пространства* X, *а* Λ *— сильнейшая линейная операция предела в* X, *для которой* $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. *Тогда операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству* (X, Λ), *совпадает с* Λ, *а сопряженное с* (X, Λ) *векторное пространство — с множеством всех линейных функционалов на* X, *обращающихся в нуль на* X_0. ▶

Отметим, что если (X, Λ) есть указанное в замечании 5.1 пространство $\mathcal{C}[0;\ 1]$, а Λ^* — операция предела ослабленной сходимости, соответствующая этому пространству, то линейное пространство (X, Λ^*) не удовлетворяет второму условию теоремы 5.4, хотя операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству (X, Λ^*), совпадает с Λ^*.

В связи с теоремой 5.4 и следствием 2.1 рассмотрим также следующий пример. Пусть G — непустое открытое множество на комплексной плоскости $(\mathbb{C}, \lim)$, $\mathcal{F}$ — множество всех аналитических функций $f : G \to \mathbb{C}$, $\mathfrak{S}$ — система всех компактных подмножеств в G, а $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$. Ясно, что в линейном пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ множество ограничено тогда и только тогда, когда оно как множество функций равномерно ограничено на системе $\mathfrak{S}$. Согласно теореме Монтеля (см. [29], с. 198), в пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ ограниченное множество секвенциально квазикомпактно. Отсюда следует, что пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ полно и в нем последовательность сходится к $f \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда она ограничена и сходится к f поточечно на G. Кроме того, в силу утверждения б) следствия 2.1 операцию предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ нельзя ослабить с сохранением системы всех ограниченных множеств. Заметим, что в $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств $v_n = \{f \in \mathcal{F} : |f(z)| < n^{-1},\ z \in M_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где последовательность множеств $M_n \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{N}$, выбрана так, что $M_n \subset M_{n+1}$ и каждое $M \in \mathfrak{S}$ содержится в некотором M_n. Поэтому пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ метризуемо и локально выпукло. Отсюда в силу утверждения а) следствия 2.1 вытекает, что операцию предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ нельзя усилить с сохранением системы всех ограниченных множеств. Кроме того, в силу теоремы 5.4 операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$, совпадает с $\Lambda_{\mathfrak{S}}$.

В связи со следующей теоремой см. [25], с. 71, 78.

Теорема 5.5. *Пусть* (X, Λ) *— локально выпуклое линейное пространство, а* τ^* *— соответствующая ему ослабленная топология. Тогда* *а) если в (X, Λ) непустые и непересекающиеся выпуклые множества K и M такие, что K секвенциально компактно, а M замкнуто, то существуют такой секвенциально непрерывный линейный функционал f на X и такие числа $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ и $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, что $\Re(f(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Re(f(y))$ для всех $x \in \overline{K}$ и $y \in M$;*

б) замкнутое в (X, Λ) выпуклое множество τ^*-замкнуто.

◀ (а) С учетом утверждения д) предложения 1.5 можно так выбрать выпуклую открытую окрестность нуля u, чтобы $(\overline{K}+u)\bigcap(M+u)=\emptyset$. Для некоторой точки $x_0 \in K$ обозначим $v=\overline{K}+u-x_0$ и $w=M+u-x_0$. Ясно, что множества v и w выпуклы, открыты и не пересекаются, причем v является окрестностью нуля. В силу теоремы 5.2 существуют такой секвенциально непрерывный линейный функционал f на (X, Λ) и такое число $\gamma > 0$, что $\Re(f(x)) \leqslant \gamma \leqslant \Re(f(y))$ для всех $x \in v$ и $y \in w$. Однако множества $\{\Re(f(x)) : x \in v\}$ и $\{\Re(f(y)) : y \in w\}$ открыты. Поэтому $\Re(f(x)) < \gamma < \Re(f(y))$ для всех $x \in v$ и $y \in w$. Положим $\gamma_2 = \gamma + \Re(f(x_0))$. Тогда $\Re(f(x)) < \gamma_2 < \Re(f(y))$ для всех $x \in \overline{K}+u$ и $y \in M+u$. В силу компактности $f(\overline{K})$ найдется такое $\gamma_1 < \gamma_2$, что $\Re(f(x)) < \gamma_1$ для всех $x \in \overline{K}$. Таким образом, $\Re(f(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Re(f(y))$ для всех $x \in \overline{K}$ и $y \in M$.

(б) Пусть H — замкнутое выпуклое подмножество в (X, Λ). В силу а) для каждого $x_0 \in X \setminus H$ существуют такие секвенциально непрерывный линейный функционал f на X и число $\gamma \in \mathbb{R}$, что $\Re(f(x_0)) < \gamma < \Re(f(y))$ при всех $y \in H$. Однако множество $\{x \in X : \Re(f(x)) < \gamma\}$ является τ^*-открытой окрестностью точки x_0 и не пересекается с H. Поэтому множество H τ^*-замкнуто. ▶

В связи с утверждением б) теоремы 5.5 заметим, что в силу теоремы 5.2 в любом линейном пространстве замкнутая выпуклая окрестность нуля замкнута также в ослабленной топологии. Кроме того, если в векторном пространстве X линейные операции предела Λ и Λ' такие, что $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda'(\dot{0})$ и $\Lambda \leqslant \Lambda'$, то замкнутое секвенциально компактное подмножество пространства (X, Λ) замкнуто и секвенциально компактно также в (X, Λ').

Предложение 5.2. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $(f_i : i \in \mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность линейных отображений X в Y, а $\widetilde{p}$ — секвенциально непрерывная полунорма на Y. Тогда по формуле $p(x) = \overline{\lim\limits_{i}}\, \widetilde{p}(f_i(x))$, $x \in X$, определяется секвенциально непрерывная полунорма p на X.*

◀ Так как для каждого $x \in X$ последовательность векторов $f_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, а полунорма $\widetilde{p}$ секвенциально непрерывна, то последовательность чисел $\widetilde{p}(f_i(x))$, $i \in \mathbb{N}$, ограничена. Поэтому $p(x) < \infty$. Проверить, что p является полунормой на X, нетрудно. Докажем, что полунорма p секвенциально непрерывна. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из определения числа $p(x_n)$ следует существование такого $i_n \in \mathbb{N}$, что $p(x_n) < \widetilde{p}(f_{i_n}(x_n)) + n^{-1}$, причем можно считать $i_n < i_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из равностепенно секвенциальной непрерывности последовательности отображений f_i, $i \in \mathbb{N}$, вытекает, что последовательность векторов $f_{i_n}(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Так как полунорма $\widetilde{p}$ секвенциально непрерывна, то последовательность чисел $\widetilde{p}(f_{i_n}(x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Поэтому последовательность чисел $p(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, тоже сходится к нулю. Следовательно, полунорма p секвенциально непрерывна в нуле и, значит, секвенциально равномерно непрерывна. ▶

Теорема 5.6. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность линейных функционалов на X, а X_n — ядро функционала f_n. Тогда*

а) по формуле $p(x) = \overline{\lim\limits_{n}}\, |f_n(x)|$, $x \in X$, определяется секвенциально непрерывная полунорма p на X;

б) множество H тех $x \in X$, для которых последовательность чисел $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, является замкнутым векторным подпространством в X и содержит векторное подпространство $X_0 = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \bigcap\limits_{n \geqslant k} X_n$;

в) существует такой линейный функционал f на X, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$ и последовательность $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в H;

г) для каждого сепарабельного векторного подпространства $X' \subset X$ существует такая подпоследовательность $\hat{f}' = (f_{i_n} : n \in \mathbb{N})$, что множество H' тех $x \in X$, для которых последовательность чисел $f_{i_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, содержит векторное подпространство $X' + X_0'$, где $X_0' = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant k} X_{i_n}$.

◀ Утверждения а) и б) вытекают из предложения 5.2 и теоремы 1.28. Включение $X_0 \subset H$ очевидно. Докажем в). По формуле $g(y) = \lim\limits_n f_n(y)$, $y \in H$, определяется линейный функционал g на H. Так как $|g(y)| = p(y)$ для всех $y \in H$, то, по теореме Хана–Банаха, существует такой линейный функционал f на X, что $f(y) = g(y)$ и $|f(x)| \leqslant p(x)$ для всех $y \in H$ и $x \in X$. Очевидно, f секвенциально непрерывен. В силу теоремы 1.26 последовательность $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в H. Утверждение г) вытекает из теоремы 1.29 с учетом утверждения а) теоремы 1.25. ▶

Заметим, что из теоремы 5.6 легко вытекает известный результат о том, что в гильбертовом пространстве ограниченное подмножество слабо секвенциально квазикомпактно (см. [30], с. 83—85).

§ 6. О дифференцируемых отображениях

Как известно (см. [24], с. 203—204), если вещественная функция g определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ вещественной оси и имеет в каждой точке $t \in (a; b)$ правую производную $g'_+(t)$, то $|g(b) - g(a)| \leqslant (b-a) \sup\limits_{a<t<b} |g'_+(t)|$. Кроме того, если g определена и непрерывна на промежутке $(a; b)$ и имеет на нем непрерывную правую производную, то g имеет также непрерывную производную на $(a; b)$.

Докажем следующую теорему о конечных приращениях (см. [24], с. 201—204).

Теорема 6.1. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $G \subset X$ — такое подмножество, что $x + th \in G$ для некоторых $x \in G$ и $h \in X$ при всех $t \in [0; 1]$, а $f : G \to Y$ — такая функция, что функция $g : [0; 1] \to Y$, определенная равенством $g(t) = f(x + th)$, $t \in [0; 1]$, секвенциально непрерывна. Если функция f дифференцируема в каждой точке $x + th$, $t \in (0; 1)$, по направлению h и имеет производную f'_{x+th} в точке $x + th$ по направлению h, то для любого секвенциально непрерывного вещественно линейного вещественного функционала φ на Y и функционала Минковского μ_v всякой вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ выполняются неравенства*

$$|\varphi(f(x+h) - f(x))| \leqslant \sup_{0<t<1} |\varphi(f'_{x+th}(h))|, \tag{4}$$

$$\mu_v(f(x+h) - f(x)) \leqslant \sup_{0<t<1} \mu_v(f'_{x+th}(h)). \tag{5}$$

Если же функция f дифференцируема в каждой точке $x + th$, $t \in (0; 1)$, по направлению одномерного вещественного векторного подпространства $X_0 = \{rh : r \in \mathbb{R}\}$ и имеет производную f'_{x+th} в точке $x + th$ по направлению X_0, то справедливы неравенства (4), (5) и, кроме того, для каждого указанного выше функционала φ существует такое число $\theta \in (0; 1)$, что

$$\varphi(f(x+h) - f(x)) = \varphi(f'_{x+\theta h}(h)). \tag{6}$$

◀ Пусть φ — секвенциально непрерывный вещественно линейный вещественный функционал на Y, а ψ — функция, определенная равенством $\psi(t) = \varphi(f(x + th))$, $t \in [0; 1]$, которая, очевидно, непрерывна. Докажем, что ψ имеет правую производную $\psi'_+(t)$ в каждой точке $t \in (0; 1)$, причем $\psi'_+(t) = \varphi(f'_{x+th}(h))$. С этой целью рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность чисел $r_n \in (0; 1 - t)$, $n \in \mathbb{N}$. В силу секвенциальной непрерывности φ из равенства

$$r_n^{-1}(\psi(t+r_n)-\psi(t))-\varphi(f'_{x+th}(h))=\varphi(r_n^{-1}(f(x+th+r_nh)-f(x+th)-f'_{x+th}(r_nh)))$$

получаем $\psi'_+(t)=\lim\limits_n r_n^{-1}(\psi(t+r_n)-\psi(t))=\varphi(f'_{x+th}(h))$. Из указанных свойств функции ψ вытекает, что $|\psi(1)-\psi(0)|\leqslant\sup\limits_{0<t<1}|\psi'_+(t)|$. Отсюда с учетом равенств $\psi(1)=\varphi(f(x+h))$ и $\psi(0)=\varphi(f(x))$ получаем (4). Пусть μ_v — функционал Минковского вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. В силу теоремы Хана–Банаха о продолжении линейного функционала с сохранением мажоранты можно так выбрать функционал φ, что $\varphi(f(x+h)-f(x))=$ $=\mu_v(f(x+h)-f(x))$ и $|\varphi(y)|\leqslant\mu_v(y)$ для всех $y\in Y$. Тогда из (4) получим (5).

Предположим теперь, что функция f дифференцируема в каждой точке $x+th$, $t\in(0;\,1)$, по направлению X_0. Тогда, как легко убедиться, функция ψ имеет производную $\psi'(t)$ в каждой точке $t\in(0;\,1)$, причем $\psi'(t)=\varphi(f'_{x+th}(h))$. Согласно теореме Лагранжа (см. [31], с. 226), существует такое $\theta\in(0;\,1)$, что $\psi(1)-\psi(0)=$ $=\psi'(\theta)$, т. е. выполняется равенство (6). ▶

Следующая теорема тоже обобщает и усиливает результат, известный в случае нормированных линейных пространств (см. [24], с. 204—206).

Теорема 6.2. *Пусть (X,Λ) — линейное пространство, $X_0\subset X$ — вещественное векторное подпространство, $G\subset X$ — непустое открытое подмножество, $(Y,\widetilde{\lambda})$ — линейное пространство с операцией однозначного предела, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\lambda}$, $f:G\to Y$ — секвенциально непрерывная функция, дифференцируемая в каждой точке $x\in G$ по направлению любого вектора $e\in X_0$, а $A_x:X_0\to Y$ для каждого $x\in G$ — такое отображение, что при любом $e\in X_0$ сужение отображения A_x на множество $\{\alpha e:\alpha\in\mathbb{R}_+\}$ является производной функции f в точке x по направлению e. Пусть, кроме того, для каждого $x\in G$ выполняются следующие условия:*

1) отображение A_x секвенциально непрерывно в нуле;

2) если векторы $e\in X_0$, $h\in X_0$ и сходящиеся к нулю последовательности вещественных чисел r_n и t_n, $n\in\mathbb{N}$, такие, что $x+r_ne+t_nh\in G$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то последовательность $(A_{x+r_ne+t_nh}(e):n\in\mathbb{N})$ сходится к $A_x(e)$ в $(Y,\widetilde{\lambda})$;

3) если последовательность чисел $t_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, и сходящаяся к нулю последовательность векторов $h_n\in X_0$, $n\in\mathbb{N}$, такие, что $x+h_n\in G$ для всех $n\in\mathbb{N}$, а последовательность $(t_nh_n:n\in\mathbb{N})$ ограничена, то последовательность векторов $A_{x+h_n}(t_nh_n)-A_x(t_nh_n)$, $n\in\mathbb{N})$, сходится к нулю в $(Y,\widetilde{\lambda})$.

Тогда функция f дифференцируема в каждой точке $x\in G$ по направлению X_0, а A_x является ее производной (притом единственной) в точке x по направлению X_0.

◀ Сначала докажем, что для каждого $x\in G$ отображение A_x вещественно линейно. Так как A_x положительно однородно, то $A_x(0)=0$. Рассмотрим некоторые векторы $e\in X_0$, $h\in X_0$ и секвенциально непрерывный вещественно линейный вещественный функционал φ на Y. Поскольку G открыто, число $\varepsilon>0$ можно выбрать так, чтобы $x+re+th\in G$ при всех $|r|<\varepsilon$ и $|t|<\varepsilon$. Функцию g двух вещественных переменных определим равенством $g(r,\,t)=\varphi(f(x+re+th))$ для всех $|r|<\varepsilon$ и $|t|<\varepsilon$. Из условия 2) вытекает, что g имеет непрерывные частные производные g'_r и g'_t, причем $g'_r(r,\,t)=\varphi(A_{x+re+th}(e))$, $g'_t(r,\,t)=\varphi(A_{x+re+th}(h))$. Пусть α и β — некоторые вещественные числа. Выберем число $\varepsilon'\in(0;\,\varepsilon)$ так, чтобы $x+r\alpha e+t\beta h\in G$ при всех $|r|<\varepsilon'$ и $|t|<\varepsilon'$. Рассмотрим также функцию p, определенную равенством $p(s)=g(\alpha s,\,\beta s)=\varphi(f(x+s(\alpha e+\beta h)))$, $|s|<\varepsilon'$. Функция p имеет непрерывную производную p', причем, с одной стороны, $p'(s)=$ $=\alpha g'_r(\alpha s,\,\beta s)+\beta g'_t(\alpha s,\,\beta s)$, а с другой стороны, $p'(s)=\varphi(A_{x+s(\alpha e+\beta h)}(\alpha e+\beta h))$. В частности имеем $p'(0)=\alpha g'_r(0,\,0)+\beta g'_t(0,\,0)=\alpha\varphi(A_x(e))+\beta\varphi(A_x(h))$ и $p'(0)=$ $=\varphi(A_x(\alpha e+\beta h))$. Поэтому $\varphi(A_x(\alpha e+\beta h))=\varphi(\alpha A_x(e)+\beta A_x(h))$. Однако в силу теоремы 5.2 при условии, наложенном на пространство $(Y,\widetilde{\lambda})$, множество всех секвенциально непрерывных вещественно линейных вещественных функционалов, определенных на Y, разделяет точки в Y. Поэтому из последнего равенства получаем $A_x(\alpha e + \beta h) = \alpha A_x(e) + \beta A_x(h)$. Тем самым вещественная линейность отображения A_x доказана.

Теперь докажем, что вещественно линейное отображение A_x, которое, по условию 1), секвенциально непрерывно, является производной функции f в точке x по направлению X_0. Рассмотрим такой вектор $h \in X_0$, что $x + th \in G$ при всех $t \in [0;\ 1]$. Функцию ψ определим равенством $\psi(t) = \varphi(f(x+th) - tA_x(h))$, $t \in [0;\ 1]$. Функция ψ непрерывна и имеет на $(0;\ 1)$ непрерывную производную ψ', причем $\psi'(t) = \varphi(A_{x+th}(h) - A_x(h))$, $t \in (0;\ 1)$. По теореме Лагранжа, $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$. где $\theta \in (0;\ 1)$ — некоторое число. Отсюда получаем

$$\varphi(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) = \varphi(A_{x+\theta h}(h) - A_x(h)). \tag{7}$$

В этом равенстве число θ зависит от φ. Пусть μ_v — функционал Минковского вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v в $(Y,\ \widetilde{\lambda})$. Выберем φ так, чтобы $\varphi(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) = \mu_v(f(x+h) - f(x) - A_x(h))$ и $|\varphi(y)| \leqslant \mu_v(y)$ для всех $y \in Y$. Тогда из (7) получим

$$\mu_v(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) \leqslant \mu_v(A_{x+\theta h}(h) - A_x(h)). \tag{8}$$

Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность векторов $h_n \in X_0$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x + rh_n \in G$ при всех $r \in [0;\ 1]$ и $n \geqslant m$. Без нарушения общности можно считать $x + rh_n \in G$ при всех $r \in [0;\ 1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что последовательность векторов $t_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена. В силу (8) для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\mu_v(t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))) \leqslant \mu_v(A_{x+\theta_n h_n}(t_n h_n) - A_x(t_n h_n))$ с некоторым $\theta_n \in (0;\ 1)$. Из условия 3) вытекает, что $\lim\limits_n \mu_v(A_{x+\theta_n h_n}(t_n h_n) - A_x(t_n h_n)) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_n \mu_v(t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))) = 0$. Однако система всех выпуклых окрестностей нуля пространства $(Y,\ \widetilde{\lambda})$ определяет операцию предела $\widetilde{\lambda}$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что последовательность векторов $t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\ \widetilde{\lambda})$. А это означает, что A_x является производной функции f в точке x по направлению X_0. Единственность производной функции f в каждой точке $x \in G$ по направлению X_0 вытекает из утверждения, аналогичного предложению 1.14. ▶

Кафедра дифференциальных уравнений
Поступила 23.10.2001

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бурбаки Н.** Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.
2. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
3. **Куратовский К.** Топология. М.: Мир, 1966, т, 1.
4. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. **Frechet M.** — Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1906, v. 22, p. 1—74.
6. **Urysohn P.** — Enseign. Math., 1926, v. 25, p. 77—83.
7. **Урысон П. С.** Труды по топологии и другим областям математики. М.-Л.: Гостехиздат, 1951, т. 2.
8. **Kisynski J.** — Coll. Math., 1960, v. 7, p. 205—221.
9. **Riez F.** — Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908, v. 2, Roma, 1909, p. 18—24.
10. **Hausdorff F.** Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.
11. **Kelley J. L.** — Duke Math. J., 1950, v. 17, p. 277—283.
12. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1980.
13. **Антоновский М. Я., Кошевникова И. Г.** — Матем. вестник, 1972, v. 9(24), p. 373—378.
14. **Binz E.** — Math. Ann., 1968, v. 175, p. 169—184.
15. **Goetz A.** — Coll. Math., 1962, v. 9, p. 223—231.
16. **Kowalsky H. J.** — Math. Nachr., 1954, v. 12, p. 301—340.
17. **Cook C. M., Fisher H. R.** — Math. Ann., 1967, v. 173, p. 290—306.
18. **Taylor W.** — Math. Ann., 1970, v. 186, p. 215—227.
19. **Fisher H. R.** —Math. Ann., 1959, v. 137, p. 269—303.
20. **Фрелихер А., Бухер В.** Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М.: Мир, 1970.
21. **Хачатрян И. Г.** Пространства с операцией предела. Ер: Изд-во Ереванск. ун-та, 1999.
22. **Вайнберг М. М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
23. **Лоран Шварц.** Анализ. М.: Мир, 1972, т. 2.

24. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
25. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
26. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
27. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
28. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
29. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966.
30. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
31. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т. 1.

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԱՆԱԼԻԶԻ ՈՐՈՇ ՀԱՐՑԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅԱՄԲ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքը հիմնված է հեղինակի կողմից կառուցված հաջորդականության սահմանի գործողությամբ տարածությունների տեսության վրա: Դիտարկվում է X վեկտորական տարածությունում հաջորդականության սահմանի գծային գործողությունների մասնակի կարգավորված L բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրը ծնում է X-ում սահմանափակ ենթաբազմությունների նույն համակարգը, ինչը որ հաջորդականության սահմանի տրված գծային գործողությունը: Ապացուցվում է, որ L-ը պարունակում է փոքրագույն տարր, L-ում ամեն մի ոչ դատարկ ենթաբազմություն ունի ճշգրիտ ստորին եզր, իսկ կատարյալ կարգավորված ենթաբազմություն ճշգրիտ վերին եզր, և, հետևաբար, L-ը պարունակում է մաքսիմալ տարրեր: Տրվում են L-ի փոքրագույն տարրի և մաքսիմալ տարրերի բնութագրերը: Հաջորդականության սահմանի գործողությամբ գծային տարածությունների համար ապացուցվում են պնդումներ զրոյի շրջակայքերի, ուռուցիկ բազմությունների և դիֆերենցելի ֆունկցիաների վերաբերյալ, ինչպես նաև պնդումներ, որոնք ընդհանրացնում են բաց արտապատկերման մասին և Բանախի–Շտեյնհաուզի դասական թեորեմները: Մասնավորապես ստացված են արդյունքներ, որոնք ուժեղացնում են տոպոլոգիական վեկտորական տարածությունների համար Բանախի–Շտեյնհաուզի թեորեմի որոշ հայտնի տարբերակներ:

I. G. KHACHATRYAN

INVESTIGATION OF SOME PROBLEMS OF FUNCTIONAL ANALYSIS IN LINEAR SPACES WITH LIMIT OPERATION OF A SEQUENCE

Summary

This work is based on the theory of spaces with limit operation of a sequence constructed by the author. In a vector space X partially ordered set L of all linear limit operations of a sequence is considered, each of them generates the same system of bounded subsets in X as the given linear limit operation of a sequence. It is proved that L contains the smallest element, each nonempty subset from L has the greatest lower bound and the perfect ordered subset has the least upper bound that is L contains maximal elements. The characteristics of the smallest element and the maximal elements of L are obtained. For linear spaces with limit operation of a sequence statements about a neighborhood of zero, convex sets and differentiable mappings as well as statements that generalize the classical Banach–Steinhaus theorem and the theorem on open mapping are proved. In particular we obtain results reinforcing some known versions of Banach–Steinhaus theorem for topological vector spaces.