ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 519.6

Ю.Р. АКОПЯН, Г.А. ОГАНЕСЯН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

II. МНОГОСЕТОЧНЫЙ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ

Работа, состоящая из двух частей, посвящена построению и исследованию алгебраического многосеточного переобуславливателя для матриц жесткости, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических краевых задач на основе кусочно-квадратичных базисных функций. В настоящей работе с использованием описанного в [1] двухуровневого переобуславливателя, строится многосеточный переобуславливатель. Получены оценки числа обусловленности переобусловленной матрицы жесткости и показано, что арифметическая цена одного шага переобуславливания пропорциональна размерности алгебраической задачи на мелкой сетке.

1. Введение. Данная статья является непосредственным продолжением [1]. Поэтому мы будем использовать все обозначения и результаты упомянутой статьи, делая соответствующие ссылки. В частности ссылки на формулы из [1] будем обозначать так: ([1] (*номер формулы*)).

2. Построение многосеточного переобуславливателя. Перейдем к построению многосеточного переобуславливателя для матрицы жесткости Q конечноэлементной системы ([1] (2.5)) с использованием внутренних чебышевских итерационных процедур. Такой подход применялся ранее в работах [2–4].

Ранее нами было получено 3×3-блочное представление ([1] (3.8)) двухсеточного переобуславливателя $B^{(k)}$. Зададимся некоторым целым числом $s \ge 1$ и для значений $k = 1,2,\dots,p$ последовательно определим матрицы

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & \frac{1}{2} R^{(k-1)} + A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} A_{23}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

где $R^{(0)} = A^{(0)}$ и

$$R^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left[I^{(k-1)} - \prod_{j=1}^{s} \left(I^{(k-1)} - \theta_j^{(k-1)} M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)} \right) \right]^{-1}, \quad k = 2,3,\dots,p \qquad (2.2)$$

$\left(I^{(k-1)}\right.$ – единичная матрица порядка $\left.n_{k-1}\right)$. В качестве параметров $\theta_j^{(k-1)}$ выбираются числа $\theta_j^{(k-1)} = \dfrac{2}{\beta_{k-1} + \alpha_{k-1} + \left(\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}\right)\xi_j^{(s)}}$, $j = 1,2,\ldots,s$,

где $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ есть отрезок, содержащий собственные числа матрицы $M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}$, а $\xi_j^{(s)}$ являются корнями многочлена Чебышева первого рода степени s. Ниже мы дадим правило, по которому вычисляются границы $[\alpha_k, \beta_k]$ спектра матрицы $M^{(k)^{-1}} A^{(k)}$.

Матрица $M^{(k)}$ была получена путем замены $A^{(k-1)}$ в блочном представлении ([1] (3.8)) матрицы $B^{(k)}$ на специальным образом выбранную матрицу $R^{(k-1)}$. Аналогичную замену проведем в матрице B из [1] (4.11). Выберем некоторое число $\nu \geq 1$ и построим матрицу

$$M = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & B_{22} + Q_{21} Q_{11}^{-1} Q_{12} & Q_{23} \\ 0 & Q_{32} & \frac{1}{3} R^{(p)} + Q_{32} B_{22}^{-1} Q_{23} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

где

$$R^{(p)} = A^{(p)} \left[I^{(p)} - \prod_{j=1}^{\nu} \left(I^{(p)} - \theta_j^{(p)} M^{(p)^{-1}} A^{(p)} \right) \right]^{-1} \tag{2.4}$$

$\left(I^{(p)}\right.$ – единичная матрица порядка $\left.n_p\right)$. Параметры $\theta_j^{(p)}$ выбираются следующим образом: $\theta_j^{(p)} = \dfrac{2}{\beta_p + \alpha_p + \left(\beta_p - \alpha_p\right)\xi_j^{(\nu)}}$, $j = 1,2,\ldots,\nu$, где $\xi_j^{(\nu)}$ есть корни многочлена Чебышева первого рода степени ν.

Итак, в (2.1) и (2.3) нами построена последовательность матриц

$$M^{(1)},\ M^{(2)}, \ldots, M^{(p)},\ M.$$

Матрицу M будем рассматривать в качестве *многосеточного переобуславливателя* для матрицы жесткости Q из [1] (2.5). Заметим, что, согласно определению (2.4) матрицы $R^{(p)}$, многосеточный переобуславливатель M построен с использованием многосеточного переобуславливателя $M^{(p)}$ для случая кусочно-линейной аппроксимации [4].

Так как по определению $M^{(1)} = B^{(1)}$ (см. [1] (3.8) и (2.1)), то в соответствии с теоремой 3.1 из [1] собственные числа матрицы $M^{(1)^{-1}} A^{(1)}$ заключены в отрезке $[\alpha_1, \beta_1]$, где

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 3. \tag{2.5}$$

Предположим теперь, что для некоторого $k \geq 2$ спектр матрицы $M^{(k-1)^{-1}} A^{(k-1)}$ принадлежит отрезку $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$. Имеет место равенство

$$M^{(k)^{-1}} A^{(k)} = \left(M^{(k)^{-1}} B^{(k)}\right)\left(B^{(k)^{-1}} A^{(k)}\right).$$

Поэтому, согласно теореме 3.1 из [1] и теории чебышевских итерационных методов (см., напр., [5]), собственные числа матрицы $M^{(k)^{-1}}A^{(k)}$ заключены в промежутке $[\alpha_k, \beta_k]$, где

$$\alpha_k = 1 - \gamma_{k-1}, \ \beta_k = 3(1 + \gamma_{k-1}); \ \gamma_{k-1} = \frac{2q_{k-1}^s}{1 + q_{k-1}^{2s}}, \ q_{k-1} = \frac{\sqrt{c_{k-1}} - 1}{\sqrt{c_{k-1}} + 1}, \ c_{k-1} = \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}. \quad (2.6)$$

Справедлива оценка $cond\left(M^{(k)^{-1}}A^{(k)}\right) \le c_k$ для спектрального числа обусловленности. Как следует из формул (2.5) и (2.6), величины c_k могут быть получены с помощью рекуррентной процедуры

$$c_1 = 3, \ c_k = 3\left[\frac{\left(\sqrt{c_{k-1}} + 1\right)^s + \left(\sqrt{c_{k-1}} - 1\right)^s}{\left(\sqrt{c_{k-1}} + 1\right)^s - \left(\sqrt{c_{k-1}} - 1\right)^s}\right]^2, \ k = 2,3,\ldots,p.$$

Для значений s, удовлетворяющих условию $s^2 > 3$, последовательность чисел $\{c_k\}_{k=1}^p$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху (при неограниченном росте числа уровней измельчения p):

$$c_1 < c_2 < \ldots < c_p < c_*. \quad (2.7)$$

Итак, мы можем брать лишь значения $s \ge 2$. С другой стороны, чем больше s, тем больший объем вычислительной работы потребуется для решения системы с матрицей $M^{(p)}$. Непосредственный подсчет числа арифметических операций (см. [4]) показал, что оптимальным, с точки зрения пропорциональности объема вычислений числу узлов сетки ω_p, является выбор $s = 2$ и $s = 3$. Там же получены значения величины c_* из (2.7) для рассматриваемых значений s:

$$c_* = 3 + 2\sqrt{3} \quad \text{для } s = 2, \qquad c_* = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3} \quad \text{для } s = 3. \quad (2.8)$$

Имея равенство $M^{-1}Q = \left(M^{-1}B\right)\left(B^{-1}Q\right)$, воспользуемся теоремой 4.2 из [1] и определением (2.4) матрицы $R^{(p)}$. Аналогично (2.6) получим, что собственные числа матрицы $M^{-1}Q$ принадлежат промежутку $[\alpha, \beta]$, где

$$\alpha = 1 - \gamma, \quad \beta = 4(1 + \gamma), \ \gamma = \frac{2q^\nu}{1 + q^{2\nu}}, \ q = \frac{\sqrt{c_p} - 1}{\sqrt{c_p} + 1}.$$

Тогда для спектрального числа обусловленности матрицы $M^{-1}Q$ справедлива оценка

$$cond\left(M^{-1}Q\right) \le 4\left[\frac{\left(\sqrt{c_p} + 1\right)^\nu + \left(\sqrt{c_p} - 1\right)^\nu}{\left(\sqrt{c_p} + 1\right)^\nu - \left(\sqrt{c_p} - 1\right)^\nu}\right]^2.$$

Отсюда с учетом (2.7) приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. Имеет место оценка

$$cond\left(M^{-1}Q\right)\le 4\left[\frac{\left(\sqrt{c_*}+1\right)^{\nu}+\left(\sqrt{c_*}-1\right)^{\nu}}{\left(\sqrt{c_*}+1\right)^{\nu}-\left(\sqrt{c_*}-1\right)^{\nu}}\right]^2, \tag{2.9}$$

где величина c_* определяется в (2.8).

В приведенной ниже табл. 1 даны численные значения правой части оценки (2.9) при некоторых значениях параметра ν.

Таблица 1

$\nu =$	$cond\left(M^{-1}Q\right)\le$	
	$s=2$	$s=3$
1	$4\left(3+2\sqrt{3}\right)\approx 25.86$	$4\left(3+4\sqrt{3}\right)/3\approx 13.24$
2	$4\left(3+2\sqrt{3}\right)/3\approx 8.62$	$4\left(27+16\sqrt{3}\right)/39\approx 5.62$
3	$12\left(2\sqrt{3}-3\right)\approx 5.57$	$4\left(3+4\sqrt{3}\right)/9\approx 4.42$
4	$8\sqrt{3}/3\approx 4.62$	$4\left(160\sqrt{3}-237\right)/39\approx 4.12$
5	$4\left(63+38\sqrt{3}\right)/121\approx 4.26$	$4\left(556\sqrt{3}-597\right)/363\approx 4.04$
6	$4\left(14\sqrt{3}-15\right)/9\approx 4.12$	$32\left(6+5\sqrt{3}\right)/117\approx 4.01$

3. Некоторые вопросы численной реализации. В итерационных методах с матрицей M в качестве многосеточного переобуславливателя необходимо решать системы как с самой матрицей M, так и с матрицами $M^{(k)}$, $k=1,2,\dots,p$.

- *Решение системы с матрицей M.*

Рассмотрим систему

$$Mu=f, \tag{3.1}$$

где

$$u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix},\ u_i,\ \ f_i\in G^{(i)},\ \ i=1,2,3.$$

Процедура MG/M

1) вычисляются сеточные функции

$$z_2=f_2-Q_{21}Q_{11}^{-1}f_1,\ \ z_3=3\left(f_3-Q_{32}B_{22}^{-1}z_2\right); \tag{3.2}$$

2) решается система

$$R^{(p)}u_3=z_3; \tag{3.3}$$

решение системы (3.3) эквивалентно осуществлению ν шагов чебышевского итерационного процесса:

$$M^{(p)}\frac{u_3^{(j)}-u_3^{(j-1)}}{\theta_j^{(p)}}=-A^{(p)}u_3^{(j-1)}+z_3,\ j=1,2,\dots,\nu,\ u_3^{(0)}=0,\ \ u_3=u_3^{(\nu)};$$

3) вычисляются сеточные функции

$$u_2=B_{22}^{-1}\left(z_2-Q_{23}u_3\right),\ \ u_1=Q_{11}^{-1}\left(f_1-Q_{12}u_2\right). \tag{3.4}$$

Конец процедуры.

Заметим, что обращаемые в формулах (3.2) и (3.4) матрицы Q_{11} и B_{22} являются диагональными.

• *Решение системы с матрицей* $M^{(k)}$ $(k = 1,2,\dots,p)$.

Рассмотрим систему

$$M^{(k)}v = g, \tag{3.5}$$

где

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}, \quad v_i,\ g_i \in G_k^{(i)}, \quad i = 1,2,3.$$

Процедура MG/$M^{(k)}$

1) вычисляются сеточные функции

$$y_2 = g_2 - A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)^{-1}} g_1, \quad y_3 = 2\left(g_3 - A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)^{-1}} y_2\right); \tag{3.6}$$

2) решается система

$$R^{(k-1)} v_3 = y_3; \tag{3.7}$$

при $2 \le k \le p$ решение системы (3.7) эквивалентно осуществлению s шагов чебышевского итерационного процесса

$$M^{(k-1)} \frac{v_3^{(j)} - v_3^{(j-1)}}{\theta_j^{(k-1)}} = -A^{(k-1)} v_3^{(j-1)} + y_3, \; j = 1,2,\dots,s, \; v_3^{(0)} = 0, \; v_3 = v_3^{(s)};$$

при $k = 1$ решается система

$$A^{(0)} v_3 = y_3; \tag{3.8}$$

3) вычисляются сеточные функции

$$v_2 = B_{22}^{(k)^{-1}}\left(y_2 - A_{23}^{(k)} v_3\right), \quad v_1 = A_{11}^{(k)^{-1}}\left(g_1 - A_{12}^{(k)} v_2\right). \tag{3.9}$$

Конец процедуры.

При реализации алгоритма обращаются диагональные матрицы $A_{11}^{(k)}$ и $B_{22}^{(k)}$ (формулы (3.6) и (3.9)). Далее, предполагается, что на грубой сетке (уровень 0) система сеточных уравнений (3.8) с матрицей $A^{(0)}$ решается с помощью некоторого прямого метода с затратой $O(1)$ арифметических операций.

Дадим оценку арифметической цены одного шага переобуславливания. Обозначим через A_{ops} число арифметических операций, требуемых для решения системы с матрицей M. Через $A_{ops}^{(0)}$ обозначим число арифметических операций, затрачиваемых на решение системы с матрицей $A^{(0)}$. Пользуясь оценками, данными в работе [6], путем прямых вычислений получим

$$A_{ops} \approx \left(7 + \frac{19\nu}{4 - s} + \frac{\nu}{4} A_{ops}^{(0)}\right) n. \tag{3.10}$$

В заключение рассмотрим вопрос о выборе ν – числа чебышевских итераций на самом верхнем уровне. С одной стороны, с увеличением ν

уменьшается число обусловленности матрицы $M^{-1}Q$ (см. табл. 1). С другой стороны, с увеличением ν, согласно оценке (3.10), растет цена одного шага переобуславливания.

Введем величину

$$R(\nu)=\sqrt{cond\left(M^{-1}Q\right)}\cdot W(\nu),$$

где

$$W(\nu)=7+\frac{19\nu}{4-s}+\frac{\nu}{4}A_{ops}^{(0)},$$

которую будем рассматривать в качестве показателя общих вычислительных затрат, требуемых для решения системы сеточных уравнений ([1] (2.5)) с переобуславливателем M. Ниже приведем величины $R(\nu)$ для значений параметра ν, указанных в таблице 2.

Таблица 2

$\nu=$	$R(\nu)\approx$	
	$s=2$	$s=3$
1	$83.91+1.27A_{ops}^{(0)}$	$94.61+0.91A_{ops}^{(0)}$
2	$76.34+1.47A_{ops}^{(0)}$	$106.68+1.18A_{ops}^{(0)}$
3	$83.78+1.77A_{ops}^{(0)}$	$134.55+1.58A_{ops}^{(0)}$
4	$96.72+2.15A_{ops}^{(0)}$	$168.47+2.03A_{ops}^{(0)}$
5	$112.49+2.58A_{ops}^{(0)}$	$205.02+2.51A_{ops}^{(0)}$
6	$129.91+3.04A_{ops}^{(0)}$	$242.30+3.00A_{ops}^{(0)}$

Сравнивая результаты таблицы, приходим к заключению, что с точки зрения минимизации величины $R(\nu)$ оптимальным является выбор $s=3$ и $\nu=1$ (при естественном предположении, что $n_0>6$).

*Кафедра математических методов
и моделирования*

Поступила 28.03.2002

ЛИТЕРАТУРА

1. **Акопян Ю.Р., Оганесян Г.А.** – Ученые Записки ЕГУ, 2003, № 1, с. 3–13 .
2. **Hakopian Yu.R.** – In: Mathematical Problems of Computer Science, v. 21; Trans. of the Institute for Informatics and Automation Problems of the National Acad. Sci. of Armenia, Yerevan, 2000, p.164–180.
3. **Hakopian Yu.R. and Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1991, v. 6, №6, p. 453–483.
4. **Kuznetsov Yu.A.** – Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1989, v. 4, № 5, p. 351–379.
5. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. М., 1984.
6. **Axelsson O. and Vassilevski P.S.** – Applied Numerical Mathematics, 1991, № 7, p. 437–451.

ՅՈւ.Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ.Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

II. ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉ

Ամփոփում

Աշխատանքը, որը բաղկացած է երկու մասից, նվիրված է էլիպսական հավասարումների երկրորդ կարգի վերջավոր տարրային մոտարկումների դեպքում առաջացող կոշտության մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցմանը և հետազոտմանը: Աշխատանքի երկրորդ մասում, հիմնվելով առաջին մասում նկարագրված երկմակարդակային վերապայմանավորիչի վրա, կառուցվում է բազմացանցային վերապայմանավորիչ: Ստացված են վերապայմանավորված կոշտության մատրիցների պայմանավորվածության թվերի գնահատականները և ցույց է տրված, որ վերապայմանավորման մեկ քայլի համար պահանջվող թվաբանական գործողությունների քանակը համեմատական է մանր ցանցի վրա հանրահաշվական խնդրի չափողականությանը:

Yu.R. HAKOPIAN, H.A. HOVHANNISYAN

ALGEBRAIC MULTIGRID PRECONDITIONER FOR SECOND ORDER FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS IN RECTANGULAR DOMAINS

II. MULTIGRID PRECONDITIONER

Summary

The present paper, consisting of two parts, is devoted to constructing an algebraic multigrid preconditioner for stiffness matrices arising in second-order finite element approximation of elliptic boundary value problems. In the second part of the paper, being based on the two-level preconditioner described in the first part, the multigrid preconditioner is constructed. The multigrid preconditioner is proved to be spectrally equivalent to the initial stiffness matrix and its arithmetic cost is proportional to the dimensionality of the finest-grid algebraic problem.