ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2003 Естественные науки

Математика

УДК 517.95

В.А. ОГАНЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задача Дирихле как для одного уравнения, так и для систем уравнений рассмотрена многими авторами. В их работах [1–6] граничная функция непрерывна или имеет слабую особенность (интегрируемая особенность). В настоящей работе рассматривается случай, когда граничная функция может иметь и не слабую особенность.

В классе $M_D(x_1,x_2,\ldots,x_k,\infty;l_1,l_2,\ldots,l_k,l_{k+1})$ рассматривается граничная задача

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \\ u(x,0)=f(x),\ x\neq x_1,x_2,\ldots,x_k, \end{cases}$$

где $f(x)\in N_r(x_1,x_2,\ldots,x_k,\infty;l_1,l_2,\ldots,l_k,l_{k+1})$. Доказано, что задача имеет решение, и найдено одно из них.

Рассмотрим эллиптическую систему

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=0, \tag{1}$$

где A,B,C – постоянные вещественные квадратные матрицы n-го порядка, а вектор-функция $u(x,y)=\{u_1(x,y),u_2(x,y),\ldots,u_n(x,y)\}$ – искомое вещественное решение.

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C\neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det(A+2\lambda B+\lambda^2 C)=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

Граничные задачи для системы (1) рассмотрены многими авторами (напр., [1–6]). В этих задачах граничная функция или непрерывна, или принадлежит классу Гельдера, или имеет слабую особенность.

В работе [7] для системы (1) в верхней полуплоскости исследована задача Дирихле, когда граничная функция имеет особенность на границе области, причем особенность необязательно слабая, и когда уравнение (2) имеет только простые корни.

В настоящей работе для задачи Дирихле рассматривается случай, когда граничная функция имеет особенность, которая может быть и не слабой, а уравнение (2) имеет кратные корни.

В отличие от [7], где был изучен случай простых корней, в настоящей работе общее решение системы (1), следовательно, и решение нижеследующей задачи (1), (7) имеет более сложный вид и необходимо оценить новые слагаемые.

Кроме того, в данной работе и класс граничных функций, и класс искомого решения отличаются от соответствующих классов, рассмотренных в [7].

Пусть D – верхняя полуплоскость в евклидовом пространстве R^2, а Γ – ее граница.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_h$ – конечные точки границы Γ, $l_1, l_2, \ldots, l_q$ – натуральные числа, $l_{q+1}, l_{q+2}, \ldots, l_h$ – нецелые положительные числа или нуль, а $l_{h+1} \geq 0$.

Обозначим через $M_D(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1})$ класс действительных вектор-функций $u(x,y) = \{u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots, u_n(x,y)\}$, непрерывных всюду в $\overline{D}$, кроме, быть может, граничных точек $x_1, x_2, \ldots, x_h$, в окрестности которых функция удовлетворяет неравенствам

$$|u(x,y)| \leq \begin{cases} const|z - x_k|^{-l_k} \ln|z - x_k|^{-1}, & k = 1, 2, \ldots, q, \\ const|z - x_k|^{-l_k}, & k = q+1, \ldots, h, \end{cases} \tag{3}$$

а в окрестности бесконечности – неравенству

$$|u(x,y)| \leq const|z|^{l_{h+1}} \ln|z|, \tag{4}$$

где $z = x + iy$, i – мнимая единица.

Обозначим через $N_\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1})$ класс действительных вектор-функций $f(x)$, непрерывных всюду на Γ, кроме, быть может, точек $x_1, x_2, \ldots, x_h$, в окрестности которых

$$|f(x)| \leq const|x - x_k|^{-l_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \tag{5}$$

а в окрестности бесконечности

$$|f(x)| \leq const|x|^{l_{h+1}}. \tag{6}$$

Рассматривается задача Дирихле в следующей постановке.

Задача 1 (задача Дирихле). Требуется найти в области $D(y > 0)$ регулярное решение для слабосвязанной эллиптической системы (1), принадлежащее классу $M_D(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1})$ и удовлетворяющее граничному условию

$$u\big|_{y=0} = f(x), \quad x \neq x_1, x_2, \ldots, x_h, \tag{7}$$

где $f(x)$ – заданная вектор-функция из класса

$$N_\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1}).$$

Теорема. При любой вектор-функции $f(x)$ из класса

$$N_\Gamma\left(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1}\right)$$

задача 1 в классе $M_D\left(x_1, x_2, \ldots, x_h, \infty; l_1, l_2, \ldots, l_h, l_{h+1}\right)$ имеет решение.

Доказательство. Известно, что общее решение системы (1) в этом случае дается формулой (см. [1], стр. 112, [2])

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\omega_{jr}(x+\lambda_j y) + \sum_{p=1}^{r-1}\beta_{jr}^{(p)} y^p \omega_{j,r-p}^{(p)}(x+\lambda_j y)\right], \quad (8)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_0}$ – корни характеристического уравнения (2) с положительными мнимыми частями, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu_0}$ – соответственно их кратности, $\omega_{jk}(x+\lambda_j y)$ – произвольные аналитические функции относительно $z_j = x + \lambda_j y$, n-мерные векторы δ_{jr} и числа $\beta_{ir}^{(p)}$ определяются через коэффициенты системы (1), причем $b_{j1}^{(p)} = 0$. Условие слабой связанности для системы (1) совпадает с условием линейной независимости векторов δ_{jr} ($j = 1, 2, \ldots, \nu_0$, $r = 1, 2, \ldots, k_j$) (см. [1], стр. 113).

Теорему 1 докажем в частном случае, когда $h = 1$, $x_1 = 0$. В общем случае доказательство аналогично.

Обозначим через $l_1 = l$, $[l_1] = m$, $l_2 = d$, $[l_2] = s$, $d - s = \tau$.

Пусть $f(x) \in N_\Gamma(0, \infty; l_1, d_1)$. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad (9)$$

где

$$f_1(x) = f(x)\theta(x), \quad f_2(x) = f(x)\left(1 - \theta(x)\right), \quad (10)$$

а $\theta(x)$ – непрерывная функция на всей оси и такая, что

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1/2, 1/2) \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases}.$$

Введем вспомогательную систему

$$\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\omega_{jr}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m f_1(t)dt}{z^m(t-z)} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{s+1} f_2(t)dt}{t^{s+1}(t-z)}. \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m f_1(t)dt}{z^m(t-z)} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{s+1} f_2(t)dt}{t^{s+1}(t-z)}\right)\Big|_{y=0} = f(x).$$

Учитывая линейную независимость векторов δ_{jr} и обозначая через $\omega(z)$ вектор $\omega(z) = \{\omega_{11}(z), \ldots, \omega_{1k_1}(z), \omega_{21}(z), \ldots, \omega_{2k_2}(z), \ldots, \omega_{\nu_0 1}(z), \ldots, \omega_{\nu_0 k_0}(z)\}$, получим

$$\omega(z) = \delta^{-1}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m f_1(t)dt}{z^m(t-z)} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{s+1} f_2(t)dt}{t^{s+1}(t-z)}\right), \quad (12)$$

где δ квадратная матрица n-го порядка со столбцами δ_{jr}, а δ^{-1} – обратная матрица к матрице δ.

Представим общее решение (8) в виде

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\omega_{jr}(z)+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}[\omega_{jr}(z_j)-\omega_{jr}(z)]+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\left[\sum_{p=1}^{r-1}\beta_{jr}^{(p)}y^p\omega_{j,r-p}^{(p)}(z_j)\right]. \qquad (13)$$

Подставляя значение $\omega(z)$ из (12) в (13), получим

$$u(x,y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m f_1(t)dt}{z^m(t-z)}+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{s+1}f_2(t)dt}{t^{s+1}(t-z)}+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\frac{\widetilde{\alpha}_{jr}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{z_j^m(t-z_j)}-\frac{1}{z^m(t-z)}\right)t^m f_1(t)dt\right]+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\frac{\widetilde{\alpha}_{jr}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z_j^{s+1}}{t-z_j}-\frac{z^{s+1}}{t-z}\right)\frac{f_2(t)}{t^{s+1}}dt\right]+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\sum_{p=1}^{r-1}y^p\beta_{jr}^{(p)}\frac{\alpha_{j,r-p}}{\pi i}\left(\sum_{k=0}^{p}\sigma_{pk}^{(m)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m z_j^k f_1(t)dt}{z_j^{m+p}(t-z_j)^{k+1}}\right)\right]+$$
$$+\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu_0}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{jr}\left[\sum_{p=1}^{r-1}y^p\beta_{jr}^{(p)}\frac{\alpha_{j,r-p}}{\pi i}\left(\sum_{k=0}^{p}\tau_{pk}^{(s)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_j^{s-p+k+1}f_2(t)dt}{(t-z_j)^{k+1}t^{s+1}}\right)\right], \qquad (14)$$

где $\widetilde{\alpha}_{jr}$ – некоторые постоянные n-мерные векторы, которые являются строками матрицы δ^{-1}, а $\sigma_{pk}^{(m)}$, $\tau_{pk}^{(s)}$ – некоторые постоянные числа.

Покажем, что вектор-функция $u(x,y)$, заданная формулой (14), является решением задачи 1.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $u(x,y)$, определяемая формулой (14), удовлетворяет системе (1).

В [7] показано, что сумма первых двух слагаемых в правой части (14) стремится к $f(x_0)$ при $(x,y)\to(x_0,0)$ $(x_0\neq 0, y>0)$. В той же работе доказано, что третье и четвертое слагаемые стремятся к нулю при $(x,y)\to(x_0,0)$, $x_0\neq 0, y>0$.

Докажем, что при $(x,y)\to(x_0,0)$, $x_0\neq 0, y>0$, пятое и шестое слагаемые в правой части формулы (14) также стремятся к нулю.

Сначала это сделаем для пятого слагаемого. Для этого достаточно показать, что функция

$$K_p(x,y)=y^p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^m f_1(t)dt}{(t-z_j)^{p+1}} \quad (p=1,2,\ldots) \qquad (15)$$

стремится к нулю при $(x,y) \to (x_0,0)$, $x_0 \neq 0, y>0$.

Представим функцию $K_p(x,y)$ в виде

$$K_p(x,y) = K_{p1}(x,y) + K_{p2}(x,y), \tag{16}$$

где

$$K_{p1}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p x_0^m f_1(x_0)dt}{(t-z_j)^{p+1}}, \tag{17}$$

$$K_{p2}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^p[t^m f_1(t) - x_0^m f_1(x_0)]}{(t-z_j)^{p+1}} dt. \tag{18}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{y\to+0} K_{p1}(x,y) = 0$. Чтобы оценить вектор-функцию $K_{p2}(x,y)$, заметим, что из непрерывности функции $f_1(x)$ в точке $x_0 \neq 0$ для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такая, что из $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |t^m f_1(t) - x_0^m f_1(x_0)| < \varepsilon$. Заметим также, при $y \to +0$, $\operatorname{Im}\lambda_j > 0$ существуют постоянные $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ такие, что $B_1|z-t| \le |z_j - t| \le B_2|z-t|$. Теперь функцию $K_{p2}(x,y)$ представим в виде

$$K_{p2}(x,y) = L_1(x,y) + L_2(x,y), \tag{19}$$

где

$$L_1(x,y) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{y^p[t^m f_1(t) - x_0^m f_1(x_0)]}{(t-z_j)^{p+1}} dt, \tag{20}$$

$$L_2(x,y) = \int_{|t-x_0|\ge\delta} \frac{y^p[t^m f_1(t) - x_0^m f_1(x_0)]}{(t-z_j)^{p+1}} dt. \tag{21}$$

Имеем

$$|L_1(x,y)| \le \varepsilon \cdot const \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{y^p dt}{|t-z|^{p+1}} dt = \varepsilon \cdot const \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{y^p dt}{[(t-x)^2 + y^2]^{\frac{p+1}{2}}} dt. \tag{22}$$

Произведя замену переменной $t = x + \tau y$ в (22), получим

$$|L_1(x,y)| \le \varepsilon \cdot const \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{(\tau^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} dt \le \varepsilon \cdot const. \tag{23}$$

Переходя в (21) к пределу при $(x,y) \to (x_0,0)$, $x_0 \neq 0, y > 0$, найдем

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x_0\neq 0,\, y>0}} L_2(x,y) = 0. \tag{24}$$

Из (23) и (24) и из того, что $K_{p1}(x,y) = 0$, следует $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ x_0\neq 0,\, y>0}} K_p(x,y) = 0$.

Аналогично доказывается, что шестое слагаемое в правой части формулы (14) стремится к нулю при $(x,y) \to (x_0,0)$, $x_0 \neq 0, y > 0$.

Таким образом, мы показали, что вектор-функция $u(x,y)$, заданная формулой (14), удовлетворяет системе (1) и граничному условию (7).

Теперь покажем, что эта же функция принадлежит классу $M_D(0,\infty;l,d)$. Для этого достаточно оценить следующие выражения:

$$T_k(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^p t^m f_1(t)dt}{z_j^{m+p-k}(t-z_j)^{k+1}}\quad (k=0,1,2,\dots,p,\ p\ge 1),\tag{25}$$

и

$$Q_k(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^p z_j^{s-p+k+1} f_2(t)dt}{(t-z_j)^{k+1}t^{s+1}}\quad (k=0,1,2,\dots,p,\ p\ge 1)\tag{26}$$

соответственно в окрестности точек $z=0$ и $z=\infty$. Представим $T_k(x,y)$ в виде

$$T_k(x,y)=T_{k1}(x,y)+T_{k2}(x,y)+T_{k3}(x,y),\tag{27}$$

где

$$T_{k1}(x,y)=\int_{|t|<\frac{|z|}{2}}\frac{y^p t^m f_1(t)dt}{z_j^{m+p-k}(t-z_j)^{k+1}},\tag{28}$$

$$T_{k2}(x,y)=\int_{\frac{|z|}{2}\le|t|\le 2|z|}\frac{y^p t^m f_1(t)dt}{z_j^{m+p-k}(t-z_j)^{k+1}},\tag{29}$$

$$T_{k1}(x,y)=\int_{2|z|\le|t|\le 1}\frac{y^p t^m f_1(t)dt}{z_j^{m+p-k}(t-z_j)^{k+1}}.\tag{30}$$

Имеем

$$|T_{k1}(x,y)|\le const\int_{-\frac{|z|}{2}}^{+\frac{|z|}{2}}\frac{y^p|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+p-k}|z|^{k+1}}\le$$

$$\le const\int_{-\frac{|z|}{2}}^{+\frac{|z|}{2}}\frac{|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+1}}\le const\cdot|z|^{-l}\quad (\text{где } \gamma=l-[l]=l-m).\tag{31}$$

Для того чтобы оценить $T_{k2}(x,y)$, рассмотрим два случая.

I случай. Пусть $k<p$, тогда

$$|T_{k2}(x,y)|\le const\int_{\frac{|z|}{2}\le|t|\le 2|z|}\frac{y^p|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+p-k}|t-z|^{k+1}}\le const\int_{\frac{|z|}{2}\le|t|\le 2|z|}\frac{y^p|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+p-k}y^{k+1}}\le\frac{const}{|z|^l}.\tag{32}$$

II случай. Пусть $k=p$, тогда

$$|T_{k2}(x,y)|\le const\int_{\frac{|z|}{2}\le|t|\le 2|z|}\frac{y^p|t|^{-\gamma}dt}{|z|^m|t-z|^{p+1}}\le const\int_{\frac{|z|}{2}\le|t|\le 2|z|}\frac{y^p|t|^{-\gamma}dt}{|z|^m|t-z|^2|t-z|^{p-1}}\le$$

$$\leq const \int\limits_{\frac{|z|}{2}\leq|t|\leq 2|z|} \frac{ydt}{|z|^{l}[(t-x)^2+y^2]} \leq \frac{const}{|z|^{l}}, \tag{33}$$

$$|T_{k3}(x,y)| \leq const \int\limits_{2|z|\leq|t|\leq 1} \frac{y^{p}|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+p-k}|t-z|^{k+1}} \leq const \int\limits_{2|z|\leq|t|\leq 1} \frac{y^{p}|t|^{-\gamma}dt}{|z|^{m+p-k}|t-z|^{k+1}} \leq \frac{const}{|z|^{l}}. \tag{34}$$

Из (27) и из неравенств (31)–(34) следует, что $T_k(x,y)$ в окрестности $z=0$ удовлетворяет неравенству

$$|T_k(x,y)| \leq \frac{const}{|z|^{l}}. \tag{35}$$

Представим вектор-функцию $Q_k(x,y)$, определяемую формулой (26), в виде

$$Q_k(x,y) = Q_{k1}(x,y) + Q_{k2}(x,y) + Q_{k3}(x,y), \tag{36}$$

где

$$Q_{k1}(x,y) = \int\limits_{1\leq|t|\leq\frac{|z|}{2}} \frac{y^{p}z_j^{s-p+k+1}f_2(t)dt}{(t-z_j)^{k+1}t^{s+1}}, \tag{37}$$

$$Q_{k2}(x,y) = \int\limits_{\frac{|z|}{2}\leq|t|\leq 2|z|} \frac{y^{p}z_j^{s-p+k+1}f_2(t)dt}{(t-z_j)^{k+1}t^{s+1}}, \tag{38}$$

$$Q_{k3}(x,y) = \int\limits_{|t|\geq 2|z|} \frac{y^{p}z_j^{s-p+k+1}f_2(t)dt}{(t-z_j)^{k+1}t^{s+1}}. \tag{39}$$

Используя следующее неравенство в окрестности бесконечности

$$|f(x)| \leq const\cdot|x|^{d}, \tag{40}$$

из (37)–(39) получим оценку для вектор-функций $Q_k(x,y)$

$$|Q_k(x,y)| \leq const\cdot|z|^{d},\ |z|>1. \tag{41}$$

Вследствие того, что $T_k(x,y)$ ограничена в окрестности бесконечности, а $Q_k(x,y)$ – в окрестности нуля, из неравенств (35) и (41) следует, что вектор-функция $u(x,y)$, определяемая формулой (14), принадлежит классу $M_{0}(0,\infty;l,d)$. Теорема доказана.

Кафедра высшей математики радиофизического факультета *Поступила 25.10.2002*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
2. **Товмасян Н.Е.** – Дифференциальные уравнения, 1966, № 1, № 2, с. 3–23, 164–171.
3. **Меликсетян Э.П.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1979, № 5, с. 391–402.
4. **Солдатов П.А.** – Изв. АН СССР, 1991, № 5, с. 1070–1100.
5. **Tovmasian N.E.** Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, Singapore: World Scientific Publ.,1994.
6. **Товмасян Н.Е., Закарян B.C.** – Изв. НАН Армении, Математика, 2000, № 6.
7. **Оганян В.А.** – Изв. АН Арм. ССР, Математика, 1981, № 6, с. 465–477.
8. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Վ.Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԽԶՎՈՂ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԹՈՒՅԼ ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Դիրիխլեի խնդիրը ինչպես մեկ հավասարման, այնպես էլ հավասարումների համակարգերի համար դիտարկված է մի շարք հեղինակների կողմից: Այդ հեղինակների աշխատանքներում եզրային ֆունկցիան անընդհատ է կամ ունի թույլ եզակիություն (ինտեգրելի եզակիություն): Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է այն դեպքը, երբ եզրային ֆունկցիան կարող է ունենալ նաև ոչ թույլ եզակիություն: $M_D\left(x_1,x_2,\dots,x_h,\infty;l_1,l_2,\dots,l_h,l_{h+1}\right)$ դասում դիտարկվում է

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \\ u(x,0)=f(x),\ x\neq x_1,x_2,\dots,x_h \end{cases}$$

եզրային խնդիրը, որտեղ $f(x)\in N_\Gamma\left(x_1,x_2,\dots,x_h,\infty;l_1,l_2,\dots,l_h,l_{h+1}\right)$:

Ապացուցված է, որ այդ խնդիրը ունի լուծում և գտնված է նրանցից մեկը:

V.H. OHANIAN

THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE ELLIPTIC SYSTEM OF WEAKLY CONNECTED SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

Summary

The Dirichlet problem is observed by different authors both for one equation and for systems of equations. In these authors' articles the boundary function is continuous or has weak singularity (integral singularity). This article observe the case where boundary function may also have not weak singularity. In $M_D(x_1, x_2, ..., x_h, \infty; l_1, l_2, ..., l_h, l_{h+1})$ class is observed

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,0) = f(x), \ x \neq x_1, x_2, ..., x_h \end{cases}$$

the boundary problem, where $f(x) \in N_\Gamma(x_1, x_2, ..., x_h, \infty; l_1, l_2, ..., l_h, l_{h+1})$.

It is proved that the problem has a solution and one solution is found.